S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 23–61 (2005) УДК 517.95 + 517.923

MSC 35C05

ПРЯМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СЕЙСМИКИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО СЛОИСТЫХ СРЕД

А.Л. КАРЧЕВСКИЙ

Abstract. A method of numerical solving the elasticity system for horizontal stratified anisotropic media is presented. The algorithm uses a relation between a system of differential equation of second order and a differential matrix Riccati equation which admits a solution in an analytical form in the each layer. The proposed numerical method differs from known methods and can be applied for horizontal stratified media of any type.

Введение

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Еще бо́льшее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении окончательных результатов обработки с данными акустического каротажа и т.п. На нем основан метод псевдоакустического каротажа, представляющий собой одну из попыток решения обратной динамической задачи для реальных данных.

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежит уравнение акустики. Это связано с двумя фактами. Во-первых, математическое решение соответствующих задач хорошо изучено и не вызывает больших сложностей. Во-вторых,

---

Karchevsky, A.L., The direct dynamical problem of seismics for horizontally stratified media.

Работа поддержана РФФИ (гранты 05-01-00171, 05-01-00559), проектом ур.04.01.200 программы Рособразования "Университеты России"и грантом Президента РФ НШ-1172.2003.1.

Поступила 17 января 2005 г., опубликована 18 марта 2005 г.

практическая сейсморазведка до недавнего времени была направлена на регистрацию, выделение и интерпретацию отраженных P-волн. Последнее позволяло достаточно хорошо приблизить окончательные результаты обработки реальных данных к решению задачи акустики.

Тем не менее, потребности геофизики не исчерпываются теми возможностями, которые у нее были — методы сейсморазведки постоянно развиваются и совершенствуются. Необходимо отметить, что первые работы по многоволновой сейсморазведке появились в России. В этой связи в первую очередь необходимо упомянуть о работах Пузырева Н.Н. [24–27] и его учеников. В работах Пузырева Н.Н. [28–30] дан прекрасный обзор становления и развития многоволновой сейсмики в России. Идеи многоволновой сейсмики быстро развивались, создавалась соответствующая техника.

Теоретические работы по геофизике, успешная апробация некоторых методов многоволновой сейсморазведки на реальных данных пробудили в настоящее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS. В этом случае математическое моделирование и интерпретация собранного геофизического материала требуют развития более сложного математического аппарата, чем существующий. Уравнения акустики для учета влияния обменных волн оказываются неприемлемыми, и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости.

Потребности математического моделирования сейсмических и электромагнитных полей требуют создания методов для численного решения прямых задач, которые быстро решались бы при использовании современной вычислительной техники.

Модель горизонтально-слоистой среды является распространенной моделью среды для математического моделирования и интерпретации геофизических данных в сейсмо- и электоразведке. Известно, что расчет сейсмических и электромагнитных полей может быть сведен к решению дифференциальных уравнений (ДУ) или систем дифференциальных уравнений (СДУ) второго порядка. Горизонтально-слоистая модель среды позволяет строить алгоритмы решения прямых задач, которые легко реализуются на компьютере и требуют сравнительно мало времени для вычислений. Это позволяет решать задачи, возникающие в геофизике, которые требуют большого числа решений прямой задачи.

Большой вклад в понимание процессов распространения волн в слоистых средах, в развитие методов вычислений для таких сред был внесен такими учеными как Бреховских Л.М. [4, 5], Молотков Л.А. [19], Петрашень Г.И. [20–23], Ризниченко Ю.В. [31].

Существует масса методов решения СДУ теории упругости. Например, матричный метод Томоса–Хаскела и его модификации [19, 36], конечно-разностный метод (см., например, [11]), метод конечных элементов и прочие. Однако, при решении обратной динамической задачи сейсмики, когда прямая задача решается много раз, когда пространственные масштабы велики, требуется метод решения, который дает значения требуемых величин быстро. Упрощение модели среды — считается, что среда является горизонтально-слоистой — помогает построить такой алгоритм.

Одним из первых технологичных алгоритмов послойного пересчета для решения ДУ второго порядка для горизонтально-слоистой среды был алгоритм

Тихонова А.Н. и Шахсуварова Д.Н. [32]. Однако он имел некоторые ограничения: при его реализации существовали величины, записанные с участием экспонент, имеющих показатели с положительными действительными частями.

Далее, идея послойного пересчета была реализована в следующем виде. Хорошо известно, что ДУ или СДУ второго порядка могут быть сведены с помощью специальной замены функций к дифференциальному уравнению Риккати (ДУР) или дифференциальному матричному уравнению Риккати (ДМУР). Замечательным является тот факт, что когда коэффициенты ДУР или ДМУР являются постоянными, тогда ДУР или ДМУР имеет решения, которые могут быть записаны в аналитическом виде. По всей видимости, впервые для построения численных алгоритмов, активно применяемых в геофизической практике, этот прием был использован в работе Дмитриева В.И. [9] для ДУ второго порядка для решения прямой задачи электроразведки. Теперь уже стало общепризнано [46], что метод послойного пересчета является наиболее подходящим при численном решении обратной задачи при помощи метода минимизации функционала невязки в случае, когда среда является горизонтально-слоистой.

Ниже будет представлено описание метода послойного пересчета и обзор основополагающих отечественных работ по этой теме.

0.1. **Метод послойного пересчета.** Опишем метод послойного пересчета, использующий переход к ДУР, на следующем примере.

Пусть имеем следующую прямую задачу:

$$u_{zz} - \varkappa^2(z)u = 0, \qquad z \in [0, \infty), \tag{1}$$

$$u_z|_{z=0} = u_0, \qquad u \ \to \ 0 \ \ (z \to \infty), \tag{2}$$

$$[u_z]_{z=z_k} = 0, \qquad [u]_{z=z_k} = 0. \tag{3}$$

Функция $\varkappa(z)$ является кусочно постоянной функцией. Будем обозначать $\varkappa_{[k]}$ — значения функции $\varkappa(z)$ в интервале $[z_{k-1}, z_k]$, точки z_k — точки разрыва среды, $k = \overline{1, N_l}$, значение $\varkappa_{[N_l+1]}$ будет соответствовать значению функции $\varkappa(z)$ в полупространстве $[z_{N_l}, \infty)$. Здесь использовано обозначение $[u]_{z_k} = u(z_k + 0) - u(z_k - 0)$ для значения скачка функции $u(z)$ в точке z_k.

Введем функцию $s(z)$ следующим равенством:

$$u_z = su. \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1) даст нам ДУР, которому удовлетворяет функция $s(z)$

$$s' + s^2 = \varkappa^2. \tag{5}$$

Из условий склейки (3) получаем:

$$[s]_{z_k} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, если мы умеем решать ДУР (5), то значение функции на поверхности $z = 0$ из первого краевого условия находится немедленно:

$$u|_{z=0} = \frac{u_0}{s^0}, \qquad s^0 = s|_{z=0}, \tag{7}$$

а решение прямой задачи (1)–(3) дается выражением:

$$u(z) = \frac{u_0}{s^0} \exp\left\{ \int\limits_0^z s(x)dx \right\}. \tag{8}$$

Известно [41], что ДУР имеет три решения. ДУР с постоянными коэффициентами замечательно тем, что имеет решения, которые могут быть выписаны в аналитическом виде. В частности, эти решения для уравнения (5) в каждом интервале $[z_{k-1}, z_k]$, где функция $\varkappa(z)$ постоянна, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
s(z) &= \varkappa_{[k]} \frac{[s^k + \varkappa_{[k]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[k]}(z-z_k)} + [s^k - \varkappa_{[k]}]}{[s^k + \varkappa_{[k]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[k]}(z-z_k)} - [s^k - \varkappa_{[k]}]}, \\
s(z) &= \varkappa_{[k]}, \\
s(z) &= -\varkappa_{[k]},
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\mathrm{Re}\,\varkappa_{[k]} \leq 0$ и s^k — известное значение функции $s(z)$ в точке z_k. Эти решения не могут совпадать ни в одной точке $z \in [z_{k-1}, z_k]$.

Метод послойного пересчета заключается в следующем.

Положим

$$s(z) = -\varkappa_{[N_l+1]}, \qquad z \in [z_{N_l}, \infty).$$

Это значение позволит удовлетворить второе краевое условие (2).

Далее, используя условие склейки (6), получим

$$s^{N_l} \equiv s|_{z=z_{N_l}-0} = s|_{z=z_{N_l}+0}.$$

Используя s^{N_l} как начальное условие для решения ДУР (9), положив $z = z_{N_l-1}$, получим значение $s|_{z=z_{N_l-1}+0}$:

$$s|_{z=z_{N_l-1}+0} = \varkappa_{[N_l]} \frac{[s^{N_l} + \varkappa_{[N_l]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[N_l]}(z_{N_l-1}-z_{N_l})} + [s^{N_l} - \varkappa_{[N_l]}]}{[s^{N_l} + \varkappa_{[N_l]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[N_l]}(z_{N_l-1}-z_{N_l})} - [s^{N_l} - \varkappa_{[N_l]}]}.$$

Используем снова условия склейки (6), получаем значение

$$s^{N_l-1} \equiv s|_{z=z_{N_l-1}-0} = s|_{z=z_{N_l-1}+0},$$

и по формуле (9) вычисляем значение

$$s|_{z=z_{N_l-2}+0},$$

положив $z = z_{N_l-2}$.

Таким образом, вычислительный процесс для уравнения (5) с условиями склейки (6) может быть записан коротко в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
s^{k-1} &= \varkappa_{[k]} \frac{[s^k + \varkappa_{[k]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[k]}(z_{k-1}-z_k)} + [s^k - \varkappa_{[k]}]}{[s^k + \varkappa_{[k]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[k]}(z_{k-1}-z_k)} - [s^k - \varkappa_{[k]}]}, \quad k = \overline{N_l, 1}, \\
s^{N_l} &= -\varkappa_{[N_l+1]}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Нетрудно получить значение $u(z)$ из (8). Пусть $z \in [z_{m-1}, z_m]$, тогда интеграл распадается на сумму интегралов

$$\int\limits_0^z s(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} s(x)dx \ + \int\limits_{z_{m-1}}^{z} s(x)dx, \qquad (z_0 = 0).$$

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
\int s(x)dx &= \varkappa_{[j]} \int \frac{[s^j + \varkappa_{[j]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[j]}(x-z_j)} + [s^j - \varkappa_{[j]}]}{[s^j + \varkappa_{[j]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[j]}(x-z_j)} - [s^j - \varkappa_{[j]}]}\, dx \\
&= \ln\Big([s^j + \varkappa_{[j]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[j]}(x-z_j)} - [s^j - \varkappa_{[j]}] \Big) - \varkappa_{[j]} x + const.
\end{aligned}
$$

Таким образом, нетрудно получить для $u(z)$ из (8) следующее выражение:

$$u(z) = \frac{u_0}{s^0} P_j \frac{[s^j + \varkappa_{[j]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[j]}(z-z_j)} - [s^j - \varkappa_{[j]}]}{[s^j + \varkappa_{[j]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[j]}(z_{j-1}-z_j)} - [s^j - \varkappa_{[j]}]}\, \mathrm{e}^{\varkappa_{[j]}(z_{j-1}-z)}, \qquad z \in [z_{j-1}, z_j],$$

$$P_j = \prod_{m=1}^{j-1} \frac{2\varkappa_{[m]}\mathrm{e}^{\varkappa_{[m]}(z_{m-1}-z_m)}}{[s^m + \varkappa_{[m]}]\mathrm{e}^{2\varkappa_{[m]}(z_{m-1}-z_m)} - [s^m - \varkappa_{[m]}]}.$$

Заметим, что в выражениях (10) экспоненты имеют показатели, действительные части которых неположительны, следовательно, при послойном пересчете ошибка округления не будет накапливаться.

Выше изложенная методика является весьма удобной для численного решения на компьютере прямой задачи типа (1)–(3) для горизонтально-слоистой среды.

Процесс послойного пересчета (10) имеет также название метода “прогонки”, который описан в работе Гельфанда И.М. и Локуциевского О.В. [7] в приложении к разностным методам решения дифференциальных уравнений.

Идеи работы Дмитриева В.И. [9] развивались далее им и его соавторами для других задач электродинамики (см., например, [10]). Для задач теории упругости эта методика была применена в работах Аккуратова Г.В. и Дмитриева В.И. [1, 2] для получения следа решения СДУ теории упругости на поверхности $z = 0$. Авторы рассмотрели СДУ теории упругости для продольных и поперечных смещений для горизонтально-слоистой изотропной среды. В данном случае уже СДУ сводилась к ДМУР. Замечательно то, что ДМУР, у которго матрицы-коэффициенты постоянны, также имеет решения, которые могут быть выписаны в аналитическом виде.

Далее свое применение для СДУ теории упругости алгоритм послойного перечета получил в работах Фатьянова А.Г. и Михайленко Б.Г. [33–35]. В работе [33] рассуждения ведутся для получения следа решения СДУ теории упругости для изотропной среды с поглощением, в работе [34] — для трансверсально-изотропной среды, когда ось бесконечной симметрии направлена по оси Oz.

0.2. **Структура работы.** В настоящей работе представлен метод решения СДУ теории упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды. Вид анизотропии может быть любым, в том числе, среда может быть изотропной.

Метод решения базируется на принципе сведения СДУ к ДМУР, что уже обсуждалось выше, и отличается от ранее существующих аналогов из работ [1, 2, 33–35]. В этих работах используется следующая схема для получения решения:

- имеется постановка прямой задачи для СДУ теории упругости в слоистой среде;
- решения СДУ теории упругости представляется в терминах векторного и скалярного потенциалов [1, 2] или в терминах функций, играющие роль данных потенциалов [34];
- получают ДМУР, которое следует из системы уравнений для потенциалов; для каждого слоя существует аналитическое выражение для решения ДМУР, которое позволяет вести рекуррентный пересчет со слоя на слой; условия склейки, полученные для потенциалов, позволяют получить условия склейки для решениий ДМУР;

- вычислив необходимые величины, получают значения потенциалов в точке $z = 0$; используя представление решения системы упругости через потенциалы, получают значение смещений в точке $z = 0$.

В представленной работе будем придерживаться иной схемы рассуждений для получения основных выражений:

- имеется постановка прямой задачи для СДУ теории упругости в слоистой среде;
- для СДУ теории упругости получаем ДМУР; для каждого слоя существует аналитическое выражение для решения ДМУР, которое позволяют вести рекуррентный пересчет со слоя на слой;
- вычислив необходимые величины, получаем значение вектор-функции $U(\nu_1, \nu_2, z, p)$, компонентами которой являются продольные и поперечные смещения.

Как видим, в ранее опубликованных работах присутствует дополнительный шаг — представление решения СДУ теории упругости в терминах векторного и скалярного потенциалов или в терминах функций, играющих их роль.

К отличиям представленного в работе алгоритма решения СДУ теории упругости от предыдущих работ необходимо отнести то, что здесь решается прямая задача полностью, то есть даются вычислительные формулы для определения вектор-функции U в любой точке $z \in [0, \infty)$.

Итак, основные отличия предлагаемого метода решения от ранее известных работ можно сформулировать следующим образом:

- метод разработан для решения СДУ теории упругости для горизонтально-слоистой среды любого вида анизотропии; получены формулы не только для следа решения прямой задачи на поверхности $z = 0$, но и для решения в любой точке z глубины;
- отсутствует шаг перехода от СДУ теории упругости к СДУ для векторного и скалярного потенциала или к СДУ для функций, играющих роль этих потенциалов;
- склейка решений ДМУР в точках разрыва среды происходит по тривиальным формулам и не возникает никаких вычислительных проблем, если соседние слои различных видов анизотропии;
- при стремлении значений пространственных частот к нулю основные выражения не теряют смысл.

Структура работы следующая. В § 1 представлена постановка задачи, показано, как вводится вспомогательная матрица, которая является решением соответствующего ДМУР. Параграф 2 посвящен изучению свойств решения ДМУР, полученного в § 1, и связанным с ним вопросам. Данный параграф является вспомогательным для § 3, в котором собственно и решается поставленная в § 1 задача, он служит обоснованием для возможности реализации некоторых шагов построения решения. В конце работы приведены два приложения: построение решения матричного многочленного уравнения и материал о матриканте. В них мы следуем классической монографии Гантмахера Ф.Р. [6]. Данные приложения позволяют исключить необходимые отступления для пояснения и обоснования некоторых предпринимаемых действий и математических выкладок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим среду — n-слойную структуру с границами раздела x_3^k, $k = \overline{0, N_l}$, $x_3^0 = 0$; m-ый слой находится в интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, последний $N_l + 1$ (подстилающий) слой есть $[x_3^n, \infty)$. Физические свойства каждого слоя характеризуются величинами модулей упругости C_{mjkl} и плотностью ρ, то есть C_{mjkl} и ρ — кусочно-постоянные функции переменной x_3, $0 < x_3 < \infty$.

Источник вида

$$\tilde{F}(t)\nabla\delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*) \tag{11}$$

в начальный момент времени $t = 0$ возбуждает в среде упругие колебания. Источник находится в одном из слоев, то есть $x_3^* \neq x_3^k$, $k = \overline{1, N_l}$. Источник вида (11) служит моделью взрыва.

Продольные и поперечные смещения среды под действием источника (11) могут быть определены из СДУ теории упругости следующего вида:

$$\rho\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{mjkl}(x_3)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) + \tilde{F}(t)\frac{\partial}{\partial x_m}\delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*), \tag{12}$$

$$m = \overline{1,3}, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

В начальный момент времени имеют место следующие условия:

$$v_m|_{t<0} = 0, \qquad m = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Отсутствие нормальных напряжений на поверхности $x_3 = 0$ обеспечивают краевые условия

$$\sum_{k,l=1}^{3} C_{3jkl}(x_3)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\bigg|_{x_3=0} = 0, \qquad j = \overline{1,3}. \tag{14}$$

Считаем, что при переходе через точки разрыва среды поля смещений и напряжений остаются непрерывными, т.е. в любой точке (x_1, x_2, x_3^k) имеют место условия склейки

$$\left[\sum_{k,l=1}^{3} C_{3jkl}(x_3)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right]_{x_3^k} = 0, \quad [v_j]_{x_3^k} = 0, \qquad j = \overline{1,3}. \tag{15}$$

Целью настоящей работы является создание метода вычисления величин

$$u_m(\nu_1, \nu_2, x_3, p), \qquad m = \overline{1,3},$$

где функции $u_m(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ есть образ функций $v_m(x_1, x_2, x_3, t)$, $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа по временнóй переменной t, ν_1 и ν_2 — параметры преобразования Фурье по пространственным переменным x_1 и x_2 соответственно.

Проведем стандартные действия для прямой задачи (12)-(15) с целью получить задачу для функций u_m.

Учтем известные соотношения для упругих постоянных $C_{mjkl}(x_3)$

$$C_{mjkl} = C_{jmkl} = C_{mjlk} = C_{klmj}, \qquad C_{qp} = C_{mjkl},$$

$$q = (mj), \qquad p = (kl),$$

$$(11) \to 1, \qquad (22) \to 2, \qquad (33) \to 3,$$

$$(23) = (32) \to 4, \qquad (13) = (31) \to 5, \qquad (12) = (21) \to 6.$$

Тогда матрица независимых модулей упругости примет вид симметричной квадратной матрицы $C = \{C_{qp}\}$ порядка 6.

После преобразования Лапласа по переменной t, после преобразования Фурье по переменным x_1 и x_2, приходим к следующей постановке:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right) + i\check{B}\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = \check{F}(p, x_3, x_3^*), \tag{16}$$

$$\left.\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right)\right|_{x_3=0} = 0, \tag{17}$$

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right]_{x_3^k} = 0, \quad [U]_{x_3=x_3^k} = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{18}$$

К данной постановке необходимо добавить условие затухания

$$U \to 0 \qquad (x_3 \to \infty). \tag{19}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \qquad l_1 = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \rho\begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \rho\nu_1\begin{bmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho\nu_2\begin{bmatrix} c_{56} & c_{25} & c_{45} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} \end{bmatrix},$$

$$\check{B} = \rho\nu_1\begin{bmatrix} c_{15} & c_{14} & c_{13} \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho\nu_2\begin{bmatrix} c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} D &= \rho p^2 E + \rho\nu_1^2\begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} \end{bmatrix} + \rho\nu_2^2\begin{bmatrix} c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix} \\ &+ \rho\nu_1\nu_2\begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12}+c_{66} & c_{14}+c_{56} \\ c_{12}+c_{66} & 2c_{26} & c_{25}+c_{46} \\ c_{14}+c_{56} & c_{25}+c_{46} & 2c_{45} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\check{F}(p, x_3, x_3^*) = -F(p)(il_1\delta(x_3 - x_3^*) + l_2\delta'(x_3 - x_3^*)),$$

здесь $c_{qp} = C_{qp}/\rho$ — приведенные модули упругости.

Нетрудно видеть, что матрицы A, D — симметричные, $\hat{B}' = \check{B}$ (штрих обозначает операцию транспонирования) и матрица $B = \hat{B} + \check{B}$ также симметричная. Функция $F(p)$ — образ Лапласа функции $\tilde{F}(t)$.

Как уже было сказано во Введении, система дифференциальных уравнений второго порядка при помощи специальной замены функций может быть сведена к ДМУР.

Рассмотрим дифференциальную систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U\right) + i\check{B}\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = 0. \tag{20}$$

Введем квадратную матрицу X порядка 3 следующим соотношением:

$$A\frac{\partial}{\partial x_3}U + i\hat{B}U = XU. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20) и найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет матрица X. Оно может быть записано в следующей форме:

$$\frac{d}{dx_3}X + (X + i\check{B})A^{-1}(X - i\hat{B}) = D. \tag{22}$$

Следующий параграф будет посвящен исследованию ДМУР (22).

2. Дифференциальное матричное уравнение Риккати

Везде ниже будем предполагать, что $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$.

Рассмотрим ДМУР следующего вида:

$$\frac{d}{dx_3}X + (X + i\check{B})A^{-1}(X - i\hat{B}) = D, \tag{23}$$

где матрицы A, $\hat{B}$, $\check{B}$ и D определены в Главе 1 и постоянны на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$.

2.1. **Решение ДМУР.** Воспользуемся хорошо известным свойством решения ДУР: если известно какое-нибудь частное решение ДУР, то заменой функций уравнение Риккати может быть сведено к дифференциальному уравнению Бернулли [41].

Пусть известно частное решение ДМУР (23). Обозначим его за R^m. Индекс m подчеркивает, что R^m — некоторое частое решение ДМУР (23) на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, на котором матрицы A, $\hat{B}$, $\check{B}$ и D постоянны.

Положим $X = Z + R^m$. Тогда уравнение для матрицы Z имеет вид дифференциального матричного уравнения Бернулли (ДМУБ) следующего вида:

$$\frac{d}{dx_3}Z + ZA^{-1}Z + \check{C}Z + Z\hat{C} = 0, \tag{24}$$

где введены матрицы

$$\hat{C} = A^{-1}(R^m - i\hat{B}), \qquad \check{C} = (R^m + i\check{B})A^{-1}. \tag{25}$$

Строим решение ДМУБ следующим образом. Введем матрицу $L = Z^{-1}$. Учтем, что

$$\frac{d}{dx_3}\left(L^{-1}\right) = -L^{-1}\left(\frac{d}{dx_3}L\right)L^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что матрица L удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3}L = A^{-1} + L\check{C} + \hat{C}L, \tag{26}$$

решение которого, если матрицы A, $\hat{C}$, $\check{C}$ постоянные, дается формулой

$$L = \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)}\left[L^m + \int\limits_{x_3^m}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s - x_3^m)}A^{-1}\mathrm{e}^{-\check{C}(s - x_3^m)}\,ds\right]\mathrm{e}^{\check{C}(x_3 - x_3^m)}, \tag{27}$$

где L^m — известное значение матрицы L в точке x_3^m и $L^m = (X^m - R^m)^{-1}$.

Формула (27) получена формально, поскольку необходимо иметь основания для введения матрицы L обратной к матрице Z.

Легко видеть, если матрица Z в точке x_3^m имеет отличный от нуля детерминант, то матрица L по формуле (27) определена и имеет ненулевой детерминант по крайней мере для некоторых $x_3 < x_3^m$.

Действительно, если детерминант L^m отличен от нуля, значит собственные числа $\lambda(L^m)$ матрицы L^m отличны от нуля; для некоторых $x_3 < x_3^m$ значение элементов второй матрицы в квадратных скобках выражения (27) малы; в силу теории возмущений [48] собственные значения матрицы, являющейся суммой матриц, не изменятся так, чтобы какое-либо из них стало нулем. Таким образом, для некоторых $x_3 < x_3^m$ матрица $L(x_3)$ определена и имеет отличный от нуля детерминант, следовательно, матрица $Z(x_3)$ также определена.

Предположим, что решение ДМУР Z существует на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$. Из (27) следует

$$Z = \mathrm{e}^{-\check{C}(x_3 - x_3^m)} \left[E + Z^m \int\limits_{x_3^m}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s - x_3^m)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s - x_3^m)} \, ds \right]^{-1} Z^m \, \mathrm{e}^{-\hat{C}(x_3 - x_3^m)}.$$

Видно, если детерминант Z^m отличен от нуля, то и детерминант $Z(x_3)$ также отличен от нуля, и наоборот, если детерминант Z^m равен нулю, то и детерминант $Z(x_3)$ также равен нулю.

Таким образом, представим решение ДМУР (23) в следующем виде:

$$X(x_3) = R^m + L^{-1}(x_3), \qquad x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m], \tag{28}$$

$$\begin{aligned} L(x_3) &= \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)} (X^m - R^m)^{-1} \mathrm{e}^{\check{C}(x_3 - x_3^m)} \\ &+ \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3 - x_3^m)} \int\limits_{x_3^m}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s - x_3^m)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s - x_3^m)} \, ds \, \mathrm{e}^{\check{C}(x_3 - x_3^m)}. \end{aligned} \tag{29}$$

2.2. **Свойство частного решения ДМУР.** Как было показано выше, вопрос нахождения общего решения ДМУР (23), сводится к нахождению частного решения ДМУР.

Рассмотрим матричное уравнение Риккати (МУР) следующего вида:

$$(R + i\check{B}) A^{-1} (R - i\hat{B}) = D \tag{30}$$

Его решение есть постоянная матрица R, и, как нетрудно видеть, оно является частным решением ДМУР (23).

Утверждение 2.1. *Пусть решение дифференциального матричного уравнения (23) определено на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ и хотя бы в одной точке $x_3^0 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$ совпадает с решением матричного уравнения (30), тогда оно равно ему на всем интервале.*

Доказательство. По аналогии с постоянными матрицами $\hat{C}$ и $\check{C}$ (см. (25)) введем матрицы $\hat{S}$ и $\check{S}$ следующими соотношениями:

$$\hat{S} = A^{-1}(X - i\hat{B}), \qquad \check{S} = (X + i\check{B}) A^{-1},$$

где X — решение ДМУР (23).

Нетрудно видеть, что из (23) следуют равенства:

$$A\frac{d}{dx_3}\hat{S}+\check{S}A\hat{S}=D,\quad \frac{d}{dx_3}\check{S}A+\check{S}A\hat{S}=D,\quad \frac{d}{dx_3}X+\check{S}A\hat{S}=D. \tag{31}$$

Умножим первое уравнение (31) слева на $\check{S}$, а второе уравнение (31) справа на $\hat{S}$ и сложим:

$$\frac{d}{dx_3}(\check{S}A\hat{S}-D)+\check{S}(\check{S}A\hat{S}-D)+(\check{S}A\hat{S}-D)\hat{S}=0. \tag{32}$$

С помощью матрицантов (см. Приложение B) решение матричного уравнения (32) можно представить в следующем виде:

$$\check{S}A\hat{S}-D=\hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^0}[-\check{S}](\check{S}A\hat{S}-D)|_{x_3=x_3^0}\ \check{\Omega}^{x_3}_{x_3^0}[-\hat{S}]. \tag{33}$$

Пусть $X=R$ в точке x_3^0. Тогда из (33) следует

$$\check{S}A\hat{S}-D=\hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^0}[-\check{S}](\check{C}A\hat{C}-D)\,\check{\Omega}^{x_3}_{x_3^0}[-\hat{S}]=0. \tag{34}$$

Из третьего уравнения (31) и равенства (34) следует, что решение матричного уравнения (23) X удовлетворяет задаче:

$$\frac{d}{dx_3}X=0,\qquad X|_{x_3=x_3^0}=R,$$

что и означает, что $X=R$ для всех $x_3\in[x_3^{m-1},x_3^m]$. □

2.3. **Свойства матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$.** Чтобы найти решение ДМУР (23) необходимо найти решение МУР (30).

Нетрудно видеть, что для матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$, введенных соотношениями (25), уравнение (30) примет вид

$$\check{C}A\hat{C}=D. \tag{35}$$

Матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ связаны соотношениями

$$R^m=A\hat{C}+i\hat{B},\qquad R^m=\check{C}A-i\check{B},\qquad \check{C}=A\hat{C}A^{-1}+iBA^{-1}. \tag{36}$$

Заменяя в (35) матрицу $\check{C}$ ее выражением через матрицу $\hat{C}$ из (36), приходим к следующему уравнению:

$$A\hat{C}^2+iB\hat{C}-D=0. \tag{37}$$

Привлекая материал Приложения A, имеем, во-первых, собственные числа матриц $\hat{C}$, удовлетворяющих уравнению (37), должны удовлетворять уравнению

$$\det[A\lambda^2+iB\lambda-D]=0, \tag{38}$$

во-вторых, способ построения матрицы $\hat{C}$.

Нетрудно видеть, что уравнение (38) есть ни что иное, как характеристическое уравнение для системы (16), которое является алгебраическим уравнением шестого порядка.

Для матрицы $\check{C}$ имеем аналогичный результат.

Заменяя в (35) матрицу $\hat{C}$ ее выражением через матрицу $\check{C}$ (36), приходим к следующему матричному уравнению:

$$\check{C}^2A-\check{C}(iB)-D=0. \tag{39}$$

Также из материала Приложения А имеем, во-первых, собственные числа матриц, удовлетворяющих уравнению (39) должны удовлетворять уравнению

$$\det\left[A\xi^2 - iB\xi - D\right] = 0, \tag{40}$$

во-вторых, способ построения матрицы $\check{C}$.

Нетрудно видеть, что решения ξ_j уравнения (40) связаны с решениями уравнения (38) простым соотношением:

$$\xi_j = -\lambda_j, \qquad j = \overline{1,6}. \tag{41}$$

2.4. **Построение матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$.** В Приложении А дается путь, как строить решения матричного уравнения (37).

Пусть имеем все корни λ_j $(j = \overline{1,6})$ характеристического уравнения (38).

Выберем из λ_j $(j = \overline{1,6})$ тройку значений, составим матрицу $\hat{J}$, имеющую жорданову форму. Матрицу $\hat{C}$ будем искать в виде $T_1\hat{J}T_1^{-1}$.

Пусть, например, для корней λ_j $(j = \overline{1,3})$ выполняется условие

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_3, \qquad \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

В этом случае матрица $\hat{J}$ имеет диагональный вид.

Пусть $T_1 = \{t_{mj}\}$, для компонент матрицы T_1 будем иметь следующую однородную систему:

$$AT_1\hat{J}^2 + iBT_1\hat{J} - DT_1 = 0, \tag{42}$$

откуда получим

$$A\begin{bmatrix} t_{11}\lambda_1^2 & t_{12}\lambda_2^2 & t_{13}\lambda_3^2 \\ t_{21}\lambda_1^2 & t_{22}\lambda_2^2 & t_{23}\lambda_3^2 \\ t_{31}\lambda_1^2 & t_{32}\lambda_2^2 & t_{33}\lambda_3^2 \end{bmatrix} + iB\begin{bmatrix} t_{11}\lambda_1 & t_{12}\lambda_2 & t_{13}\lambda_3 \\ t_{21}\lambda_1 & t_{22}\lambda_2 & t_{23}\lambda_3 \\ t_{31}\lambda_1 & t_{32}\lambda_2 & t_{33}\lambda_3 \end{bmatrix} - D\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Нетрудно видеть, что для каждого столбца матрицы T_1 имеет место однородная система уравнений:

$$\left[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D\right]\begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ t_{3j} \end{bmatrix} = 0, \qquad j = \overline{1,3}. \tag{43}$$

Поскольку λ_j $(j = \overline{1,3})$ являются корнями характеристического уравнения СДУ теории упругости, то

$$\det\left[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D\right] = 0,$$

и поскольку все λ_j различны, то

$$\operatorname{rank}\left[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D\right] = 2,$$

и, следовательно, существует нетривиальное решение системы (43), и можем построить матрицу T_1, столбцами которой являются решения системы (43) для различных λ_j $(j = \overline{1,3})$.

Пусть теперь, например, реализуется следующий случай:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_3.$$

Существует две возможности

$$1) \quad \operatorname{rank}\left[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D\right] = 1,$$

$$2) \quad \operatorname{rank}\left[A\lambda_j^2 + iB\lambda_j - D\right] = 2,$$

Если реализуется первая возможность, то матрица $\hat{J}$ выбирается в виде

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

может быть получена однородная система, аналогичная системе (43). Отличие будет только в том, что, поскольку ранг соответствующей матрицы равен единице, то для собственного числа λ_1 строятся два линейно независимых собственных вектора.

Когда же реализуется вторая возможность, матрица $\hat{J}$ выбирается в виде

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

для которой строим соответствующую систему аналогичную системе (43).

Для второго вектор-столбца матрицы T_1 система будет отличной от системы (43). Она будет иметь вид

$$[A\lambda_1^2 + iB\lambda_1 - D] \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{bmatrix} + [2A\lambda_1 + iB] \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = 0,$$

откуда второй вектор-столбец для матрицы T_1 также будет найден.

Таким образом, описано, как получить матрицу T_1, следовательно, можем построить T_1^{-1}, то есть получим $\hat{C} = T_1 \hat{J} T_1^{-1}$. Заметим, что данная форма записи матрицы $\hat{C}$ удобна, поскольку нам при численном решении ДМУР необходимо иметь выражение для матричной экспоненты $\exp\{\hat{C}x_3\} = T_1 \exp\{\hat{J}x_3\} T_1^{-1}$.

Матрица $\check{C}$ может быть найдена из последнего соотношения в (36), но возможен и другой путь.

Способ построения матрицы $\check{C}$ может совпадать со способом построения матрицы $\hat{C}$.

Матрица $\check{C}$ будет искаться в виде $T_2 \check{J} T_2^{-1}$. Для матрицы T_2^{-1} будем иметь однородную систему

$$\check{J}^2 T_2^{-1} A - \check{J} T_2^{-1}(iB) - T_2^{-1} D = 0. \tag{44}$$

Введем обозначения

$$T_3 = (T_2^{-1})', \qquad \tilde{J} = \check{J}'.$$

Применим операцию транспонирования к матричному уравнению (44), после чего получим

$$AT_3\tilde{J}^2 - iBT_3\tilde{J} - DT_3 = 0, \tag{45}$$

которое имеет тот же вид, что и уравнение (42), и, следовательно, решается аналогично. Если $\operatorname{rank}[A\xi_j^2 - iB\xi_j - D] = 2$ и в качестве известной матрицы $\check{J}$ должна быть взята матрица

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для построенных матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$ решение ДМУР может быть представлено в виде:

$$
\begin{aligned}
(46)\qquad X &= X^m_{(+)} + T_2 L^{-1} T_1^{-1},\\
L &= \mathrm{e}^{\hat{J}(x_3 - x_3^m)} \left(G + \int\limits_{x_3^m}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{J}(s - x_3^m)} V \mathrm{e}^{-\check{J}(s - x_3^m)}\, ds \right) \mathrm{e}^{\check{J}(x_3 - x_3^m)},\\
G &= T_1^{-1}(X^m - X^m_{(+)})^{-1} T_2, \qquad V = T_1^{-1} A^{-1} T_2.
\end{aligned}
$$

2.5. **Свойства собственных чисел матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$.** Матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ связаны друг с другом соотношением (35) или третьим соотношением (36). Это дает основания получить некоторую информацию о связи их собственных значений.

Утверждение 2.2. *Умножение самосопряженной матрицы на симметричную положительно определенную матрицу слева или справа не изменяет количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений самосопряженной матрицы.*

Доказательство. Пусть Ξ — самосопряженная, а A — симметричная положительно определенная матрицы. Рассмотрим, например, их произведение $A\Xi$. Имеем

$$\det[A\Xi - \lambda E] = \det A \cdot \det[\Xi - \lambda A^{-1}], \tag{47}$$

то есть совпадают характеристические уравнения при поиске собственных чисел матрицы $A\Xi$ и обобщенной задачи собственных значений

$$\Xi y = \lambda A^{-1} y. \tag{48}$$

По условию матрица A^{-1} является симметричной и положительно определенной. Рассмотрим уравнение (48). Известно, что матрица A^{-1} может быть представлена как произведение $K'K$, где K — невырожденная матрица. Отсюда имеем уравнение

$$K'\Xi K z = \lambda z, \tag{49}$$

где

$$z = Ky. \tag{50}$$

То есть, собственные значения задачи (48) совпадают с собственными значениями задачи (49), а собственные вектора этих задач связаны соотношением (50). Среди собственных значений матрицы $K'\Xi K$ в силу закона инерции Сильвестра (см. [47, Гл. 6] или [6, Гл. X(§ 9)]) количество положительных, отрицательных и нулевых собственных значений таково, сколько положительных, отрицательных и нулевых собственных значений имеет матрица Ξ. В силу равенства (47) получаем доказательство утверждения. □

Утверждение 2.3. *Количество отрицательных и положительных значений действительных частей собственных чисел матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$ совпадает.*

Доказательство. Из (36) имеем $\check{C}A = \hat{C}A + iB$. Пусть

$$\hat{\Xi} = \frac{1}{2}\left(\hat{C} + \hat{C}^*\right), \qquad \check{\Xi} = \frac{1}{2}\left(\check{C} + \check{C}^*\right).$$

Очевидно, что

$$\check{\Xi}A = A\hat{\Xi}. \tag{51}$$

Матрицы $\check{\Xi}$ и $\hat{\Xi}$ самосопряженные. В силу равенства (51) и Утверждения 2.2 количество положительных и отрицательных собственных чисел матрицы $\hat{\Xi}$ совпадает с количеством положительных и отрицательных собственных чисел матрицы $\check{\Xi}$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_j(\check{C})$ и $\operatorname{Re}\lambda_j(\hat{C})$ являются собственными числами матриц $\check{\Xi}$ и $\hat{\Xi}$ соответственно, то получаем доказательство утверждения. □

В частности, если у матрицы $\hat{C}$ все собственные числа имеют положительные действительные части, то матрица $\check{C}$ имеет все собственные числа с положительными действительными частями.

2.6. **Свойства матрицанта.** Пусть $\hat{S} = A^{-1}(X(x_3) - i\hat{B})$, где X — решение ДМУР (23).

В этом параграфе будет указана связь матрицанта $\hat{\Omega}^{x_3}_{x^{m-1}}[\hat{S}]$ (см. определение и свойства матрицанта в Приложении В), который на интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ есть решение следующей дифференциальной матричной задачи:

$$\frac{d}{dx_3}\hat{\Omega} - A^{-1}(X(x_3) - i\hat{B})\,\hat{\Omega} = 0, \qquad \hat{\Omega}|_{x_3 = x_3^{m-1}} = E, \tag{52}$$

с матрицей $Z(x_3)$ или $L(x_3)$ (см. (24) или (26)).

В п. 2.1 положили $X = Z + R^m$. Уравнение для матрицы Z имеет вид

$$\frac{d}{dx_3}Z + ZA^{-1}Z + \check{C}Z + Z\hat{C} = 0. \tag{53}$$

Перепишем уравнение (52) в терминах функции Z:

$$\frac{d}{dx_3}\hat{\Omega} - A^{-1}Z\,\hat{\Omega} - \hat{C}\,\hat{\Omega} = 0. \tag{54}$$

Умножим равенство (54) слева на матрицу Z. Выразим произведение $ZA^{-1}Z$ из равенства (53) и подставим в уравнение (54). Получаем, что произведение матриц $Z\hat{\Omega}$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{d}{dx_3}(Z\hat{\Omega}) + \check{C}(Z\hat{\Omega}) = 0, \qquad (Z\hat{\Omega})|_{x_3 = x_3^{m-1}} = Z|_{x_3 = x_3^{m-1}+0}. \tag{55}$$

Из (55) получаем:

$$Z(x_3)\;\hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{m-1}}[\hat{S}] = \mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{m-1} - x_3)}Z|_{x_3 = x_3^{m-1}+0} \tag{56}$$

или

$$\hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{m-1}}[\hat{S}] = L(x_3)\;\mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{m-1} - x_3)}Z|_{x_3 = x_3^{m-1}+0}. \tag{57}$$

Заметим, что для матрицанта $\check{\Omega}^{x_3}_{x_3^{m-1}}[\check{S}]$ могут быть получены аналогичные формулы.

3. Решение прямой задачи

В параграфе 2 изложен материал, которого достаточно для того чтобы получить выражения для вычисления вектор-функции $U(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ — решения прямой задачи (16)-(19).

Предполагаем, что $x_3^* \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$.

3.1. **Выражения для решения прямой задачи.** Решение прямой задачи (16)-(19) U удобно представить в виде

$$U = U_1 + U_2, \qquad U_2 = \begin{cases} U_3, & x_3^* < x_3 < \infty, \\ U_4, & 0 < x_3 < x_3^*, \end{cases} \tag{58}$$

где U_1 — непрерывная и U_2 — разрывная части решения.

Будем требовать, чтобы вектор-функции U_j, $j = 1, 3, 4$, удовлетворяли следующим условиям:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_j + i\hat{B}U_j\right) + i\check{B}\frac{\partial}{\partial x_3}U_j - DU_j = 0, \quad j = 1, 3, 4 \\ \left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U_j + i\hat{B}U_j\right]_{x_3^k} = 0, \quad [U_j]_{x_3^k} = 0, \qquad j = 1, 3, 4 \\ U_j \to 0 \qquad (x_3 \to \infty), \qquad j = 1, 3. \end{gathered} \tag{59}$$

Естественно, что соотношения для каждой вектор-функции U_j имеют место в своих областях изменения переменной x_3 (см. (58)).

Подставляя вектор-функцию U в виде (58) в (59), получим следующее соотношение в точке x_3^*:

$$\begin{gathered} U_3|_{x_3 = x_3^*+0} - U_4|_{x_3 = x_3^*-0} = -F(p)A^{-1}l_2, \\ \left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_3 + i\hat{B}U_3\right)\Big|_{x_3 = x_3^*+0} - \left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_4 + i\hat{B}U_4\right)\Big|_{x_3 = x_3^*-0} \\ = iF(p)(\check{B}A^{-1}l_2 - l_1). \end{gathered} \tag{60}$$

Краевое условие (17) примет вид

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_1 + i\hat{B}U_1\right)\Big|_{x_3=0} + \left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U_4 + i\hat{B}U_4\right)\Big|_{x_3=0} = 0. \tag{61}$$

Нетрудно видеть, что вектор-функции U_1 и U_2 определены неоднозначно. Данный факт будет нами использован ниже.

Для вектор-функций U_j $(j = 1, 3, 4)$ введем матрицы X, Y и S при помощи следующих выражений:

$$\begin{aligned} A\frac{\partial}{\partial x_3}U_1 + i\hat{B}U_1 &= SU_1, & x_3 &\in [0, \infty), \\ A\frac{\partial}{\partial x_3}U_3 + i\hat{B}U_3 &= XU_3, & x_3 &\in [x_3^*, \infty), \\ A\frac{\partial}{\partial x_3}U_4 + i\hat{B}U_4 &= YU_4. & x_3 &\in [0, x_3^*], \end{aligned} \tag{62}$$

которые будут решениями следующих ДМУР:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx_3}S + (S + i\check{B})A^{-1}(S - i\hat{B}) = D, && x_3 \in [0, \infty), \\
(63)\qquad &\frac{d}{dx_3}X + (X + i\check{B})A^{-1}(X - i\hat{B}) = D, && x_3 \in [x_3^*, \infty), \\
&\frac{d}{dx_3}Y + (Y + i\check{B})A^{-1}(Y - i\hat{B}) = D, && x_3 \in [0, x_3^*].
\end{aligned}
$$

Условия склейки (18) и определения (62) дают условия склейки для матриц S, X и Y в точках разрыва среды x_3^k в следующем виде:

$$
(64)\qquad [S]_{x_3^k} = 0, \qquad [X]_{x_3^k} = 0, \qquad [Y]_{x_3^k} = 0,
$$

для каждой в своей области определения.

В дальнейшем для краткости использованы следующие обозначения:

$$
\begin{array}{lll}
X^m = X|_{x_3 = x_3^m - 0}, & X^* = X|_{x_3 = x_3^* + 0}, & \\
S^m = S|_{x_3 = x_3^m - 0}, & S^0 = S|_{x_3 = 0}, & S^* = S|_{x_3 = x_3^*}, \\
Y^m = Y|_{x_3 = x_3^m - 0}, & Y^0 = Y|_{x_3 = 0}, & Y^* = Y|_{x_3 = x_3^* - 0}, \\
U_j^m = U_j|_{x_3 = x_3^m}, & j = 1, 3, 4, & \\
U_j^0 = U_j|_{x_3 = 0}, & j = 1, 4, & \\
U_1^* = U_1|_{x_3 = x_3^*}, & U_3^* = U_3|_{x_3 = x_3^* + 0}, & U_4^* = U_4|_{x_3 = x_3^* - 0}.
\end{array}
$$

Из соотношений (60) в точке x_3^* получим

$$
(65)\qquad U_3^* - U_4^* = l_3, \qquad X^* U_3^* - Y^* U_4^* = l_4,
$$

$$
l_3 = -F(p)A^{-1}l_1, \qquad l_4 = iF(p)(\check{B}A^{-1}l_1 - l_2).
$$

Из соотношений (65) следует

$$
(66)\qquad U_4^* = (X^* - Y^*)^{-1} l_5, \qquad l_5 = X^* l_3 - l_4.
$$

В силу неоднозначности представления вектор-функции U, о котором упоминалось выше, можем считать, что матрица Y^* известна. О том, какой она будет иметь конкретный вид, скажем ниже. Отметим лишь то, что матрица Y^* должна быть выбрана так, чтобы в выражении (66) матрица $(X^* - Y^*)^{-1}$ существовала.

Нетрудно видеть, что из (62) следует

$$
(67)\qquad U_4^* = \hat{\Omega}_0^{x_3^*}[A^{-1}(Y - i\hat{B})]\, U_4^0.
$$

Матрица $\hat{\Omega}_0^{x_3^*}[\Phi]$ является матрицантом (см. Приложение B).

Из краевого условия (61) имеем

$$
(68)\qquad U_1^0 = -(S^0)^{-1} Y^0 U_4^0.
$$

Откуда с учетом (67) получаем

$$
\begin{aligned}
(69)\qquad U^0 &= U_1^0 + U_4^0 \\
&= -(E - (S^0)^{-1}Y^0)\left(\hat{\Omega}_0^{x_3^*}[A^{-1}(Y - i\hat{B})]\right)^{-1}(X^* - Y^*)^{-1} l_5.
\end{aligned}
$$

Таким образом, значения элементов матриц S, Y, X в точках $x_3 = 0$ и $x_3 = x_3^*$, значения элементов матрицы Y на отрезке $[0, x_3^*]$ полностью определяют значение вектор-функции U в точке $x_3 = 0$.

Нетрудно видеть, что имеется следующая цепочка равенств:

$$\begin{array}{rcl}
U_4^1 & = & \hat{\Omega}_0^{x_3^1}[\hat{Y}]\; U_4^0, \\
U_4^2 & = & \hat{\Omega}_{x_3^1}^{x_3^2}[\hat{Y}]\; U_4^1 \\
U_4^3 & = & \hat{\Omega}_{x_3^2}^{x_3^3}[\hat{Y}]\; U_4^2 \\
\dots & & \dots \\
U_4^1|_{x_3^{m-1}+0} & = & \hat{\Omega}_{x_3^{m-2}}^{x_3^{m-1}}[\hat{Y}]\; U_4^{m-2} \\
U_4^* & = & \hat{\Omega}_{x_3^{m-1}}^{x_3^*}[\hat{Y}]\; U_4^{m-1},
\end{array}$$

где $\hat{Y} = A^{-1}(Y - i\hat{B})$.

В силу непрерывности вектор-функции U_4 в точках разрыва среды x_3^k приходим к следующему равенству:

$$U_4^* = \hat{\Omega}_{x_3^{m-1}}^{x_3^*}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{m-2}}^{x_3^{m-1}}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{m-3}}^{x_3^{m-2}}[\hat{Y}]\; ...\; \hat{\Omega}_{x_3^2}^{x_3^3}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_{x_3^1}^{x_3^2}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_0^{x_3^1}[\hat{Y}]\; U_4^0, \tag{70}$$

то есть матрицант $\hat{\Omega}_0^{x_3^*}[\hat{Y}]$ из формулы (69) представляется в виде произведения матрицантов вида $\hat{\Omega}_{x_3^{j-1}}^{x_3^j}[\hat{Y}]$.

Для вычисления вектор-функции $U(\nu_1, \nu_2, x_3, p)$ в любой точке x_3 рассмотрим два случая.

Первый случай: $x_3 < x_3^*$. Пусть $x_3 \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$, где $1 < j < m$. Тогда решение СДУ теории упругости (16)-(19) в точке x_3 представляется в виде:

$$\begin{array}{rcl}
U & = & \hat{\Omega}_{x_3^{j-1}}^{x_3}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-2}}^{x_3^{j-1}}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-3}}^{x_3^{j-2}}[\hat{Y}]\; ...\; \hat{\Omega}_{x_3^1}^{x_3^2}[\hat{Y}]\; \hat{\Omega}_0^{x_3^1}[\hat{Y}]\; U_4^0 \\
& + & \hat{\Omega}_{x_3^{j-1}}^{x_3}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-2}}^{x_3^{j-1}}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-3}}^{x_3^{j-2}}[\hat{S}]\; ...\; \hat{\Omega}_{x_3^1}^{x_3^2}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_0^{x_3^1}[\hat{S}]\; U_1^0.
\end{array} \tag{71}$$

Второй случай: $x_3 > x_3^*$. Пусть $x_3 \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$, где $j > m$.

Тогда решение СДУ теории упругости (16)-(19) в точке x_3 представляется в виде:

$$\begin{array}{rcl}
U & = & \hat{\Omega}_{x_3^{j-1}}^{x_3}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-2}}^{x_3^{j-1}}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-3}}^{x_3^{j-2}}[\hat{S}]\; ...\; \hat{\Omega}_{x_3^m}^{x_3^{m+1}}[\hat{S}]\; \hat{\Omega}_{x_3^*}^{x_3^m}[\hat{S}]\; U_1^* \\
& + & \hat{\Omega}_{x_3^{j-1}}^{x_3}[\hat{X}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-2}}^{x_3^{j-1}}[\hat{X}]\; \hat{\Omega}_{x_3^{j-3}}^{x_3^{j-2}}[\hat{X}]\; ...\; \hat{\Omega}_{x_3^m}^{x_3^{m+1}}[\hat{X}]\; \hat{\Omega}_{x_3^*}^{x_3^m}[\hat{X}]\; U_3^*.
\end{array} \tag{72}$$

Таким образом, решение прямой задачи (16)-(19) в любой точке $x_3 \in [0, \infty)$ будет определено.

3.2. **Выбор частного решения ДМУР.** Для того, чтобы воспользоваться представлениями предыдущего параграфа для решения прямой задачи, нам необходимо определиться с тем, как выбирать частное решение ДМУР.

Известно (см., например, [37, 45]), что в анизотропной среде в общем случае распространяется три волны — две квази-поперечных и одна квази-продольная.

В среде волны могут распространяться в двух направлениях и делятся на уходящие и приходящие. Известно, что скорость квази-продольной волны всегда выше скорости квази-поперечных волн. Скорости квази-продольных волн могут быть очень близки и совпадать. В этом случае в среде распространяется продольная и поперечная волны.

Математически эти физические факты должны выражаться в том, что решение СДУ упругости в каждом слое будет представлено в виде двух матричных экспонент. Шесть корней характеристического уравнения системы (16) распадутся на две группы: три корня λ_j $(j = \overline{1,3})$ будут иметь неотрицательную действительную часть, а три λ_j $(j = \overline{4,6})$ — неположительную. Это соответствует уходящим и приходящим волнам. Слияние квази-поперечных волн приведет к тому, что два корня λ_1 и λ_2 будут совпадать, а корень λ_3 будет всегда отличен от корней λ_1 и λ_2. Близости скоростей распространения квази-поперечных волн будет соответствовать близость корней λ_1 и λ_2. Для того, чтобы исключить случай, когда действительная часть корня характеристического уравнения будет равна нулю, необходимо использовать $\alpha > 0$ (напомним, $p = -\alpha + i\omega$).

Факт слияния двух волн можно наблюдать на примере изотропной среды. В данной среде распространяется два типа волн: продольная и поперечная. Скорость продольной волны всегда больше скорости поперечной волны[1]. Характеристическое уравнение (38) для изотропной среды имеет вид

$$(\lambda^2 - r_s^2)^2(\lambda^2 - r_p^2) = 0, \tag{73}$$

$$r_p^2 = \frac{p^2}{v_p^2} + \nu^2, \qquad r_s^2 = \frac{p^2}{v_s^2} + \nu^2, \qquad \nu^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2.$$

Корни уравнения (73): пара корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_s^2 + \nu^2}$ кратности два и пара простых корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_p^2 + \nu^2}$. Если $\alpha = 0$, то $p^2 = -\omega^2$, и, следовательно, при некоторых значениях скоростей, круговой частоты ω и пространственной частоты ν один или несколько корней могут быть чисто мнимыми. Если же $\alpha > 0$, то действительная часть корней всегда ненулевая.

Итак, считаем, что корни характеристического уравнения (38) известны и делятся на две группы: первая группа корней λ_j $(j = \overline{1,3})$ имеет действительные части положительные, вторая группа корней λ_j $(j = \overline{4,6})$ имеет действительные части отрицательные. Так же считаем, что λ_1 (λ_4) и λ_2 (λ_5) могут быть различными или совпадать, корень λ_3 (λ_6) никогда не совпадает с λ_1 и λ_2 (λ_4 и λ_5).

В п. 2.4 показано как строить матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$, собственными числами которых являются корни характеристического уравнения (38) λ_j и $\xi_j = -\lambda_j$ $(j = \overline{1,6})$ соответственно. Очевидно, что построив хотя бы одну из матриц, можно получить частное решение ДМУР (см. определения (25)).

Как следует из Приложения А и п. 2.4 можем выбрать три корня характеристического уравнения (38) и построить соответствующую матрицу $\hat{C}$ или $\check{C}$. Из возможных различных троек чисел λ_k, $k = \overline{1,6}$, выберем только две. Первая тройка будет содержать только λ_k с отрицательными действительными частями, вторая тройка будет содержать только те λ_k, которые имеют только положительные действительные части.

[1] $v_p > \sqrt{2}v_s$, для многих геофизических сред $v_p \approx \sqrt{3}v_s$

Почему мы останавливаем наш выбор только на этих тройках? Если некоторая вектор-функция $\tilde{U}$ для $x_3 > 0$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\tilde{U} = \hat{C}\tilde{U},$$

и если постоянная матрица $\hat{C}$ имеет все собственные числа с положительными действительными частями, то

$$\lim_{x_3^m \to \infty} \tilde{U} = \infty,$$

а, если постоянная матрица $\hat{C}$ имеет все собственные числа с отрицательными действительными частями, то

$$\lim_{x_3^m \to \infty} \tilde{U} = 0.$$

Обозначим

$$R^j_{(+)} = A\hat{C} - i\hat{B}, \qquad R^j_{(-)} = A\hat{C} - i\hat{B}, \tag{74}$$

где матрица $\hat{C}$ строится с использованием набора собственных чисел с положительными и отрицательными действительными частями соответственно, индекс j означает, что значения матриц A, D, $\hat{C}$, $\check{C}$ берутся на интервале $[x_3^{j-1}, x_3^j]$.

Таким образом, если в точке $x_3^{N_l} + 0$ положить

$$S = R^{N_l+1}_{(-)}, \qquad X = R^{N_l+1}_{(-)}, \tag{75}$$

то в подстилающем слое $[x_3^{N_l}, \infty)$ решение первого и второго ДМУР (63) будут постоянным в силу Утверждения 2.1, соответствующие матриоанты будут равны матричным экспонентам и вектор-функции U_1 и U_3 будут представляться в следующем виде:

$$U_n(x_3) = \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3 - x_3^{N_l})} U_n^{N_l}, \qquad n = 1, 3.$$

Поскольку собственные числа матриц имеют отрицательные действительные части и $x_3 > x_3^{N_l}$, то вектор-функции U_1 и U_3 будут затухать на бесконечности, что отвечает краевому условию (19) и краевым условиям в соотношениях (59).

В силу условий склейки (64) известны краевые условия S^{N_l} и X^{N_l} для решения ДМУР на интервале $[x_3^{N_l-1}, x_3^{N_l}]$.

В качестве частного решения ДМУР на интервале $[x_3^{N_l-1}, x_3^{N_l}]$ для S и X выберем $R^{N_l}_{(+)}$.

Используя формулу (28) для решения ДМУР на этом интервале, знаем значение матриц S и X в точке $x_3^{N_l-1} + 0$. Используя условия склейки (64), получаем краевые условия S^{N_l-1} и X^{N_l-1} для решения ДМУР на интервале $[x_3^{N_l-2}, x_3^{N_l-1}]$, и так далее, то есть переходим со слоя на слой.

Очевидно, что

$$S(x_3) = X(x_3), \qquad \forall x_3 \in [x_3^*, \infty). \tag{76}$$

Как уже упоминалось в п. 3.1, считали, что Y^* — известная матрица. Определим ее следующим образом:

$$Y^* = R^m_{(+)}, \tag{77}$$

где m — номер слоя, в котором лежит точка x_3^*.

В силу Утверждения 2.1

$$Y(x_3) = R^m_{(+)}, \qquad \forall x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^*]. \tag{78}$$

Заметим, что в силу Утверждения 2.1 где бы ни лежала точка x_3^* в интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, матрица X^* не совпадает с матрицей Y^*. В противном случае X является постоянной на интервале $[x_3^*, x_3^m]$.

3.3. **Окончательные выражения для решения прямой задачи.** После определений в п. 3.2 можем конкретизировать и упростить некоторые выражения п. 3.1 и главы 2.

В силу условий склейки (64) процесс рекуррентного пересчета S^j со слоя на слой можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
S^{j-1} &= R^j_{(+)} + (L^{j-1})^{-1}, \qquad j = \overline{N_l, 1} \\
L^{j-1} &= \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3^{j-1}-x_3^j)}(S^j - R^j_{(+)})^{-1}\mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{j-1}-x_3^j)} \\
&+ \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3^{j-1}-x_3^j)} \int\limits_{x_3^j}^{x_3^{j-1}} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s-x_3^j)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s-x_3^j)}\, ds\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{j-1}-x_3^j)}, \\
S^{N_l} &= R^{N_l+1}_{(-)}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Необходимо помнить, что в слое $[x_3^{m-1}, x_3^m]$, в котором лежит точка x_3^* необходимо вычислить значение S^*. В силу свойства (76) $X^* = S^*$.

Выражение для следа вектор-функции U (69) может быть приведено к следующему виду:

$$U^0 = -(E - (S^0)^{-1}Y^0)\left(\hat{\Omega}_0^{x_3^*}[A^{-1}(Y - i\hat{B})]\right)^{-1}(S^* - R^m_{(+)})^{-1} l_5. \tag{80}$$

Нетрудно видеть, что имеют место равенства

$$Z|_{x_3^{j-1}+0} = S^{j-1} - R^j_{(+)}, \qquad Z|_{x_3^j-0} = S^j - R^j_{(+)}.$$

В этом случае формулы для вычисления матрицантов (56) и (57) могут быть упрощены. Для $x_3 = x_3^{j-1}$ они примут вид

$$\hat{\Omega}^{x_3^j}_{x_3^{j-1}}[\hat{S}] = (S^j - R^j_{(+)})^{-1}\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{j-1}-x_3^j)}(S^{j-1} - R^j_{(+)}). \tag{81}$$

Для любой точки x_3 из интервала $[x_3^{j-1}, x_3^j]$ они имеют вид

$$\hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{j-1}}[\hat{S}] = L(x_3)\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3^{j-1}-x_3)}(S^{j-1} - R^j_{(+)}), \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
L(x_3) &= \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3-x_3^j)}(S^j - R^j_{(+)})^{-1}\mathrm{e}^{\check{C}(x_3-x_3^j)} \\
&+ \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3-x_3^j)} \int\limits_{x_3^j}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s-x_3^j)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s-x_3^j)}\, ds\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3-x_3^j)}.
\end{aligned} \tag{83}$$

В силу свойства (76) выражения (71) и (72) для вычисления вектор-функции U в любой точке x_3 можно переписать.

Для случая, когда $x_3 < x_3^*$ и $x_3 \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$ $(1 < j < m)$, решение СДУ теории упругости (16)-(19) в точке x_3 представляется в виде:

$$U = \hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{j-1}}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-1}}_{x_3^{j-2}}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-2}}_{x_3^{j-3}}[\hat{Y}]\ ...\ \hat{\Omega}^{x_3^2}_{x_3^1}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^1}_0[\hat{Y}]\ U_4^0 + \hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{j-1}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-1}}_{x_3^{j-2}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-2}}_{x_3^{j-3}}[\hat{S}]\ ...\ \hat{\Omega}^{x_3^2}_{x_3^1}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^1}_0[\hat{S}]\ U_1^0. \tag{84}$$

Здесь

$$U_4^0 = \left[\hat{\Omega}^{x_3^*}_{x_3^{m-1}}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{m-1}}_{x_3^{m-2}}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{m-2}}_{x_3^{m-3}}[\hat{Y}]\ ...\ \hat{\Omega}^{x_3^3}_{x_3^2}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^2}_{x_3^1}[\hat{Y}]\ \hat{\Omega}^{x_3^1}_0[\hat{Y}]\right]^{-1} U_4^*, \tag{85}$$

$$U_4^* = (S^* - R^m_{(+)})^{-1} l_5, \qquad l_5 = S^* l_3 - l_4. \tag{86}$$

$$U_1^0 = -(S^0)^{-1} Y^0 U_4^0. \tag{87}$$

Обращая внимание на первое слагаемое выражения (84) и равенство (85), нетрудно видеть, что часть матрицантов взаимно сократится.

Для случая, когда $x_3 > x_3^*$ и $x_3 \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$ $(j > m)$, решение СДУ теории упругости (16)-(19) в точке x_3 упрощается:

$$U = \hat{\Omega}^{x_3}_{x_3^{j-1}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-1}}_{x_3^{j-2}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{j-2}}_{x_3^{j-3}}[\hat{S}]\ ...\ \hat{\Omega}^{x_3^{m+1}}_{x_3^m}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^m}_{x_3^*}[\hat{S}]\ (U_1^* + U_3^*). \tag{88}$$

Здесь

$$U_1^* = \hat{\Omega}^{x_3^*}_{x_3^{m-1}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{m-1}}_{x_3^{m-2}}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^{m-2}}_{x_3^{m-3}}[\hat{S}]\ ...\ \hat{\Omega}^{x_3^3}_{x_3^2}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^2}_{x_3^1}[\hat{S}]\ \hat{\Omega}^{x_3^1}_0[\hat{S}]\ U_1^0, \tag{89}$$

$$U_3^* = U_4^* + l_3. \tag{90}$$

3.4. **Матричная экспонента и вычисление выражений с ее участием.**

3.4.1. *Форма матричной экспоненты.* Хорошо известно, что жорданова форма матрицы не меняет свою форму непрерывно при предельном переходе, когда значение одного собственного числа стремится к значению другого собственного числа. Для вычисления матричной экспоненты предлагается воспользоваться результатами работы [8].

Будем предполагать, что матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ и корни характеристического уравнения (38) вычислены. Для построения матрицы $\hat{C}$ были использованы только те значения корней характеристического уравнения, которые имели только положительные (отрицательные) действительные части. В силу Утверждения 2.3 соответствующая ей матрица $\check{C}$ будет иметь собственные числа только с положительными (отрицательными) действительными частями.

Матричная экспонента $\mathrm{e}^{\hat{C}x}$ $(x = x_3 - x_3^m)$ без использования жордановой формы матрицы $\hat{C}$ может быть представлена в виде

$$\mathrm{e}^{\hat{C}x} = E\psi(x,\lambda_1) + (\hat{C} - \lambda_1 E)\psi(x,\lambda_1,\lambda_2) + (\hat{C} - \lambda_1 E)(\hat{C} - \lambda_2 E)\psi(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),$$

где 1) если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$, то

$$\begin{aligned}
\psi(x,\lambda_1) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \\
\psi(x,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right), \\
\psi(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\left[\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\right)-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\right)\right],
\end{aligned}$$

или 2) если $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$, то

$$\begin{aligned}
\psi(x,\lambda_1) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \\
\psi(x,\lambda_1,\lambda_1) &= x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \\
\psi(x,\lambda_1,\lambda_1,\lambda_3) &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\left[x\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{\lambda_3 x}\right)\right].
\end{aligned}$$

Данная форма записи матричной экспоненты не зависит от предельного перехода $\lambda_1 \to \lambda_2$, как зависит от него форма матричной экспоненты, записанная с использованием жордановой формы матрицы.

3.4.2. *Вычисление выражений с матричными экспонентами.* В выражениях (79), (83) встречается следующая комбинация с участием матричных экспонент:

$$\Xi(x_3) = \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3-x_3^j)} \int\limits_{x_3^j}^{x_3} \mathrm{e}^{-\hat{C}(s-x_3^j)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s-x_3^j)}\; ds\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3-x_3^j)}$$

Умножим матрицу $\Xi(x_3)$ слева на матрицу $\hat{C}$ и справа на матрицу $\check{C}$ и сложим: $\hat{C}\Xi + \Xi\check{C}$. Воспользуемся перестановочностью матричной экспоненты со своей матрицей. После несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
(91)\quad \hat{C}\Xi + \Xi\check{C} &= -\,\mathrm{e}^{\hat{C}(x_3-x_3^j)} \int\limits_{x_3^j}^{x_3} \frac{d}{ds}\left(\mathrm{e}^{-\hat{C}(s-x_3^j)} A^{-1} \mathrm{e}^{-\check{C}(s-x_3^j)}\right)\; ds\; \mathrm{e}^{\check{C}(x_3-x_3^j)} \\
&= \mathrm{e}^{\hat{C}(x_3-x_3^j)} A^{-1} \mathrm{e}^{\check{C}(x_3-x_3^j)} - A^{-1} \equiv \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Задача (91) по определению неизвестной матрицы Ξ (см., например, [6, Гл. VIII (§ 3)]) для любой правой части $\tilde{C}$ имеет единственное решение при условии

$$(92)\qquad \lambda_k(\hat{C}) + \lambda_n(\check{C}) \neq 0 \qquad \forall n,k = \overline{1,3}.$$

Это условие удовлетворяется в силу предположения вначале параграфа.

Пусть Ξ_j и $\tilde{C}_j$ — j-ый вектор-столбец матрицы Ξ и $\tilde{C}$ соответственно, $\check{C}_{kn}$ — элементы матрицы $\check{C}$.

Задача (91) эквивалентна задаче для матрицы и векторов девятого порядка:

$$(93)\qquad \begin{bmatrix} \hat{C}+\check{C}_{11}E & \check{C}_{21}E & \check{C}_{31}E \\ \check{C}_{12}E & \hat{C}+\check{C}_{22}E & \check{C}_{32}E \\ \check{C}_{13}E & \check{C}_{23}E & \hat{C}+\check{C}_{33}E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \Xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_3 \end{bmatrix}.$$

В силу эквивалентности задач (91) и (93) определитель матрицы нулю не равен, и, следовательно, матрица Ξ может быть легко определена.

Таким образом, для любого $x_3 \in [x_3^{j-1}, x_3^j]$ можем вычислить значение матрицы Ξ.

Приведем следующий возможный алгоритм определения матрицы Ξ.

Перепишем (93) в виде системы для вектор-столбцов Ξ_j $(j = \overline{1,3})$:

$$\begin{aligned}
(\hat{C} + \check{C}_{11}E)\Xi_1 + \check{C}_{21}\Xi_2 + \check{C}_{31}\Xi_3 &= \tilde{C}_1 \\
\check{C}_{12}\Xi_1 + (\hat{C} + \check{C}_{22}E)\Xi_2 + \check{C}_{32}\Xi_3 &= \tilde{C}_2 \\
\check{C}_{13}\Xi_1 + \check{C}_{23}\Xi_2 + (\hat{C} + \check{C}_{33}E)\Xi_3 &= \tilde{C}_3
\end{aligned}$$

Вычтем последнее уравнение, умноженное на соответствуюшие матрицы, из первого и второго уравнений, также умноженных на соответствующие матрицы. Получим:

$$\begin{aligned}
S^{11}\Xi_1 + S^{12}\Xi_2 &= \breve{C}_1 \\
S^{22}\Xi_1 + S^{22}\Xi_2 &= \breve{C}_2
\end{aligned}$$

где введены следующие квадратные матрицы и вектор-столбцы третьего порядка:

$$\begin{aligned}
S^{11} &= (\hat{C} + \check{C}_{33}E)(\hat{C} + \check{C}_{11}E) - \check{C}_{13}\check{C}_{31}E, \\
S^{12} &= \check{C}_{12}(\hat{C} + \check{C}_{33}E) - \check{C}_{13}\check{C}_{32}E, \\
S^{21} &= \check{C}_{21}(\hat{C} + \check{C}_{33}E) - \check{C}_{23}\check{C}_{31}E, \\
S^{22} &= (\hat{C} + \check{C}_{33}E)(\hat{C} + \check{C}_{22}E) - \check{C}_{23}\check{C}_{32}E, \\
\breve{C}_1 &= (\hat{C} + \check{C}_{33}E)\tilde{C}_1 - \check{C}_{31}\tilde{C}_3, \\
\breve{C}_2 &= (\hat{C} + \check{C}_{33}E)\tilde{C}_2 - \check{C}_{32}\tilde{C}_3.
\end{aligned}$$

Откуда сразу следует, что

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= (S^{22}S^{11} - S^{12}S^{21})^{-1}(S^{22}\breve{C}_1 - S^{12}\breve{C}_2), \\
\Xi_2 &= (S^{11}S^{22} - S^{21}S^{12})^{-1}(S^{11}\breve{C}_2 - S^{21}\breve{C}_1), \\
\Xi_3 &= (\hat{C} + \check{C}_{33}E)^{-1}(\tilde{C}_3 - \check{C}_{13}\Xi_1 - \check{C}_{23}\Xi_2).
\end{aligned}$$

Данный алгоритм применим, когда соответствующие матрицы имеют отличные от нуля детерминанты.

3.5. **Вычисление матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$.** Материал п. 2.4 и выражение решения ДМУР (46) полезны и могут быть использованы. Однако, они применимы тогда, когда, например, корни характеристического уравнения системы (16) могут быть вычислены точно — это возможно в случае изотропной среды, или при численном поиске корней характеристического уравнения в случае трансверсально-упругой среды с осью бесконечной симметрии, совпадающей с осью Oz (в этом случае процесс распространения волн в среде описывается системой из двух уравнений, характеристическое уравнений для которой имеет четыре попарно несовпадающих корня). В общем случае, когда среда является анизотропной, характеристическое уравнение системы (16) является алгебраическим уравнением шестого порядка. Хорошо известно, что в общем случае уравнения выше пятой степени включительно неразрешимы в радикалах, корни данных уравнений могут быть найдены только приблизительно, методы их поиска являются итерационными. Задача определения корней характеристического уравнения системы (16) может быть переформулирована, как задача поиска собственных чисел соответствующей матрицы шестого порядка. Матрица будет несимметричной и содержать комплексные элементы. Процесс поиска собственных чисел таких матриц также является итерационным, и, следовательно, собственные числа тоже определятся приблизительно, с некоторой ошибкой. В этом случае путь определения матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$ из п. 2.4 становится сопряжен со многими вычислительными трудностями. При неточном знании величин собственных значений собственные вектора матриц вычисляются неточно, проблематично определение ранга соответствующих матриц. Поиск матриц перехода T_1 и T_2 также становится проблематичным, поскольку хорошо известно, что жорданова форма матрицы не меняет свою форму непрерывно при предельном переходе, когда значение одного собственного числа стремится к значению другого собственного числа. Таким образом, и формула (46) в общем случае становится бесполезной.

В своей классической монографии [6, с. 197] Гантмахер Ф.Р. указал, что, к сожалению, единственный способ, который он может предложить для решения матричного уравнения типа (37) — это способ, приведенный нами в Приложении А. В работе [12] решение уравнения вида (37) сводится к задаче, которая решается QR–алгоритмом, который в наших условиях приводит к бесконечному итерационному процессу. По этим причинам не будем искать общего решения задачи (37), а предложим алгоритм определения матрицы $\hat{C}$, применимый к нашей конкретной ситуации.

Будем предполагать, что корни λ_j $(j = \overline{1,6})$ характеристического уравнения (99) уже вычислены.

Пусть

$$\mu_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad \mu_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \qquad \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

где $\lambda_j \neq 0$ $(j = \overline{1,3})$ собственные числа матрицы $\hat{C}$ и такие, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Re}\mu_2 > 0$ и $\mu_0 \neq 0$.

Утверждение 3.1. [3, с. 578] *Пусть $\lambda_j(Q)$ $(j = \overline{1,n})$ — собственные числа матрицы Q, и $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$ и $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \ldots \leq \nu_n$ — собственные числа матриц $\hat{Q} = \dfrac{1}{2}(Q + Q^*)$ и $\check{Q} = \dfrac{1}{2i}(Q - Q^*)$ соответственно. Тогда*

$$\mu_1 \leq \operatorname{Re}\{\lambda_j(Q)\} \leq \mu_n, \qquad \nu_1 \leq \operatorname{Im}\{\lambda_j(Q)\} \leq \nu_n.$$

Утверждение 3.2. *Пусть $\operatorname{Re}\mu_2 > 0$, тогда $\det[\mu_2 E + iA^{-1}B] \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $Q = \mu_2 A + iB$. Матрица A — симметричная и положительно определенная, матрица B — симметричная. Составим матрицу $\hat{Q} = \operatorname{Re}\mu_2 A$. Пусть $\lambda_1(A)$ и $\lambda_2(A)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы A. Тогда, согласно Утверждению 3.1 имеем оценку

$$\lambda_1(A)\operatorname{Re}\mu_2 \leq \operatorname{Re}\lambda(\mu_2 A + iB) \leq \lambda_2(A)\operatorname{Re}\mu_2.$$

Значение $\operatorname{Re}\mu_2 > 0$, следовательно, собственные числа матрицы $\mu_2 A + iB$ отличны от нуля. $\square$

По теореме Гамильтона–Кэли [6] характеристический многочлен матрицы является аннулирующим для этой матрицы. Таким образом, из этой теоремы и матричного уравнения (37) имеем, что матрица $\hat{C}$ удовлетворяет двум матричным уравнениям:

$$\hat{C}^3 - \mu_2\hat{C}^2 + \mu_1\hat{C} - \mu_0 E = 0 \quad \text{и} \quad A\hat{C}^2 + iB\hat{C} - D = 0. \tag{94}$$

Умножим первое уравнение из (94) слева на матрицу A, умножим второе матричное уравнение справа на $\hat{C}$ и вычтем из первого. Учтем Утверждение 3.2. Получаем

$$\hat{C}^2 + (\mu_2 A + iB)^{-1}(\mu_1 A + D)\hat{C} + \mu_0(\mu_2 A + iB)^{-1}A = 0. \tag{95}$$

Умножим уравнение (95) слева на матрицу A и вычтем его из второго уравнения (94), получаем:

$$[iB + A(\mu_2 A + iB)^{-1}(\mu_1 A + D)]\hat{C} = D + \mu_0 A(\mu_2 A + iB)^{-1}A. \tag{96}$$

Строгое доказательство того, что

$$\begin{array}{rcl} \det[iB + A(\mu_2 A + iB)^{-1}(\mu_1 A + D)] & \neq & 0 \\ & & \text{или} \\ \det[D + \mu_0 A(\mu_2 A + iB)^{-1}A] & \neq & 0 \end{array}$$

на данный момент отсутствует.

Можно привести нестрогие рассуждения, что матрица в правой части равенства (96) имеет отличные от нуля собственные числа, при предположении[2]

$$|\operatorname{Re}\{\lambda_j\}| \ll |\operatorname{Im}\{\lambda_j\}|, \qquad j = \overline{1,6},$$
$$\operatorname{Re}\{\lambda_j\} > 0, \qquad \operatorname{Im}\{\lambda_j\} < 0, \qquad j = \overline{1,3}.$$

То есть, можно сказать

$$\mu_2 \approx -ib_2, \qquad \mu_1 \approx -b_1, \qquad \mu_0 \approx ib_0,$$
$$b_j > 0, \qquad j = \overline{1,3}.$$

Рассмотрим матрицу в левой части равенства (96). Имеем

$$i\mu_2 B - BA^{-1}B + \mu_1 A + D \approx b_2 B - BA^{-1}B - b_1 A + D \equiv Q.$$

Рассмотрим матрицу $\hat{Q} = \operatorname{Im}\{p^2\}E$. В силу Утверждения 3.1 имеем

$$\operatorname{Im}\{\lambda_j(Q)\} = \operatorname{Im}\{p^2\} = -2\alpha\omega, \quad j = \overline{1,3}.$$

Таким образом, можем записать[3]

$$\hat{C} = [iB + A(\mu_2 A + iB)^{-1}(\mu_1 A + D)]^{-1}[D + \mu_0 A(\mu_2 A + iB)^{-1}A]. \tag{97}$$

Зная матрицу $\hat{C}$, матрицу $\check{C}$ можно найти при помощи соотношения (35) или третьего соотношения (36), или ввести

$$\chi_0 = -\lambda_4\lambda_5\lambda_6, \qquad \chi_1 = \lambda_4\lambda_5 + \lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6, \qquad \chi_2 = -\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6,$$

[2] Данные предположения можно сделать из анализа вида корней характеристического уравнения СДУ теории упругости для изотропной среды. Эти корни приведены на странице 41.

[3] Данное представление матрицы $\hat{C}$ тестировалось численно: матрица $\hat{C}$ вычислялась по формуле (97), после чего вычислялись ее собственные числа и сравнивались с теми, которые были заданы для построения величин μ_j ($j = \overline{1,3}$) для первого уравнения из (94). Ошибка присутствовала не ближе 15–16-ого знака после запятой, что вполне соответствует аккуратности вычислений, проводящимся с двойной точностью.

и вычислить $\check{C}$ по выражению, аналогичному (97)

$$\check{C} = [D + \chi_0 A(\chi_2 A + iB)^{-1}A][iB + (\chi_1 A + D)(\chi_2 A + iB)^{-1}A]^{-1}. \tag{98}$$

Здесь приведен алгоритм, когда действительные части корней характеристического уравнения больше нуля. Очевидно, что аналогично строятся матрицы $\hat{C}$ и $\check{C}$ и для тех значений корней, когда их действительные части отрицательные.

3.6. **Вычисление корней характеристического уравнения.** Метод решения прямой задачи (16)-(19), как уже отмечалось, разрабатывается для численного решения обратной задачи для СДУ теории упругости, для задач математического моделирования волновых полей в горизонтально-слоистых изотропных и анизотропных средах. Эти задачи требуют многократного решения прямой задачи.

Таким образом, очевидно требование к алгоритму нахождения корней характеристического уравнения: численный алгоритм должен позволить вычислять их быстро и с приемлемой точностью. От скорости счета по этому алгоритму зависит скорость счета при решении прямой задачи и, следовательно, других задач на ее основе.

Каким образом удовлетворить данное требование?

Поскольку метод нахождения корней характеристического уравнения является итерационным, то важна скорость сходимости данного метода. Желаемая скорость сходимости метода — скорость сходимости метода Ньютона. Второй немаловажный фактор скорости решения задачи итерационным методом — выбор начального приближения. Чем лучше выбрано начальное приближение, тем меньше необходимо итераций для достижения решения с выбранной точностью. Для того чтобы выбрать такое начальное приближение, необходимо проанализировать априорную информацию о решении задачи. Выбранный метод итерационного решения задачи должен позволить учесть данную априорную информацию.

Проведем необходимое исследование.

Система (16) имеет постоянные коэффициенты, и, следовательно, ее решение может быть получено в виде комбинации матричных экспонент, для чего необходимо найти все решения характеристического уравнения данной системы

$$\det[A\lambda^2 + iB\lambda - D] = 0. \tag{99}$$

Уравнение (99) может быть представлено в виде

$$a_6\lambda^6 + ia_5\lambda^5 - a_4\lambda^4 - ia_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + ia_1\lambda - a_0 = 0. \tag{100}$$

Здесь коэффициенты уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
a_6 &= \det A,\\
a_5 &= \det\{AAB\} + \det\{ABA\} + \det\{BAA\},\\
a_4 &= \det\{AAD\} + \det\{ABB\} + \det\{ADA\}\\
&+ \det\{BAB\} + \det\{BBA\} + \det\{DAA\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \det\{ABD\} + \det\{ADB\} + \det\{BAD\} \\
&+ \det\{BBB\} + \det\{BDA\} + \det\{DAB\} + \det\{DBA\}, \\
a_2 &= \det\{ADD\} + \det\{BBD\} + \det\{BDB\} \\
&+ \det\{DAD\} + \det\{DDA\} + \det\{DBB\}, \\
a_1 &= \det\{DDB\} + \det\{DBD\} + \det\{BDD\}, \\
a_0 &= \det D,
\end{aligned}
$$

где для краткости введено обозначение

$$
\det\{ABD\} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}, \qquad \det\{BBB\} = \det B,
$$

и A_{ij}, B_{ij} и D_{ij} являются компонентами матриц A, B и D соответственно.

3.6.1. *Метод Хичкока.* Для решения уравнения (100) может быть использован метод Хичкока [3,38–40] выделения многочлена меньшей степени из исходного многочлена.

Выделим многочлен второго порядка из многочлена шестого порядка.

Разделим уравнение (100) на первый коэффициент a_6 и представим уравнение в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\lambda^6 + d_5\lambda^5 - d_4\lambda^4 - d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda - d_0 \\
= \;&(\lambda^2 + r\lambda + q)(\lambda^4 + s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 + s_3\lambda + s_4) + R\lambda + Q.
\end{aligned}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
\left\{ \begin{array}{l} R = b_4 - s_4 r \\ Q = d_0 - s_4 q \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} s_4 = b_3 - s_3 r \\ b_4 = d_1 - s_3 q \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} s_3 = b_2 - s_2 r \\ b_3 = d_2 - s_2 q \end{array} \right.,
$$

$$
\left\{ \begin{array}{l} s_2 = b_1 - s_1 r \\ b_2 = d_3 - s_1 q \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = d_5 - r \\ b_1 = d_4 - q \end{array} \right. .
$$

Нетрудно видеть, что $R = R(r, q)$ и $Q = Q(r, q)$.

Согласно методу Хичкока ищутся такие r и q, для которых

$$
R(r, q) = 0, \qquad Q(r, q) = 0. \tag{101}
$$

Для поиска решения системы (101) используется метод Ньютона

$$
\begin{bmatrix} r^{\{k+1\}} \\ q^{\{k+1\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{\{k\}} \\ q^{\{k\}} \end{bmatrix} - \frac{1}{R_r Q_q - R_q Q_r} \begin{bmatrix} Q_q & -R_q \\ -Q_r & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ Q \end{bmatrix}.
$$

Частные производные R_r, Q_q, R_q, Q_r и значения функций R, Q взяты в точке $(r^{\{k\}}, q^{\{k\}})$, частные производные вычисляются по формулам:

$$
R_r = -s_4 - q r_2 - r r_3, \quad R_q = r_3, \quad Q_r = -q r_3, \quad Q_q = -a_4 - q r_2,
$$

$$
r_1 = r - s_1, \qquad r_2 = q - s_2 - r r_1, \qquad r_3 = -s_3 - q r_1 - r r_2.
$$

Для того чтобы итерационный процесс Ньютона сходился, необходимо выбрать начальное приближение $(r^{\{0\}}, q^{\{0\}})$ достаточно близко к решению. От выбора точки начального приближения зависит как сходимость процесса минимизации метода Ньютона (см., например, [18]), так и количество итераций, необходимых для достижения точки минимума с необходимой точностью.

3.6.2. *Априорная информация о решении.* Априорную информацию о решении можно разделить на информацию из физики, математики и практики.

Априорная информация из физики о поведении корней характеристического уравнения была приведена в начале п. 3.2.

Следующая априорная информация о решении следует из математических рассуждений.

Матрица A является симметричной и положительно определенной. Нетрудно определить арифметический корень $A^{1/2}$ (см., например, [6]). Тогда задача (99) эквивалентна задаче:

$$\det\,[E\lambda^2 + i\tilde{B}\lambda - \tilde{D}] = 0, \tag{102}$$

$$\tilde{B} = A^{-1/2}BA^{-1/2}, \quad \tilde{D} = A^{-1/2}DA^{-1/2} = \rho p^2 A^{-1} + \check{D}, \quad \check{D} = A^{-1/2}\hat{D}A^{-1/2}$$

Матрицы $\tilde{B}$ и $\tilde{D}$ — симметричные.

Нелинейная проблема собственных чисел (102) эквивалентна нахождению собственных чисел матрицы шестого порядка

$$M = \begin{bmatrix} -i\tilde{B} & \rho p^2 A^{-1} + \check{D} \\ E & 0 \end{bmatrix}.$$

Для собственных чисел $\lambda_j(M) = \alpha_j + i\beta_j$ $(j = \overline{1,6})$ матрицы M имеют место оценки следующего вида (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} |\alpha_j| &\le \max_s \sum_{r=1}^{6} |\hat{M}_{rs}| = \max_r \sum_{s=1}^{6} |\hat{M}_{rs}|, \\ |\beta_j| &\le \max_s \sum_{r=1}^{6} |\check{M}_{rs}| = \max_r \sum_{s=1}^{6} |\check{M}_{rs}|. \end{aligned} \tag{103}$$

Здесь $\hat{M}_{rs}$ и $\check{M}_{rs}$ — элементы матриц

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(M + M^*), \qquad \check{M} = \frac{1}{2i}(M + M^*)$$

соответственно.

Так как

$$\hat{M} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & E + \rho p^2 A^{-1} + \check{D} \\ E + \rho \overline{p}^2 A^{-1} + \check{D} & 0 \end{bmatrix},$$

получаем, что значения собственных чисел матрицы $\hat{M}$ не зависят от изменений матрицы $\tilde{B}$.

Таким образом, границы, в которых могут изменяться значения действительных частей корней характеристического уравнения, не зависят от изменений элементов матрицы $\tilde{B}$.

Практические соображения также дают априорную информацию о решении.

Необходимо построить метод нахождения корней характеристического уравнения (99), который решает задачу для той категории параметров и величин, которая имеет место на практике.

На практике могут быть использованы величины пространственных частот ν_j $(j = 1, 2)$, например, из интервала $[0; 4 \cdot 10^{-2}]$. Это ограничение связано с расстановкой сейсмоприемников на профиле.

Ограничения, связанные с практикой возбуждения упругих колебаний в среде и с характеристиками сейсмоисточников и сейсмоприемников, позволяют использовать величины временны́х частот f ($p = -\alpha + i\omega$, $\omega = 2\pi f$) из интервала максимум $[5, 85]$ Hz.

В зависимости от исследуемых глубин параметр затухания α используется из интервала $[0, 20]$ (см., например, примеры восстановления параметров среды в [13–15, 42, 43]).

Обычно в геологической практике величины $\sqrt{c_{ij}}$ принимают значения $0 \div 7$ км/с.

Таким образом, нетрудно заключить что ненулевые значения элементов матриц $\tilde{B}$ и $\check{D}$ имеют порядок малости $O(\nu)$ и $O(\nu^2)$ соответственно. Ненулевые значения элементов матрицы $|p|^2 A^{-1}$ имеют значения около $10^{-3} \div 10^{-4}$.

Из оценок (103) имеем

$$|\alpha_j| \le O(1), \qquad |\beta_j| \le O(1),$$

и можно разделить их на две подгруппы

$$0 \le \alpha_j \le O(1), \quad j = \overline{1,3}, \qquad\qquad O(1) \le \alpha_j \le 0, \quad j = \overline{4,6}.$$

3.6.3. *Численный эксперимент.* Рассмотрим уравнение $\lambda^2 + r\lambda + q = 0$. Очевидно, что $r = -(\tau_1 + \tau_2)$ и $q = \tau_1\tau_2$ (здесь τ_j — корни квадратного уравнения).

Принимая во внимание вышеизложенную априорную информацию, выберем начальное приближение для величин r и q в следующем виде:

$$r^0 = 0, \qquad q^0 = -(p^2/c_{33} + \nu^2). \tag{104}$$

Данный выбор обусловлен следующими соображениями. Априорная информация о решении позволяет заключить, что корни характеристического уравнения (99) изменяются в узких пределах. Для изотропной среды матрица A имеет вид

$$A = \rho \begin{bmatrix} v_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_p^2 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение (100) (см. также (73)) имеет следующие корни: пару корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_s^2 + \nu^2}$ кратности два и пару простых корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_p^2 + \nu^2}$.

Таким образом, выбор начального приближения в форме (104) есть точные значения для r и q в случае изотропной среды для простых корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_p^2 + \nu^2}$.

Тестирование алгоритма проводилось для трансверсально-изотропной среды, когда ось бесконечной симметрии принадлежала плоскости Ox_1x_2. В этом случае характеристическое уравнение (100) является бикубическим и его корни могут быть вычислены при помощи формул Кардано.

Шаги алгоритма вычисления характеристических чисел СДУ теории упругости следующие:

- Методом Хичкока ищутся значения r и q, которые решают систему уравнений (101). Итерационный процесс Ньютона прерывается на k-ом шаге, когда

$$|R(r^{\{k\}}, q^{\{k\}})| + |Q(r^{\{k\}}, q^{\{k\}})| \le \epsilon \tag{105}$$

- Полученные уравнения второго и четвертого порядка
$$\lambda^2 + r\lambda + q = 0, \qquad \lambda^4 + s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 + s_3\lambda + s_4 = 0$$
дают корни характеристического уравнения. Для решения уравнений четвертого порядка использовались формулы Феррари.

Тестирование алгоритма проводилось следующим образом. Выбирались конкретные значения приведенных модулей упругости c_{km} и параметров α, ν_1 и ν_2 из соответствующих интервалов. Для данных значений вычислялось 2000 значений при изменении временно́й частоты f из соответствующего интервала. При вычислениях в (105) положили $\epsilon = 10^{-16}$.

Результат тестирования: *При всех численных экспериментах для всех вычисленных корней характеристического уравнения ошибка вычислений присутствовала не ближе 8–12 знака после запятой. Для метода Хичкока требовалось 4–6 итераций.*

Численный эксперимент показал, что корни характеристического уравнения находятся предложенным способом и для значительно бо́льших интервалов изменения величин, указанных выше, которые в геофизической практике, как правило, не возникают. Однако иногда для метода Хичкока требовалось несколько больше итераций — около 15. Для еще более широких интервалов параметров происходило зацикливание алгоритма. Чтобы этого избежать или уменьшить количество итераций, полезно сделать несколько шагов при помощи градиентного метода, решая задачу:
$$|R(r,q)|^2 + |Q(r,q)|^2 \ \to \ min.$$

Проводились расчеты для орторомбической среды и для трансверсально-изотропной среды с осью бесконечной симметрии, имеющей произвольное направление. Количество итераций алгоритма Хичкока также не превышало 4–6 для интересующей нас области временны́х и пространственных частот. Для данных видов анизотропии невозможно иметь точные значения корней характеристического уравнения, так как характеристическое уравнение является полным уравнением шестого порядка. Контроль правильности счета можно осуществить только косвенно. Например, найденные корни при подстановке в уравнение (100) давали величины, модуль которых меньше 10^{-16}; или выведенные графики действительных и мнимых частей вычисленных корней для различных значений временны́х и пространственных частот имели аналогичный характер поведения, как и у графиков для действительных и мнимых частей корней для трансверсально-изотропной среды с осью бесконечной симметрии, расположенной в плоскости Ox_1x_2, — поведение графиков было гладким, отсутствовали неожиданные выбросы значений.

Возможен иной выбор начального приближения, например:
$$r^{\{0\}} = 0, \qquad q^{\{0\}} = -(p^2/\lambda(A) + \nu^2). \tag{106}$$
где $\lambda(A)$ — максимальное собственное значение матрицы A. В случае изотропной среды $\lambda(A) = v_p^2$. Таким образом, выбор начального приближения в форме (106) также есть точные значения для r и q в случае изотропной среды для простых корней $\lambda = \pm\sqrt{p^2/v_p^2 + \nu^2}$.

Тестирование показало, что нет преимуществ выбора начального приближения в виде (106) перед выбором в виде (104). В этой связи выбор начального приближения в виде (104) более предпочтителен, поскольку нет необходимости численного решения уравнения третьего порядка.

3.7. **Порядок вычислений.** Здесь приведем кратко порядок действий при вычислениях.

Пусть $x_3^* \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$.

- Находим корни характеристического уравнения (п. 3.6) для полупространства $[x_3^{N_l}, \infty)$.
- Выбираем три корня с отрицательными действительными частями и строим матрицу $\hat{C}$ (п. 3.5 или, если возможно, п. 2.4).
- По матрице $\hat{C}$ строим $R_{(-)}^{N_l+1}$ (см. (25), (36)), которая будет в силу условий склейки (64) краевым условием $S^{N_l} = R_{(-)}^{N_l+1}$. Таким образом, можем начать рекуррентный пересчет со слоя на слой, вычисляя S^j (см. формулы (79)).
- Пусть знаем краевое условие S^j.
- Находим корни характеристического уравнения (п. 3.6) для интервала $[x_3^{j-1}, x_3^j]$.
- Выбираем три корня с положительными действительными частями и строим матрицу $\hat{C}$ и $\check{C}$ (п. 3.5 или, если возможно, п. 2.4).
- По матрице $\hat{C}$ строим $R_{(+)}^{N_l+1}$ (см. (25), (36)) — частное решение ДМУР.
- Используя известные $R_{(+)}^{N_l+1}$, $\hat{C}$ и $\check{C}$, по формулам рекуррентного пересчета (79) строим S^{j-1}, $j = \overline{N_l - 1, 0}$. Для слоя $x_3 \in [x_3^{m-1}, x_3^m]$ дополнительно к значению S^{m-1} вычисляем S^*.
- Вычисляем U_4^* (см. (86)).
- Если точка x_3^* находится в первом слое, то $\hat{\Omega}_0^{x_3^*}[\hat{Y}] = \exp\{-\hat{C}x_3^*\}$. можем сразу вычислить U_4^0 (см. (85)).

  Если точка x_3^* находится не в первом слое, то вычисляем матрицанты $\hat{\Omega}_{x_{m-1}}^{x_3^*}[\hat{Y}] = \exp\{\hat{C}(x_3^{m-1} - x_3^*)\}$ и $\hat{\Omega}_{x_{j-1}}^{x_3^j}[\hat{Y}]$ $(j = \overline{1, m-1})$ по формулам (81), затем можем вычислить U_4^0 (см. (85)) и U_1^0 (см. (87)).
- Если цель вычислений — след вектор-функции U (например, при решении обратной задачи), то вычисляем U^0 по формуле (см. (80)).

  Если цель вычислений — значение вектор-функции U в некоторой точке x_3, то вычисляем соответствующие матрицанты $\hat{\Omega}_{x_{j-1}}^{x_3^j}[\hat{Y}]$ и $\hat{\Omega}_{x_{j-1}}^{x_3^j}[\hat{S}]$ и, пользуясь формулами (84) или (88) в зависимости от положения точки x_3 относительно x_3^*, вычисляем $U(x_3)$.

3.8. **Случай изотропной среды.** В случае, когда горизонтально-слоистая среда является изотропной, матрица модулей упругости имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

По определению для продольной и поперечной скоростей имеем

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Поскольку функции ρ, v_p и v_s зависят только от x_3, то система уравнений упругости может быть записана в цилиндрической системе координат (см. например, [45]) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1)\right)\\
&+ \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mu v_2)\right] - F_1(p,r,x_3,x_3^*),\\
\rho\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_2}{\partial r}\right)\\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left[\mu\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\lambda v_1)\right]\right) - F_2(p,r,x_3,x_3^*),
\end{aligned} \tag{107}$$

Здесь принято во внимание, что источник (11) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\,\delta'(r)\,\delta(x_3 - x_3^*),$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned}
F_1(p,r,x_3,x_3^*) &= F(p)\delta''(r)\delta(x_3 - x_3^*)\\
F_2(p,r,x_3,x_3^*) &= F(p)\delta'(r)\delta'(x_3 - x_3^*).
\end{aligned}$$

Применяя к системе (107) преобразование Фурье-Бесселя по пространственной переменной r [20–22] и преобразование Лапласа по временно́й переменной t

$$\begin{aligned}
u_1(p,\nu,x_3) &= \int_0^\infty e^{pt}\int_0^\infty v_1(t,r,x_3)rJ_1(\nu r)drdt,\\
u_2(p,\nu,x_3) &= \int_0^\infty e^{pt}\int_0^\infty v_2(t,r,x_3)rJ_0(\nu r)drdt,
\end{aligned}$$

приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + \nu BU\right) - \nu B'\frac{\partial}{\partial x_3}U - DU = \hat{F}(p,\nu,x_3,x_3^*), \tag{108}$$

Здесь введены обозначения:

$$U = \begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}, \quad \hat{F}(p,\nu,x_3,x_3^*) = F(p)\left(\nu\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\delta(x_3 - x_3^*) - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\delta'(x_3 - x_3^*)\right),$$

$$A = \rho\begin{bmatrix} v_s^2 & 0\\ 0 & v_p^2\end{bmatrix}, \quad B = \rho\begin{bmatrix} 0 & -v_s^2\\ v_p^2 - 2v_s^2 & 0\end{bmatrix}, \quad D = \rho p^2 E + \rho\nu^2\begin{bmatrix} v_p^2 & 0\\ 0 & v_s^2\end{bmatrix}.$$

Краевые условия получаем в следующей форме:

$$\left.\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + \nu BU\right)\right|_{x_3=0} = 0, \qquad U \;\to\; 0 \;\; (x_3 \to \infty). \tag{109}$$

В точках разрыва среды имеют место следующие условия склейки:

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U + \nu BU\right]_{x_3^k} = 0, \quad [U]_{x_3^k} = 0, \qquad k = \overline{1, N_l}. \tag{110}$$

Нетрудно видеть, что постановка прямой задачи (108)-(110) подобна постановке прямой задачи (16)-(18).

Матрица второго порядка, удовлетворяющая соответствующему ДМУР, вводится соотношением

$$A\frac{\partial}{\partial x_3}U + \nu BU = SU.$$

Характеристическое уравнение СДУ (108) имеет вид

$$(\lambda^2 - r_p^2)(\lambda^2 - r_s^2) = 0,$$

где

$$r_p^2 = \frac{p^2}{v_p^2} + \nu^2, \qquad r_s^2 = \frac{p^2}{v_s^2} + \nu^2.$$

Поскольку для корней характеристического уравнения имеются аналитические выражения, то для матриц $\hat{C}$ и $\check{C}$ могут быть получены аналитические выражения при помощи алгоритма из п. 2.4 в виде $T_1\hat{J}T_1^{-1}$ и $T_2\check{J}T_2^{-1}$. Также могут быть получены аналитические выражения для матриц $R_{(-)}^{N_l+1}$ и $R_{(+)}^m$.

Для решения соответствующего ДМУР в интервале $[x_3^{m-1}, x_3^m]$ должно быть использовано выражение подобное выражению (46), причем интеграл легко берется аналитически, формула легко упрощается. Тоже самое относится к выражениям для матрицантов.

Рекомендации последних двух абзацев относятся и к случаю постановки прямой задачи для горизонтально-слоистой изотропной среды, непосредственно следующей из постановки (108)-(110). Такая постановка полезна, когда приходится "склеивать" решения прямой задачи для изотропных и анизотропных слоёв. Скорость счета прямой задачи в случае изотропной среды можно существенно увеличить по сравнению со скоростью счета прямой задачи для анизотропной среды, если соответствующие формулы получить аналитически.

Для такой постановки характеристическое уравнение СДУ (18) имеет вид

$$(\lambda^2 - r_p^2)(\lambda^2 - r_s^2)^2 = 0,$$

$$r_p^2 = \frac{p^2}{v_p^2} + \nu^2, \qquad r_s^2 = \frac{p^2}{v_s^2} + \nu^2, \qquad \nu^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2,$$

и

$$\operatorname{rank}\,[Ar_s^2 + \nu(B - B')r_s - D] = 1,$$

что является необходимой информацией при построении матрицы перехода T_1 из п. 2.4.

Заключение

В работе представлен численный метод решения СДУ теории упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды.

Полученные выражения легко программируются, алгоритм вычисления искомых величин может быть легко распараллелен, благодаря тому, что для каждой пространственной и временно́й частоты вычисления ведутся отдельно.

Итоговые выражения содержат экспоненты, показатели которых имеют отрицательные действительные части, что не позволяет накапливаться ошибкам округления при рекурентном перечете со слоя на слой.

По всей видимости, материал, представленный в Главе 2, о свойствах решения ДМУР и матрицанта является общим. Данная методика получения формул для решения СДУ второго порядка была применена в работах автора [17, 44], в которых основные матрицы имели свойства отличные от свойств матриц A, B и D в данной работе. Отдельной проблемой для СДУ второго порядка отличной от рассмотренной в представленной работе, может оказаться проблема вычисления корней характеристического уравнения системы и проблема вычисления матрицы $\hat{C}$.

Подводя итог, можно сказать, что для нужд многоволновой сейсмики в случае горизонтально-слоистых анизотропных сред создан метод решения прямой динамической задачи сейсмики в частотной области для матмоделирования процессов распространения упругих волн и решения обратной динамической задачи сейсмики. Для моделирования процессов распространения упругих волн необходимо проделать обратные преобразования Фурье. Данная задача является сложной, но вполне решаемой (см., например, работы [2, 23]), однако, в данной работе она не являлась предметом рассмотрения.

Приложение А. Матричное уравнение

Следующие сведения о решении матричных уравнений не являются широко известными, поэтому мы приводим некоторые факты относительно их решения, следуя книге [6].

Рассмотрим уравнения

$$\Xi_0\Omega_1^m + \Xi_1\Omega_1^{m-1} + \ldots + \Xi_m = 0, \tag{111}$$

$$\Omega_2^m\Xi_0 + \Omega_2^{m-1}\Xi_1 + \ldots + \Xi_m = 0, \tag{112}$$

где Ξ_i, $i = \overline{0, m}$, — заданные, а Ω_1 и Ω_2 искомые квадратные матрицы порядка n.

Теорема А.1. *Каждое решение уравнения (111) удовлетворяет скалярному уравнению*

$$\zeta(\Omega_1) = 0, \qquad \zeta(\lambda) = |\Xi_0\lambda^m + \Xi_1\lambda^{m-1} + \ldots + \Xi_m|.$$

Этому же скалярному уравнению удовлетворяет и любое решение Ω_2 матричного уравнения (112).

Пусть функция $\zeta(\lambda)$ имеет вид:

$$\zeta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1}(\lambda - \lambda_2)^{a_2}\ldots(\lambda - \lambda_h)^{a_h}. \tag{113}$$

Квадратная матрица Ω_1 порядка n — решение уравнения $\zeta(\Omega_1) = 0$. Минимальный многочлен матрицы Ω_1 должен быть делителем многочлена (113), таким образом элементарные делители матрицы Ω_1 должны иметь следующий вид:

$$(\lambda - \lambda_{i_1})^{p_{i_1}}, \quad (\lambda - \lambda_{i_2})^{p_{i_2}}, \quad \ldots, (\lambda - \lambda_{i_\nu})^{p_{i_\nu}},$$

где

$$i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, h,$$

$$p_{i_1} \le a_{i_1}, \quad p_{i_2} \le a_{i_2}, \quad \ldots, \quad p_{i_h} \le a_{i_h},$$

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_h} = n,$$

среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ могут быть равные, n — заданный порядок искомой матрицы Ω_1).

Искомая матрица Ω_1 представляется в виде

$$\Omega_1 = T_1 \left\{ \lambda_{i_1} E^{(p_{i_1})} + H^{(p_{i_1})}, \ldots, \lambda_{i_\nu} E^{(p_{i_\nu})} + H^{(p_{i_\nu})} \right\} T_1^{-1},$$

где T_1 — произвольная невырожденная матрица порядка n (здесь $\lambda_{i_\nu} E^{(p_{i_\nu})} + H^{(p_{i_\nu})}$ — жорданова клетка порядка p_{i_ν}, соответствующая собственному значению λ_{i_ν}).

При решении матричного уравнения (111) решение Ω_1 ищется в виде $T_1 J_1 T_1^{-1}$, в котором матрица J_1 имеет известную форму. Матрица T_1 может быть найдена из решения однородной системы уравнений для ее коэффициентов

$$\Xi_0 T_1 J_1^m + \Xi_1 T_1 J_1^{m-1} + \ldots + \Xi_m T_1 = 0.$$

Для матричного уравнения (112) решение Ω_2 ищется в виде $T_2 J_2 T_2^{-1}$, причем матрица T_2^{-1} удовлетворяет однородному уравнению

$$J_2^m T_2^{-1} \Xi_0 + J_2^{m-1} T_2^{-1} \Xi_1 + \ldots + T_2^{-1} \Xi_m = 0.$$

Приложение B. Матрицант

В этом приложении мы следуем книге [6, Гл. XV(§ 5)].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\hat{\Omega} - \Phi(t)\hat{\Omega} = 0 \tag{114}$$

и начальное условие

$$\hat{\Omega}(t_0) = E. \tag{115}$$

Здесь $\Phi(t) = \{\Phi_{ij}(t)\}$ — квадратная матрица порядка n, элементами которой являются комплексные функции $\Phi_{ij}(t)$, непрерывные[4] в интервале (t_0, T) изменения аргумента t; интервал (t_0, T) — произвольный (конечный или бесконечный).

При помощи метода последовательных приближений

$$\hat{\Omega}^{\{0\}} = E, \quad \hat{\Omega}^{\{k\}} = E + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(s)\hat{\Omega}^{\{k-1\}} ds, \quad k = 1, 2, ...,$$

можно показать, что задача (114)-(115) имеет решение на интервале (t_0, T).

Это решение будем обозначать $\hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi]$ и называть *матрицантом*.

Любое другое решение дифференциального уравнения (114) имеет вид

$$X = \hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi] C,$$

где C — произвольная постоянная матрица.

Некоторые свойства матрицанта:

(1) Для любых последовательных значений $t_1, t_2, t \in (t_0, T)$ имеем
$\hat{\Omega}_{t_1}^t[\Phi] = \hat{\Omega}_{t_2}^t[\Phi]\ \hat{\Omega}_{t_1}^{t_2}[\Phi]$.

[4]Все последующие сведения сохраняют силу, если вместо непрерывности потребовать лишь ограниченность и интегрируемость по Риману (в любом конечном подынтервале интервала (t_0, T)) всех функций $\Phi_{nk}(t)$

(2) Имеет место $\det\left[\hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi]\right] = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp}\Phi(s)ds\right\}$.

(3) Если Φ — постоянная матрица, то $\hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi] = \exp\{\Phi(t-t_0)\}$.

(4) Если[5] $\mod \Phi(t) \le \Psi(t)$, то $\mod \hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi] \le \hat{\Omega}_{t_0}^t[\Psi]$ $(t > t_0)$.

(5) Для $t > t_0$ имеем $\mod \hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi] \le \mathrm{e}^{nh(t)} I$, где

$$h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad g(t) = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\Phi_{ij}(t)|,$$

$$I = \{I_{i,j}\}, \qquad I_{ij} = 1 \ \ (i,j = \overline{1,n}).$$

Значение матрицанта может быть получено предельным переходом в интегральном произведении:

$$\hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi] = \lim_{\Delta t_k \to 0,\ N \to \infty} [E + \Phi(\tau_N)\Delta t_N][E + \Phi(\tau_{N-1})\Delta t_{N-1}]...[E + \Phi(\tau_1)\Delta_1], \tag{116}$$

где интервал $[t_0, t]$ разбит на N отрезков, каждый длиной Δt_k $(k = \overline{1,N})$ и точка τ_k принадлежит k-ому отрезку.

По аналогии можно ввести матрицант $\check{\Omega}_{t_0}^t[\Phi]$ как решение задачи

$$\frac{d}{dt}\hat{\Omega} - \hat{\Omega}\Phi(t) = 0, \tag{117}$$

с начальным условием

$$\hat{\Omega}(t_0) = E. \tag{118}$$

Можно доказать свойства матрицанта, аналогичные свойствам 1-5.

Любое другое решение дифференциального уравнения (117) имеет вид

$$X = C\hat{\Omega}_{t_0}^t[\Phi].$$

Список литературы

[1] Г.В. Аккуратов, В.И. Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде*, Численные методы в геофизике, М.: МГУ, 1979, С. 3–12.

[2] Г.В. Аккуратов, В.И. Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде*, Журнал вычислительной математики и математической физики **24** (1984), 272–286.

[3] И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, изд. 3-е, М.: Наука, 1966.

[4] Л.М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, М.: Наука, 1973.

[5] Л.М. Бреховских, О.А. Годин, *Акустика слоистых сред*, М.: Наука, 1989.

[6] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, изд. 3-еизд. 4-ое, М.: Наука, 1988.

[7] И.М. Гельфанд, О.В. Локуциевский, *Метод "прогонки" для решения разностных уравнений*, в книге: С.К. Годунов, В.С. Рябенький, *Введение в теорию разностных схем*, М.: Наука, 1962, С. 283–309.

[8] С.К. Годунов, *Матричная экспонента, матрица Грина и условия Лопатинского*, Новосибирск: НГУ, 1983.

[9] В.И. Дмитриев, *Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде*, Вычислительные методы и программирование **10** (1968), 55–65.

[5] Под матрицей $\mod \Phi(t)$ понимаем матрицу, составленную из элементов $|\Phi_{ij}(t)|$. Если для всех $i,j = \overline{1,n}$ элементов матриц Φ_{ij} и Ψ_{ij} выполнено неравенство $\Phi_{ij} \le \Psi_{ij}$, то будем писать $\Phi \le \Psi$.

[10] В.И. Дмитриев, Э.А. Федорова, *Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах*, Вычислительные методы и программирование **32** (1980), 150-183.

[11] Г.В. Иванов, Ю.М. Волчков, И.О. Богульский, С.А. Анисимов, В.Д. Кургузов, *Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел*, Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2002.

[12] Х.Д. Икрамов, *Численное решение матричных уравнений*, М.: Наука, 1984.

[13] А.Л. Карчевский, *Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости*, Доклады РАН **375** (2000), 235–238.

[14] А.Л. Карчевский, А.Г. Фатьянов, *Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды*, Сибирский журнал вычислительной математики **4** (2001), 259–269.

[15] А.Л. Карчевский, *Численное определение функции последействия среды*, Обратные задачи и информационные технологии **2** (2003), 53–63.

[16] А.Л. Карчевский, *Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды*, Геология и геофизика **46** (2005), 339–351.

[17] Э. Курпинар, А.Л. Карчевский, *Вычисление градиента при оптимизационном методе решения обратной динамической задачи сейсмики для горизонтально слоистой среды*, Геология и геофизика **46** (2005), 201–209.

[18] В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский, *Вычислительные методы высшей математики*, Минск: Высшая школа, 1972.

[19] Л.А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*, Л.: Наука, 1984.

[20] Г.И. Петрашень, *Распространение упругих волн в слоистых изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями*, Ученые записки ЛГУ **162** (1952).

[21] Г.И. Петрашень, *О рациональном методе решения для задачи динамической теории упругости*, Ученые записки ЛГУ **208** (1956), 5–57.

[22] Г.И. Петрашень, Л.А. Молотков, П.В. Крауклис, *Волны в слоистых однородных изотропных средах*, Л.: Наука, 1982.

[23] Г.И. Петрашень, Б.М. Каштан, А.А. Ковтун, И.В. Мухина, *Метод контурных интегралов в случае трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, нормальной границам раздела*, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 24, Л.: Наука, С. 4–91.

[24] *Поперечные и обменные волны в сейсморазведке* (под ред. Н.Н. Пузырева) , М.: Недра, 1967.

[25] Н.Н. Пузырев, А.В. Тригубов, Л.Ю. Бродов, Г.В. Ведерников, К.А. Лебедев, И.Р. Оболенцева, Т.В. Нефедкина, Л.Н. Худобина, Б.П. Сибиряков, Т.Н. Куличихина, Г.Н. Лебедева, Л.В. Коржева, *Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн.* М.: Недра, 1985.

[26] *Многоволновые сейсмические исследования* (под ред. Н.Н. Пузырева), М.: Наука, 1987.

[27] Н.Н. Пузырев, *Методы и объекты сейсмических исследований*, Новосибирск: СО РАН, НИЦ ОИГГМ, 1997.

[28] Н.Н. Пузырев, *Некоторые замечания о путях развития сейсмических методов*, Геофизика **6** (1999), 3–5.

[29] Н.Н. Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Возбуждение и регистрация волн*, Геология и геофизика **44** (2003), 277–285.

[30] Н.Н. Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Интерпретация данных и результаты*, Геология и геофизика **44** (2003), 465–473.

[31] Ю.В. Ризниченко, *Геометрическая сейсмика слоистых сред*, Труды Института теоретической геофизики **1** (1947).

[32] А.Н. Тихонов, Д.Н. Шахсуваров, *Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах*, Известия АН СССР, серия геофизическая **3** (1956), 251–254.

[33] А.Г. Фатьянов, Б.Г. Михайленко, *Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах*, Доклады АН СССР **301** (1988), 834–839.

[34] А.Г. Фатьянов, *Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропнных средах с поглащением энергии*, Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН, 1989, № 857.

[35] А.Г. Фатьянов, *Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах*, Доклады АН СССР **310** (1990), 323-327.

[36] K. Aki, P.G. Richards, *Quantitative Seismology. Theory and Methods*, San Francisco, Freeman, 1980. Русский перевод: К. Аки, П. Ричардс, *Количественная сейсмология. Теория и методы*, М.: Мир, 1983.

[37] A. Ben-Menahem, S.J. Singh, *Seismic Waves and Sources*, New York: Sprnger-Verlag, 1981.

[38] F.L. Hitchcock, *Finding complex roots of algebraic equations*, Journal of Mathematical Physics **17** (1938), 55–58.

[39] F.L. Hitchcock, *Algebraic equations with comlex coefficients*, Journal of Mathematical Physics **18** (1939), 202–210.

[40] F.L. Hitchcock, *An improvement on the G.C.D. method for comlex roots*, Journal of Mathematical Physics **23** (1944), 69–74.

[41] E. Kamke, *Diffrentiatialgleichungen Lösungsmenthoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Diffrentiatialgleichungen*, 6, Verbesserte Auflage, Leipzig, 1959. Русский перевод: Э.Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1976.

[42] A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the system of elasticity for verticaly inhomogeneous medium*, Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, Mathemetical Modeling in Geophysics **5** (1999), 63-69.

[43] A.L. Karchevsky, *Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems **10** (2002), 361–384.

[44] A.L. Karchevsky, *The analytical formulas for the gradient of the residual functional for the coefficient inverse problem for the elasticity system*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems **11** (2003), 619–629.

[45] V. Nowacki, *Teoria sprężystości*, Państowowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1970. Русский перевод: В.Новацкий, *Теория упругости*, М.: Мир, 1975.

[46] E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson, E. Isaacson, *Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging*, Inverse Probltms **7** (1991), 899–926.

[47] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Massachusetts Institute of Technology, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1976. Русский перевод: Г.Стренг, *Линейная алгебра и ее применения*, М.: Мир, 1980.

[48] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, Clarendon Press, 1965. Русский перевод: Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений, М.: Наука, 1970.

Андрей Леонидович Карчевский
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: karchevs@math.nsc.ru