S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 200–203 (2005) УДК 512.554

Краткие сообщения MSC 16P10, 16W20

ГРУППЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ $\operatorname{Ortaut} A$ ДЛЯ $\mathbb{Z}_3$-ОРТОГРАДУИРОВАННЫХ КВАЗИМОНОКОМПОЗИЦИОННЫХ АЛГЕБР A РАЗМЕРНОСТИ 9, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ $\dim A_0 = 1,\ A_1A_2 = 0$

А.Т. ГАЙНОВ

Abstract. In [1], the author has found all orthogonal non–isomorphic $\mathbb{Z}_3$-ortograded quasimonocomposition algebras $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ satisfying the conditions $\dim A = 9$, $\dim A_0 = 1$, and $A_1A_2 = 0$. In this paper we construct their orthogonal automorphisms groups.

В [1] автор исследовал класс W $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированных квазимонокомпозиционных алгебр $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0, удовлетворяющих условиям $\dim A_0 = 1$ и $A_1A_2 = 0$. В этой работе были найдены все небиизотропные алгебры этого класса, имеющие наименьшую размерность (см. [1], теорема 3). Их список исчерпывается двухступенно разрешимыми алгебрами D_1, $D_2(\varrho)$ $(\varrho \in \Phi)$, D_3 и трехступенно разрешимыми алгебрами C_1, C_2, $C_3(\varrho)$ $(\varrho \in \Phi)$.

Мы будем обозначать через $\operatorname{Ortaut} A$ группу всех ортогональных автоморфизмов алгебры A, а число всех независимых параметров, участвующих в определении этой группы, т.е., размерность соответствующего алгебраического многообразия, через $\dim(\operatorname{Ortaut} A)$.

Основным результатом этой работы является

Theorem 1. *Для каждой из алгебр* $A \in \{D_1, D_2, D_3, C_1, C_2, C_3\}$, *ее группа* $\operatorname{Ortaut} A$ *описывается следующим образом.*

Gainov, A.T. The orthogonal automorphisms groups $\operatorname{Ortaut} A$ for $\mathbb{Z}_3$-ortograded quasimonocomposition algebras A of dimension 9, satisfying conditions $\dim A_0 = 1$, $A_1A_2 = 0$.

Представлена О.В. Богопольским 7 октября 2005 г., опубликована 18 октября 2005 г.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Ortaut} A$ *и пусть* $T = (t_{ij})$ *— матрица линейного оператора* φ *в каноническом базисе* $\{d_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e^1, e^2, e^3, e^4\}$ *алгебры* A. *Для всех вышеупомянутых алгебр имеем* $\varphi(d_0) = t_{00} \cdot d_0$, $t_{00} = \pm 1$. *Здесь независимые параметры* t_{ij} *— это произвольные элементы поля* Φ*; лишь для некоторых алгебр* $t_{11} \neq 0$ *— произвольный ненулевой элемент поля* Φ.

1. *Произвольный автоморфизм* φ *из группы* $\operatorname{Ortaut} D_1$ *задается следующими равенствами:*

$$
\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{13}e_3 + t_{14}e_4 - \frac{t_{13}t_{17} + t_{14}t_{18}}{t_{11}}e^1 + \\
&\quad + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4; \qquad (t_{11})^3 = t_{00} \\
\varphi(e_2) &= t_{11}e_2 - t_{14}e_3 - t_{14}e_4 + + \frac{-t_{11}t_{16} + t_{14}t_{17} + (t_{14} - t_{13})t_{18} - t_{14}t_{28}}{t_{11}}e^1 + \\
&\quad + \frac{t_{14}t_{18} + t_{14}t_{28}}{t_{11}}e^2 + t_{18}e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}t_{11}e_3 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2; \quad \varphi(e_4) = t_{00}t_{11}e_4 - t_{00}t_{18}e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= \frac{1}{t_{11}}e^1; \quad \varphi(e^2) = \frac{1}{t_{11}}e^2 \\
\varphi(e^3) &= -t_{11}t_{13}e^1 + t_{11}t_{14}e^2 + t_{11}t_{11}e^3; \ \varphi(e^4) = -t_{11}t_{14}e^1 + t_{11}t_{14}e^2 + t_{11}t_{11}e^4
\end{aligned}
$$

При этом $\dim(\operatorname{Ortaut} D_1) = 6$ *и* t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{28} *— независимые параметры.*

2. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \operatorname{Ortaut} D_2(\varrho)$, $\varrho \in \Phi$, $\varrho \neq 1$ *задается следующими равенствами:*

$$
\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + t_{13}e_3 + t_{14}e_4 + \frac{-t_{12}t_{16} - t_{13}t_{17} - t_{14}t_{18}}{t_{11}}e^1 + \\
&\quad + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4 \\
\varphi(e_2) &= \frac{t_{00}}{(t_{11})^2}e_2 - \varrho\frac{t_{00}t_{13}}{(t_{11})^3}e_4 + \left[(1-\varrho)\frac{t_{12}t_{13}t_{28}}{(t_{11})^2} + (\varrho - 1)\frac{t_{00}t_{13}t_{18}}{(t_{11})^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_{00}t_{16}}{(t_{11})^3} - \frac{t_{14}t_{28}}{t_{11}}\right] \cdot e^1 + \varrho\frac{t_{13}t_{28}}{t_{11}} \cdot e^2 + \left[\frac{t_{00}t_{18}}{(t_{11})^3} - \frac{t_{12}t_{28}}{t_{11}}\right] \cdot e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}t_{11}e_3 + t_{00}t_{12}e_4 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2 \\
\varphi(e_4) &= \frac{1}{(t_{11})^2}e_4 + \left[-\frac{t_{18}}{(t_{11})^3} + \frac{t_{00}t_{12}t_{28}}{t_{11}}\right] \cdot e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= \frac{1}{t_{11}}e^1; \quad \varphi(e^2) = -t_{00}t_{11}t_{12}e^1 + t_{00}t_{11}t_{11}e^2 \\
\varphi(e^3) &= -\frac{t_{00}t_{13}}{(t_{11})^2} \cdot e^1 + \frac{t_{00}}{t_{11}}e^3 \\
\varphi(e^4) &= [(1-\varrho)t_{12}t_{13} - t_{11}t_{14}] \cdot e^1 + \varrho t_{11}t_{13}e^2 - t_{11}t_{12}e^3 + t_{11}t_{11}e^4
\end{aligned}
$$

При этом $\dim(\operatorname{Ortaut} D_2(\varrho)) = 8$ *и* $t_{11} \neq 0$, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{28} *— независимые параметры.*

3. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \operatorname{Ortaut} D_2(1)$ *задается следующими равенствами:*

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + t_{13}e_3 + t_{14}e_4 + \frac{-t_{12}t_{16} - t_{13}t_{17} - t_{14}t_{18}}{t_{11}}e^1 + \\
&\quad + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4 \\
\varphi(e_2) &= \frac{t_{00}}{(t_{11})^2}e_2 + t_{23}e_3 + \left[-\frac{t_{00}t_{13}}{(t_{11})^3} + \frac{t_{12}t_{23}}{t_{11}}\right]\cdot e_4 + \\
&\quad + \left[-\frac{t_{00}t_{16}}{(t_{11})^3} + \frac{-t_{17}t_{23} - t_{14}t_{28}}{t_{11}}\right]\cdot e^1 + \frac{-t_{18}t_{23} + t_{13}t_{28}}{t_{11}}\cdot e^2 + \\
&\quad + \left[\frac{t_{00}t_{18}}{(t_{11})^3} - \frac{t_{12}t_{28}}{t_{11}}\right]\cdot e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}t_{11}e_3 + t_{00}t_{12}e_4 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2 \\
\varphi(e_4) &= \frac{1}{(t_{11})^2}e_4 + \left[\frac{-t_{18}}{(t_{11})^3} + \frac{t_{00}t_{12}t_{28}}{t_{11}}\right]\cdot e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= \frac{1}{t_{11}}e^1; \quad \varphi(e^2) = -t_{00}t_{11}t_{12}e^1 + t_{00}t_{11}t_{11}e^2 \\
\varphi(e^3) &= \left[-\frac{t_{00}t_{13}}{(t_{11})^2} + t_{12}t_{23}\right]\cdot e^1 - t_{11}t_{23}e^2 + \frac{t_{00}}{t_{11}}e^3 \\
\varphi(e^4) &= -t_{11}t_{14}e^1 + t_{11}t_{13}e^2 - t_{11}t_{12}e^3 + t_{11}t_{11}e^4
\end{aligned}$$

При этом $\dim(\operatorname{Ortaut} D_2(1)) = 9$ *и* $t_{11} \neq 0$, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{23}, t_{28} *— независимые параметры.*

4. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \operatorname{Ortaut} D_3$ *задается следующими равенствами:*

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + t_{13}e_3 + t_{14}e_4 + (t_{11})^2(-t_{12}t_{16} - t_{13}t_{17} - t_{14}t_{18})\cdot e^1 + \\
&\quad + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4; \ (t_{11})^3 = 1 \\
\varphi(e_2) &= t_{00}t_{11}e_2 + t_{23}e_3 + [t_{00}t_{12} - t_{00}t_{13} + (t_{11})^2t_{12}t_{23}]\cdot e_4 + \\
&\quad + [-t_{00}t_{16} - (t_{11})^2t_{17}t_{23} - t_{00}(t_{11})^2t_{12}t_{18} + (t_{11}t_{12}t_{12} - t_{11}t_{11}t_{14})t_{28}]e^1 \\
&\quad + (t_{11})^2[-t_{23}t_{18} + (t_{13} - t_{12})t_{28}]\cdot e^2 + [t_{00}t_{18} - (t_{11})^2t_{12}t_{28}]\cdot e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}(t_{11}e_3 + t_{12}e_4 - t_{17}e^1 - t_{18}e^2) \\
\varphi(e_4) &= t_{11}e_4 + [-t_{18} + t_{00}(t_{11})^2t_{12}t_{28}]e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= (t_{11})^2e^1; \quad \varphi(e^2) = t_{00}t_{11}(-t_{12}e^1 + t_{11}e^2) \\
\varphi(e^3) &= (-t_{00}t_{11}t_{13} + t_{12}t_{23})e^1 - t_{11}t_{23}e^2 + t_{00}(t_{11})^2e^3 \\
\varphi(e^4) &= (-t_{11}t_{14} + t_{12}t_{12})e^1 + t_{11}[(-t_{12} + t_{13})e^2 - t_{12}e^3 + t_{11}e^4]
\end{aligned}$$

При этом $\dim(\operatorname{Ortaut} D_3) = 8$ *и* t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{23}, t_{28} *— независимые параметры.*

5. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \mathrm{Ortaut}\, C_1$ *задается следующими равенствами:*

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4;\ (t_{11})^3 = 1 \\
\varphi(e_2) &= t_{00}t_{11}e_2 - t_{00}t_{16}e^1 + t_{00}t_{18}e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}t_{11}e_3 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2; \quad \varphi(e_4) = t_{11}e_4 - t_{18}e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= (t_{11})^2e^1; \quad \varphi(e^2) = t_{00}(t_{11})^2e^2 \\
\varphi(e^3) &= t_{00}(t_{11})^2e^3; \quad \varphi(e^4) = (t_{11})^2e^4
\end{aligned}$$

При этом $\dim(\mathrm{Ortaut}\ C_1) = 4$ *и* t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{28} *— независимые параметры.*

6. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \mathrm{Ortaut}\, C_2$ *задается следующими равенствами:*

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= t_{11}e_1 + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4;\ (t_{11})^3 = 1. \\
\varphi(e_2) &= t_{11}e_2 + t_{23}e_3 + [-t_{16} - (t_{11})^2t_{17}t_{23}]e^1 - (t_{11})^2t_{18}t_{23}e^2 + t_{18}e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= t_{00}t_{11}e_3 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2; \quad \varphi(e_4) = t_{00}t_{11}e_4 - t_{00}t_{18}e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= (t_{11})^2e^1; \quad \varphi(e^2) = (t_{11})^2e^2 \\
\varphi(e^3) &= -t_{00}t_{11}t_{23}e^2 + t_{00}(t_{11})^2e^3; \quad \varphi(e^4) = t_{00}(t_{11})^2e^4
\end{aligned}$$

При этом $\dim(\mathrm{Ortaut}\ C_2) = 5$ *и* $t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{23}, t_{28}$ *— независимые параметры.*

7. *Произвольный автоморфизм* $\varphi \in \mathrm{Ortaut}\, C_3(\varrho)$, $\varrho \in \Phi$ *задается следующими равенствами:*

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \frac{1}{(t_{22})^2}e_1 + t_{16}e^2 + t_{17}e^3 + t_{18}e^4 \\
\varphi(e_2) &= t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + t_{23}e_3 + [-(t_{22})^3t_{16} - (t_{22})^2t_{17}t_{23}] \cdot e_1 + \\
&\quad + [t_{21}(t_{22})^2t_{16} - (t_{22})^2t_{18}t_{23}] \cdot e^2 + [t_{21}(t_{22})^2t_{17} + (t_{22})^3t_{18}] \cdot e^3 + t_{28}e^4 \\
\varphi(e_3) &= \frac{t_{00}}{(t_{22})^2}e_3 - t_{00}t_{17}e^1 - t_{00}t_{18}e^2 \\
\varphi(e_4) &= t_{00}t_{21}e_3 + t_{00}t_{22}e_4 + [-t_{00}t_{21}(t_{22})^2t_{17} - t_{00}(t_{22})^3t_{18}]e^1 - t_{00}t_{28}e^2 \\
\varphi(e^1) &= (t_{22})^2e^1 - t_{21}t_{22}e^2; \quad \varphi(e^2) = \frac{1}{t_{22}}e^2 \\
\varphi(e^3) &= -t_{00}t_{22}t_{23}e^2 + t_{00}(t_{22})^2e^3 - t_{00}t_{21}t_{22}e^4; \quad \varphi(e^4) = \frac{t_{00}}{t_{22}}e^4
\end{aligned}$$

При этом $\dim(\mathrm{Ortaut}\ C_3(\varrho)) = 7$ *и* t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{21}, $t_{22} \neq 0$, t_{23}, t_{28} *— независимые параметры.*

References

[1] А.Т.Гайнов, $\mathbb{Z}_3$*–Ортоградуированные квазимонокомпозиционные алгебры с одномерной нуль–компонентой,* Сибирские электронные математические известия (`http://semr.math.nsc.ru`), **2** (2005), 141-144.

Алексей Тимофеевич Гайнов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `gainov@math.nsc.ru`