S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 167–185 (2005) УДК 514.17
MSC 13A99

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ПО ФУНКЦИОНАЛАМ ОТ НИХ

В.Н. СТЕПАНОВ

Abstract. The problems of determination of convex bodies and non-convex analytical manifolds in R^n from projections, curvature integrals, sections and measures of sections of its polar are considered.

Введение

Обратные задачи реконструкции геометрического объекта по данным о его проекциях, сечениях или по различным измерениям проекций, сечений, освещенных частей (функционалы геометрического объекта) относятся к задачам геометрической томографии [25]. Геометрическая томография применяется во многих областях: медицина, биология, робототехника (идентификация положения и формы геометрической цели), математическая экономика, геофизика, стереология и др. Основателями аналитических основ томографии считаются Д. Радон, П. Функ, А.Д. Александров. Методы исследования задач геометрической томографии включают, как часть, теорию смешанных объемов Брунна–Минковского, теорию двойственных объемов Лутвака, классические результаты "геометрии в целом", интегральнуя геометрию.

Исследование многих задач геометрической томографии приводит к интегральным преобразованиям таким, как преобразование Радона на грассмановом многообразии $G(n,i)$ i-мерных подпространств в R^n, сферическое преобразование Радона, полусферическое преобразование Радона, косинус-преобразование на сфере S^{n-1} в R^n. Этим интегральным преобразованиям и их связям с выпуклыми и звездными телами посвящено большое количество работ (см., например, [23, 30, 31, 32, 34, 35, 36]). Так как перечисленные преобразования находят широкое применение в геометрической томографии, то важны формулы

Stepanov V.N., Determination of compact subsets from functionals on them.

Поступила 30 июня 2005 г., опубликована 5 сентября 2005 г.

их обращения. Формулы обращения и результаты их взаимодействия с задачами геометрической томографии получены в работах П. Функа [24], Д. Радона [42], С. Хелгасона [20, 37], А. Колдобски [28, 38], Б. Рабина [43, 44, 45, 46]. Так, в [28, 39, 40], предложен новый подход к изучению сечений звездных тел, основанный на методах Фурье-анализа. Идея состоит в том, чтобы выразить некоторые свойства тел в терминах преобразования Фурье и применить методы гармонического анализа к решению геометрических проблем. Этот подход ведет к решению некоторых проблем о сечениях выпуклых тел в R^n и к аналитическому решению проблемы Буземанна–Петти. Полусферическое преобразование Радона и близкие к нему интегральные преобразования рассматривалось в работах [17, 36, 47, 49].

В геометрической томографии важное значение имеют проекционные функции выпуклых тел $V_i(K|S)$ и функции сечений звездных тел $V_{k,i}(L \cap S), S \in G(n,i)$, (см. [25]). Проблема определения выпуклого тела по его проекционным функциям $V_i(K|S)$ восходит еще к Боннезену и Фенхелю [8, с. 56], которые предполагали, что заданием проекционных функций выпуклое тело определяется однозначно. Вопреки предположению Боннезена и Фенхеля в [33] доказано существование выпуклых тел, которые не определяются всеми проекционным функциям $V_i(K|S)$, $i = 1, 2, ..., n$. Обширная информация о восстановлении выпуклых и звездных тел по данным об их функциях сечений приведена в [25, 26]. Вопросы восстановления и устойчивости восстановления компактов по их проекциям и сечениям исследовались В.П.Голубятниковым (см., например, [9, 10] и книгу [29]) , А.В. Кузьминых [11], Бартоном [21]. Метод восстановления формы невыпуклых тел и рассеивающих параметров по фотометрическим измерениям и обобщенной функции яркости рассмотрен в [41].

1. Интегральные преобразования на сфере

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в R^n; u, v — точки на S^{n-1}; $\mathcal{M}$ — банахово пространство знакопеременных мер (зарядов) на S^{n-1} с нормой $\|\mu\| = |\mu|(S^{n-1})$, где $|\mu|(S^{n-1})$ — полная вариация знакопеременной меры μ на S^{n-1}.

Рассмотрим уравнение первого рода

$$f(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\mu(dv) \tag{1.1}$$

относительно меры μ на S^{n-1}, $K(\langle u, v\rangle)$ - заданная функция (ядро).

Пусть $\{Y_k(u)\}$ — полная система сферических функций на S^{n-1}. Введем моменты знакопеременной меры μ по системе $\{Y_k(u)\}$:

$$\mu_k = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(du). \tag{1.2}$$

Лемма 1.1. *Мера μ на S^{n-1} однозначно определяется своими моментами μ_k, $k = 0, 1, 2, ...$, по системе $\{Y_k(u)\}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что из равенств

$$\int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(du) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1.3}$$

следует равенство $\mu \equiv 0$. Действительно, замыкание (по норме $L_1(S^{n-1})$) линейной оболочки множества $\{Y_k(u)\}$ совпадает с $L_1(S^{n-1})$. Поэтому из равенств (1.3) следует равенство

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(u)\mu(du) = 0 \tag{1.4}$$

для любой функции $\varphi(u) \in L_1(S^{n-1})$. Так как характеристические функции являются элементами пространства $L_1(S^{n-1})$, то равенство (1.4) справедливо для характеристических функций. Следовательно, $\mu(Q) = 0$ для любого измеримого множества Q на S^{n-1}. $\square$

Пусть μ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, — моменты некоторой знакопеременной меры μ. Используя формулу Лапласа для сферических функций [16] и формулу (1.2) для моментов, получаем оценку

$$|\mu_k| \le c(n)k^{\frac{n}{2}-1}|\mu|(S^{n-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $c(n)$ постоянная, зависящая только от n. Без каких-либо предположений на меру μ эту оценку улучшить невозможно. В этой связи представляют интерес следующие два утверждения.

Лемма 1.2. *Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S^{n-1}, то ее моменты $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\mu(u) \in L_1(S^{n-1})$ — плотность меры μ относительно меры Лебега на S^{n-1}. Тогда

$$\mu_k = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(u)d\,u.$$

Покажем, что $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$. Действительно, если $\chi_E(u)$ характеристическая функция множества $E \subset S^{n-1}$, то ее моменты

$$\mu_k^E = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\chi_E(u)d\,u = \int_E Y_k(u)d\,u \to 0, \quad k \to \infty,$$

так как μ_k^E — это коэффициенты Фурье функции $\chi_E(u) \in L_1(S^{n-1})$. Тогда утверждение верно для линейных комбинаций характеристических функций измеримых множеств E из S^{n-1}. Поскольку характеристические функции плотны в $L_1(S^{n-1})$, то утверждение верно для любой функции $\mu(u) \in L_1(S^{n-1})$. Заметим, что это утверждение является аналогом известной леммы Римана-Лебега. $\square$

Лемма 1.3. *Если для меры μ последовательность ее моментов $\{\mu_k\} \subset l_2$, то мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S^{n-1}.*

Доказательство. Так как последовательность $\{\mu_k\} \subset l_2$, то по теореме Рисса-Фишера существует единственная функция $\mu(u) \in L_2(S^{n-1})$ такая, что

$$\mu_k = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(u)d\,u, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Следовательно, для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(d\,u) = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\mu(\,u)d\,u.$$

В силу леммы 1.1 и теоремы Радона–Никодима, мера μ абсолютно непрерывна и $\mu(u)$ ее плотность. $\square$

Теорема 1.1. *Если ядро $K(\langle u,v\rangle) \in L_1[-1,1]$ и линейная оболочка системы его собственных функций плотна в $L_1(S^{n-1})$, то уравнение (1.1) имеет не более одного решения в пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Уравнение (1.1) умножим на $Y_k(u)$, проинтегрируем по мере Лебега du и применим теорему Фубини. Получим:

$$\int_{S^{n-1}} f(u)Y_k(u)\,du = \int_{S^{n-1}} Y_k(u)\left(\int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)\,\mu(dv)\right)du = \int_{S^{n-1}} du$$
$$\left(\int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)\,Y_k(u)\mu(dv)\right) = \int_{S^{n-1}}\left(\int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)\,Y_k(u)\,d\,u\right)\mu(dv)$$

По теореме Функа–Гекке [22] собственными функциями ядра $K(\langle u,v\rangle)$ являются сферические функции

$$\int_{S^{n-1}} K(\langle u,v\rangle)\,Y_k(u)\,d\,u = \lambda_k Y_k(v), \quad k \in \{0,1,2,...\}\,,$$

а собственные значения равны:

$$\lambda_k = \frac{\Gamma(n-2)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-2)} \int_{S^{n-1}} K\left(\langle u,v\rangle\right)\, C_k^{(\frac{n}{2}-1)}\left(\langle u,v\rangle\right)dv, \tag{1.5}$$

где $C_k^{(\frac{n}{2}-1)}(\cdot)$ — многочлены Гегенбауэра. Поэтому, в силу предыдущего равенства и равенств (1.2),

$$f_k = \int_{S^{n-1}} f(u)Y_k(u)du = \lambda_k\mu_k, \quad k \in \{0,1,2,...\}\,.$$

Следовательно, по коэффициентам Фурье f_k функции $f(u)$ однозначно определяются моменты меры μ по системе собственных функций ядра $K(\langle u,v\rangle)$: $\mu_k = \frac{f_k}{\lambda k}$, $k \in \{0,1,2...\}$. Так как ядро $K(\langle u,v\rangle)$ — полное, то $\lambda_k \neq 0$, $k \in \{0,1,2,...\}$. Как и при доказательстве леммы 1.1, заключаем, что мера μ однозначно определяется своими моментами. □

Пусть $\overline{lin(\{Y_k\})}$ — замыкание линейной оболочки системы собственных функций ядра $K(\langle u,v\rangle)$, $L_1^{\pm}(S^{n-1})$ — пространство четных (нечетных) интегрируемых на S^{n-1} функций, $\mathcal{M}^{\pm}$ — пространство симметричных (антисимметричных) мер на S^{n-1} (то есть, удовлетворяющих соответственно условиям: $\mu(-Q) = \mu(Q),\ \mu(-Q) = -\mu(Q),\ Q \subset S^{n-1}$).

Замечание 1.1. *Если $\overline{lin(\{Y_k\})} = L_1^{+}(S^{n-1})$ или $\overline{lin(\{Y_k\})} = L_1^{-}(S^{n-1})$, то уравнение (1.1) имеет не более одного решения в пространстве $\mathcal{M}^+$ или соответственно в $\mathcal{M}^-$.*

Частными случаями уравнения (1.1) являются следующие уравнения [25]:

а) сферическое преобразование Радона четной функции $f(u)$

$$(Rf)(u) \equiv \bar{f}(u) = \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{S_u^{n-2}} f(v)\,\lambda_u(dv), \tag{1.6}$$

где $S_u^{n-2} = \{v \in S^{n-1} | \langle v,u\rangle = 0\} = S^{n-1} \cap u^{\perp}$ — большая подсфера с полюсом в u; $\lambda_u(\cdot)$ — $(n-2)$-мерная сферическая мера Лебега на подсфере S_u^{n-2}; ω_k — мера площади k-мерной сферы S^k;

б) косинус-преобразование четной функции

$$(Tf)(u) \equiv \tilde{f}(u) = \int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, f(v)\lambda_{n-1}(dv), \tag{1.7}$$

где $\lambda_{n-1}(\cdot)$ — $(n-1)$-мерная сферическая мера Лебега на S^{n-1}. Собственными функциями уравнения (1.7) с ядром $K(\langle u,v\rangle)=|\langle u,v\rangle|$ являются сферические функции четных порядков $Y_{2k}(u)$, $k=0,1,2,\ldots$. Соответствующие собственные значения λ_{2k} вычисляются по формуле (1.5) с использованием рекуррентной формулы для многочленов Гегенбауэра и формулы Родрига [22] и равны:

$$\lambda_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{\pi}\,\omega_{n-2}\,(n-2)\Gamma(n-2)(2k)!}{2^{2k+n-3}\Gamma(n/2)k!(2k-1)(2k-1+n)\Gamma(k+(n-1)/2)};$$

в) полусферическое преобразование нечетной функции

$$(Hf)(u)\equiv\hat{f}(u)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}\chi(\langle u,v\rangle)f(v)\lambda_{n-1}(dv), \tag{1.8}$$

где $\chi(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Собственными функциями ядра $K(\langle u,v\rangle)=\chi(\langle u,v\rangle)$ являются сферическая функция нулевого порядка Y_0 и сферические функции нечетных порядков $Y_{2k+1}(u), k=0,1,2,...$, а соответствующие собственные значения λ_{2k+1} равны:

$$\lambda_0=\omega_{n-2}\,\delta_n\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!},\ \delta_n=\frac{\pi}{2},\ n=2m;\ \delta_n=1,\ n=2m+1,$$

$$\lambda_{2k+1}=(-1)^k\frac{\omega_{n-2}(n-2)\Gamma(n-2)\,\Gamma(k+n/2)\Gamma(2k+2)}{k!(2k+1)(2k+n-1)\Gamma(n/2)\Gamma(2k+n-1)}.$$

Из явных представлений для собственных значений λ_{2k} и λ_{2k+1} легко получается их асимптотика при $k\to\infty$:

$$\lambda_{2k}\sim c_1(n)k^{-n/2-1};\qquad \lambda_{2k+1}\sim c_2(n)k^{-n/2}. \tag{1.9}$$

Сферическое преобразование Радона, косинус-преобразование, полусферическое преобразование находят широкое применение в геометрии выпуклых тел (зоноиды, проекционные функции и связанные вопросы см. [25]). Поэтому важны формулы обращения для этих интегральных преобразований. Формула обращения сферического преобразования Радона (1.6) может быть получена из общей формулы обращения Хелгасона [37]. Из работы [37] следует, что четная непрерывная на S^{n-1}, $n\geq 3$, функция $f(u)$ определяется из уравнения (1.6) по формуле:

$$f(u)=$$
$$=\frac{2^{n-2}}{(n-3)!\,\omega_{n-2}}\left(\frac{d}{dz^2}\right)^{(n-2)}\left[\int_0^z(z^2-\tau^2)^{n/2-2}d\,\tau\int_{\langle u,v\rangle^2=1-\tau^2}\bar{f}(v)\lambda_u^\tau(dv)\right]\Bigg|_{z=1},$$

в которой λ_u^τ — $(n-2)$-мерная мера Лебега на $\langle u,v\rangle^2=1-\tau^2$. Если в этой формуле сделать замену $t^2=1-z^2$, $\tau^2=1-y^2$, то после несложных преобразований формула обращения сферического преобразования Радона принимает вид:

(1.10)
$$f(u)=\frac{(-1)^{(n-2)}2^{n-2}}{(n-3)!\,\omega_{n-2}}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{(n-2)}\left[\int_{\langle u,v\rangle^2\geq t^2}\frac{\bar{f}(v)\,|\langle u,v\rangle|\,\lambda_{n-1}(dv)}{\left(\langle u,v\rangle^2-t\right)^{2-n/2}}\right]\Bigg|_{t=0}.$$

Если $n = 3$, то формула (1.10) совпадает с формулой обращения, полученной А.В. Погореловым [14].

Из формулы обращения уравнения (1.6) можно получить формулы обращения уравнений (1.7) и (1.8).

Косинус-преобразование тесно связано со сферическим преобразованием Радона. В работе [32] показано, что $\Box T = R$ и $T^{-1} = \Box R^{-1}$, где оператор $\Box = (\triangle + n - 1)/2\omega_{n-2}$, поэтому формула обращения для косинус-преобразования имеет вид:

(1.11)
$$f(u) = \frac{(-1)^{(n-2)}2^{n-2}}{(n-3)!\,\omega_{n-2}} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{(n-2)} \left[\int_{\langle u,v\rangle^2 \geq t^2} \frac{([\Box T]f)(v)\,|\langle u,v\rangle|\,\lambda_{n-1}(dv)}{\Big(\langle u,v\rangle^2 - t\Big)^{2-n/2}}\right]\Bigg|_{t=0}.$$

Предположим теперь, что $f(u)$ — нечетная непрерывная функция на S^{n-1}. Рассмотрим полусферическое преобразование $(Hf)(u)$. Получим формулу обращения для полусферического преобразования. Функцию $\hat{f}(u) = (Hf)(u)$ продолжим на $R^n \backslash \{0\}$, полагая $\hat{f}(x) = \hat{f}(\frac{x}{|x|})$. Так как $\chi(t)$ — однородная функция степени 0, то

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \chi\left(\langle x,v\rangle\right) f(v)\lambda_{n-1}(d\,v).$$

Дифференцируя по x_i, получим:

$$\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=u} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \delta\left(\langle u,v\rangle\right) v_i f(v)\lambda_{n-1}(d\,v) =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}\cap u^{\perp}} v_i f(v)\lambda_u(d\,v),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, $\lambda_{n-1}(d\,v) = (1 - \langle u,v\rangle^2)^{\frac{n-3}{2}}\lambda_u(d\,v)$, $v \in S^{n-1} \cap u^{\perp}$. Применяя формулу обращения (1.10) для сферического преобразования Радона, находим:

(1.12)
$$v_i f(v) = \frac{(-1)^{(n-2)}2^{n-2}}{(n-3)!\,\omega_{n-2}} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{(n-2)} \left[\int_{\langle u,v\rangle^2 \geq t^2} \frac{\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=u}|\langle u,v\rangle|\,\lambda_{n-1}(du)}{\Big(\langle u,v\rangle^2 - t\Big)^{2-n/2}}\right]\Bigg|_{t=0}.$$

Умножая равенства (1.12) на v_i и суммируя, получаем формулу обращения для полусферического преобразования Радона:

(1.13)
$$f(v) = \frac{(-1)^{(n-2)}2^{n-2}}{(n-3)!\,\omega_{n-2}} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{(n-2)} \left[\int_{\langle u,v\rangle^2 \geq t^2} \frac{\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial v}\Big|_{x=u}|\langle u,v\rangle|\,\lambda_{n-1}(du)}{\Big(\langle u,v\rangle^2 - t\Big)^{2-n/2}}\right]\Bigg|_{t=0}.$$

В работе [18] формула обращения в R^3 была получена с помощью разложения по сферическим гармоникам.

Используя представленные формулы обращения для косинус-преобразования и полусферического преобразования можно получить формулу обращения для уравнения первого рода

$$\varphi(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle) z(v) \lambda_{n-1}(dv)$$

с ядром $K(\langle u, v\rangle) = a|\langle u, v\rangle| + b\chi(\langle u, v\rangle)$, где a и b — постоянные. Конструктивно это делается так. Берется четная $\varphi^+(u)$ и нечетная $\varphi^-(u)$ части функции $\varphi(u)$. При этом четная часть $z^+(u)$ искомой функции будет косинус-преобразованием преобразованием, а нечетная часть $z^-(u)$ — полусферическим преобразованием.

Применение формулы обращения сферического преобразования Радона позволяет исследовать и более общие уравнения. Рассмотрим, например, уравнение первого рода относительно функции $z(v)$

$$f_K(u) = \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{S_u^{n-1}} K(\langle u, Mz(v)\rangle; \alpha) z(v) \lambda_u(d\,v),$$

$Mz(v)$ — векторный оператор, α — параметр. Перепишем это уравнение в виде $f^*(u) = (Rz)(u)$, где

$$f^*(u) = f_K(u) + \frac{1}{\omega_{n-2}} \int_{S_u^{n-1}} (1 - K(\langle u, Mz(v)\rangle; \alpha)) z(v) \lambda_u(d\,v).$$

Применяя формулу обращения (1.10), получим уравнение второго рода $z(u) = A_\alpha z(u) + b(u)$ с известным оператором A_α. Для исследования единственности решения этого уравнения могут быть привлечены известные методы. Такой прием сведения уравнения первого рода к уравнению второго рода был использован в случае ядра $K(\langle u, Mz(v)\rangle; \alpha)$ специального вида в работах [6, 19].

2. Определение выпуклых тел по интегралам кривизны

Пусть B — замкнутая выпуклая гиперповерхность в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Рассмотрим, связанные с поверхностью B, интегралы:

$$V_m(u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| \sigma_m(d\,v) \tag{2.1}$$

$$W_m(u) = \int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle)\, \sigma_m(d\,v), \tag{2.2}$$

где $\sigma_m(Q)$ — m-я функция кривизны выпуклой гиперповерхности B, $1 \le m \le n-1$, [2] ; Q — измеримое множество на S^{n-1}; $d\,v$ — евклидов элемент площади на S^{n-1}; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение; $\chi(t)$ — функция Хевисайда. При $n = 3$, $m = 2$ функции $V_2(u)\,, W_2(u)$ имеют следующий простой геометрический смысл: $V_2(u)$ — площадь ортогональной проекции поверхности B на плоскость ортогональную вектору u; $W_2(u)$ — площадь освещенной в направлении u части поверхности B. Функция $V_m(u)$ называется m-м интегралом кривизны проекции выпуклой гиперповерхности [2]. Функцию $W_m(u)$ назовем m-м интегралом кривизны освещенной части. Задачи определения выпуклой поверхности по ее интегралам кривизны рассматривались в работах [2, 4, 7]. Применяя теорему 1.1 для ядер $K(\langle u, v\rangle) = |\langle u, v\rangle|$ и $K(\langle u, v\rangle) = \chi(\langle u, v\rangle) - \frac{1}{2}$, получаем следующий результат:

Теорема 2.1. *Замкнутая выпуклая гиперповерхность B однозначно с точностью до параллельного переноса определяется m-ми интегралами кривизны $V_m(u)$ и $W_m(u)$ при фиксированном m, $1 \le m \le n-1$.*

Доказательство. По теореме А.Д. Александрова выпуклая поверхность заданием m-й функции кривизны $\sigma_m(Q)$, $1 \le m \le n-1$, определяется однозначно с точностью до параллельного переноса [2]. Из уравнения (2.1) однозначно определяется четная часть $\sigma_m^+(Q) = \frac{1}{2}\left[\sigma_m(Q) + \sigma_m(-Q)\right]$ m-й функции кривизны [2]. Поэтому достаточно показать, что из уравнения (2.2) однозначно определяется нечетная часть $\sigma_m^-(Q) = \frac{1}{2}\left[\sigma_m(Q) - \sigma_m(-Q)\right]$ m-й функции кривизны.

Уравнение (2.2) перепишем в виде:

$$W_m(u) - \frac{1}{2}\sigma_m^+(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \left[\chi(\langle u, v\rangle) - 1/2\right] \sigma_m(dv).$$

Интегрируя уравнение (2.1) и учитывая равенство

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| du = \frac{2\omega_{n-2}}{n-1},$$

находим:

$$\sigma_m^+(S^{n-1}) = \frac{n-1}{\omega_{n-2}} \int_{S^{n-1}} V_m(u) du.$$

Потому для $\sigma_m^-(Q)$ получаем уравнение

$$\widetilde{W}_m(u) = \int_{S^{n-1}} \left[\chi(\langle u, v\rangle) - 1/2\right] \sigma_m^-(dv), \tag{2.3}$$

где

$$\widetilde{W}_m(u) = W_m(u) - \frac{n-1}{2\omega_{n-2}} \int_{S^{n-1}} V_m(u) du$$

- известная функция. Собственные функции ядра $K(\langle u, v\rangle) = \chi(\langle u, v\rangle) - \frac{1}{2}$ равны $Y_{2k+1}(u)$, $k = 0, 1, 2, ...$ и их линейная оболочка плотна в пространстве $L_1^-(S^{n-1})$ нечетных интегрируемых функций на S^{n-1}. Следовательно, по теореме 1.1 уравнение (2.3) имеет не более одного решения в пространстве $\mathcal{M}^-$ антисимметричных мер на S^{n-1}. Эта теорема обобщает результат Ю.Е. Аниконова [4]. □

Если гиперповерхность B гладкая, то, используя формулы обращения, можно из уравнений (2.1) и (2.2) получить в явном виде формулу для элементарно-симметрической функции $S_m(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ порядка m от главных радиусов кривизны $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ гиперповерхности B.

Теорема 2.2. *Для того чтобы гиперповерхность B была аналитической необходимо и достаточно, чтобы функции $V_m(u)$ и $W_m(u)$ были аналитическими.*

Доказательство. Пусть гиперповерхность B — аналитическая. Тогда m-ая функция кривизны $\sigma_m(Q)$ гиперповерхности B абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S^{n-1} и ее плотность равна $(C_{n-1}^m)^{-1} S_m(R_1, \dots, R_{n-1})$, где C_{n-1}^m — биномиальный коэффициент [1]. Следовательно, $V_m(u)$ и $W_m(u)$ можно записать в виде:

$$V_m(u) = \frac{1}{2C_{n-1}^m} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| S_m(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})\, dv,$$

$$W_m(u) = \frac{1}{C_{n-1}^m} \int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle) S_m(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})\, dv.$$

Опорная функция $H(u)$ аналитической поверхности — аналитическая на S^{n-1} функция. Так как главные радиусы кривизны гиперповерхности удовлетворяют уравнению $det \parallel H_{ij} - R\delta_{ij} \parallel = 0$, то из этого следует, что функция $S_m(R_1, R_2,$
..., $R_{n-1})$ аналитическая на S^{n-1}. Коэффициенты Фурье a_{2k} аналитической на S^{n-1} функции $S_m^+(R_1, R_2, ..., R_{n-1})$ убывают по экспоненциальному закону с ростом номера k, то есть $|a_{2k}| \le c\, e^{-\eta 2k}$ [16]. Пусть $f_{2k} = \lambda_{2k} a_{2k}$ — коэффициенты Фурье функции $V_m(u)$. Так как $\lambda_{2k} \sim c_1(n) k^{-n/2-1}$, $k \to \infty$, то $|f_{2k}| \le c_1 e^{-\eta_1 2k}$ с некоторыми положительными постоянными c_1 и η_1. Следовательно, $V_m(u)$ — аналитическая функция на S^{n-1}[16]. Аналогично доказывается аналитичность функции $W_m(u)$.

Обратно. Пусть $V_m(u)$ и $W_m(u)$, а, значит, и $\widetilde{W}_m(u)$ — аналитические на S^{n-1} функции. Обозначим через $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность моментов меры $\sigma_m(Q)$ относительно ортонормированной системы $\{Y_k(u)\}$. При доказательстве теоремы 1.1 было получено, что $f_k = \lambda_k \mu_k$, где f_{2k}, f_{2k+1} — соответственно коэффициенты Фурье функций $V_m(u)$ и $W_m(u)$, а λ_{2k} и λ_{2k+1} — соответственно собственные значения ядер $|\langle u, v\rangle|$ и $\chi(\langle u, v\rangle) - 1/2$. Собственные значения этих ядер приведены выше и при $k \to \infty$ имеют асимптотику (1.9). Коэффициенты Фурье аналитической функции по сферическим гармоникам убывают экспоненциально с ростом номера k [16]. Так как $V_m(u)$ и $W_m(u)$ аналитические на S^{n-1} функции, то в силу равенств $\mu_k = \frac{f_k}{\lambda k}$ и асимптотического поведения f_k, λ_k, моменты мер $\sigma_m^+(Q)$ и $\sigma_m^-(Q)$ также убывают экспоненциально с ростом номера k. В таком случае, согласно лемме 1.1, меры $\sigma_m^+(Q)$ и $\sigma_m^-(Q)$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на S^{n-1}. Плотности мер $\sigma_m^+(Q)$ и $\sigma_m^-(Q)$ соответственно равны

$$R^+(u) = (C_{n-1}^m)^{-1} S_m^+(R_1, \ldots, R_{n-1}), \quad R^-(u) = (C_{n-1}^m)^{-1} S_m^-(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}).$$

По теореме Радона–Никодима для почти всех $u \in S^{n-1} : \sigma_m^+(du) = R^+(u)\, du$, $\sigma_m^-(du) = R^-(u)\, du$, где $R^\pm(u) \in L_1(S^{n-1})$. Поэтому для аналитических функций $V_m(u)$ и $\widetilde{W}_m(u)$ имеют место представления:

$$V_m(u) = \frac{1}{2C_{n-1}^m} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, S_m^+(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})\, dv,$$

$$\widetilde{W}_m(u) = \frac{1}{C_{n-1}^m} \int_{S^{n-1}} \chi\, [\langle u, v\rangle - 1/2]\, S_m^-(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})\, dv.$$

Разложим функции $V_m(u)$ и $\widetilde{W}_m(u)$ в ряды по ортонормированным системам $\{Y_{2k}(u)\}$ и $\{Y_{2k+1}(u)\}$:

$$V_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} Y_{2k}(u), \quad \widetilde{W}_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} Y_{2k+1}(u).$$

Так как собственные значения ядер $|\langle u, v\rangle|$ и $\chi(\langle u, v\rangle) - 1/2$ известны и равны λ_{2k}, λ_{2k+1} соответственно, то разложения функций $S_m^+(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ и $S_m^-(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ в ряды Фурье имеют вид:

$$S_m^+(R_1, \ldots, R_{n-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k}}{\lambda_{2k}} Y_{2k}(u), \quad S_m^-(R_1, \ldots, R_{n-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{2k+1}}{\lambda_{2k+1}} Y_{2k+1}(u).$$

Из асимптотического поведения f_k и λ_k заключаем, что коэффициенты Фурье функций S_m^+ и S_m^- убывают экспоненциально с ростом номера k. Следовательно, $S_m^+(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ и $S_m^-(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ — аналитические функции на S^{n-1} [16]. Поэтому функция $S_m(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ — аналитическая на S^{n-1}. По теореме А.В. Погорелова об обобщенном решении проблемы Минковского [15] гиперповерхность B является аналитической. □

А.Д. Александров показал, что выпуклая центрально-симметричная поверхность однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется любым из интегралов кривизны проекции $V_m(u)$ [2]. Из предыдущей теоремы следует: *центрально-симметричная выпуклая гиперповерхность является аналитической тогда и только тогда, когда функция $V_m(u)$ аналитическая на S^{n-1}*.

Рассмотрим вопрос о существовании выпуклой центрально-симметричной поверхности с заданным интегралом кривизны.

Вещественная функция $K(x)$ на R^n называется условно положительно определенной, если

$$\int_{R^n} \int_{R^n} K(x-y)\nu(dx)\nu(dy) \geqslant 0$$

для любой конечной знакопеременной меры ν, удовлетворяющей условию:

$$\int_{R^n} \nu(dx) = 0.$$

Необходимый и достаточный признак условной положительной определенности функции приведен в [13].

Теорема 2.3. *Пусть на единичной гиперсфере S^{n-1} задана непрерывная строго положительная четная функция $V(u)$ такая, что функция $-|x|V(x/|x|)$ является условно положительно определенной на R^n. Тогда существует замкнутая выпуклая центрально-симметричная гиперповерхность B, $(n-1)$-й интеграл кривизны проекции которой есть данная функция $V(u)$. Гиперповерхность B определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.*

Доказательство. При указанных в условиях теоремы ограничениях на функцию $V(u)$, существует единственная симметричная мера μ на S^{n-1} такая, что функция $V(u)$ допускает представление в виде [13]

$$V(u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| \, \mu(dv) \tag{2.4}$$

Так как мера μ симметрична, то

$$\int_{S^{n-1}} u\mu(du) = 0. \tag{2.5}$$

В силу непрерывности и строгой положительности функции $V(u)$ на S^{n-1}, выполнено неравенство:

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\mu(dv) = 2V(u) > 2a > 0, \quad u \in S^{n-1},\ a = const. \tag{2.6}$$

Из условий (2.5) и (2.6) по теореме А.Д. Александрова [3] следует, что существует только одна (с точностью до параллельного переноса) замкнутая выпуклая гиперповерхность B, для которой мера μ является поверхностной функцией (функцией кривизны порядка $(n-1)$). Так как мера μ симметрична, то поверхность B будет центрально-симметричной. В силу представления (2.4), функция $V(u)$ является $(n-1)$ -м интегралом кривизны проекции поверхности B на гиперплоскость с нормалью u. □

3. Определение аналитических многообразий

В этом разделе рассматриваются некоторые задачи определения невыпуклых аналитических многообразий проекциями, интегралами кривизны выпуклой оболочки многообразия, сечениями и мерами сечений поляры многообразия. Существенную роль здесь играют две теоремы Ю.Е. Аниконова [5] о выпуклой оболочке аналитического многообразия, вложенного в евклидово пространство.

Теорема A1 [6]. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \leq m \leq n-1$, многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в R^n, $n \geq 2$, однозначно определяется своей выпуклой оболочкой.*

Теорема A2 [6]. *Если выпуклая оболочка связного компактного m-мерного, $1 \leq m \leq n-1$, многообразия $\mathcal{M}$ без края, вложенного в R^n, $n \geq 2$, имеет аналитическую границу, то многообразие $\mathcal{M}$ — выпуклая и аналитическая гиперповерхность.*

Нам понадобятся некоторые свойства поляры невыпуклого множества.

Если M — произвольное непустое множество в R^n, то множество

$$M^0 = \{x \in R^n | \langle x, y\rangle \leq 1, \forall y \in M\}$$

называется полярой множества M относительно точки $0 \in R^n$ [12, 25, 48].

Пусть $\overline{H}_y = \{x \in R^n | \langle x, y\rangle \leq 1,\ y \in M\}$ — замкнутое полупространство, содержащее M, тогда [12]

$$M^0 = \bigcap_{y \in M} \overline{H}_y. \tag{3.1}$$

Некоторые из нижеследующих свойств поляры произвольного непустого множества M в R^n хорошо известны [12, 25, 48]. Доказательства можно найти, например, в [48]. Доказательства других свойств приводятся.

1. M^0 выпукло, замкнуто и содержит 0.
2. $(CoM)^0 = M^0$, CoM — выпуклая оболочка множества M.
3. $(\overline{M})^0 = M^0$, $\overline{M}$ — замыкание множества M.
4. $M \subset M^{00}$.
5. Если K — любое замкнутое выпуклое множество в R^n, содержащее точку 0, то $K^{00} = K$.
6. Если $M \subset R^n$ — непустое множество, то

$$M^{00} = \overline{Co(M \cup \{0\})}.$$

Доказательство. Для выпуклого множества M это свойство доказано в [12]. Пусть теперь M — произвольное непустое множество. По свойствам 2, 3 и по формуле (3.1) имеем:

$$(\overline{Co\,(M \cup \{0\})})^0 = (Co\,(M \cup \{0\}))^0 = (M \cup \{0\})^0 = \bigcap_{y \in M} \overline{H}_y \cap \overline{H}_0 = \bigcap_{y \in M} \overline{H}_y = M^0,$$

где $H_0 = R^n$. Поэтому $(\overline{Co\,(M \cup \{0\})})^{00} = M^{00}$. Так как множество $K = \overline{Co\,(M \cup \{0\})}$ замкнуто, выпукло и содержит точку 0, то по свойству 5 $(\overline{Co(M \cup \{0\})})^{00} = \overline{Co\,(M \cup \{0\})}$. Следовательно, $M^{00} = \overline{Co\,(M \cup \{0\})}$. □

В частности, справедливо следующее свойство 7.

7. Если $M \subset R^n$ — непустое множество, выпуклая оболочка которого содержит точку 0, то $M^{00} = \overline{Co\,(M \cup \{0\})} = \overline{Co\,(Co\,M \cup \{0\})} = \overline{CoM}$.

8. Пусть M_1 и M_2 — непустые множества в R^n и M_1^0, M_2^0 — их поляры относительно $0 \in R^n$, тогда из $M_1 \subset M_2$ следует: $M_1^0 \supset M_2^0$; из $M_1^0 \supset M_2^0$ следует: $M_1 \subset \overline{Co(M_2 \cup 0)}$.

9. Если $0 \in Co\,M_1 \cap Co\,M_2$, то $M_1^0 \supset M_2^0$ влечет $\overline{CoM}_1 \subset \overline{CoM}_2$.

Свойство 9 является частным случаем свойства 8, а доказательство свойства 8 для произвольных множеств M_1 и M_2 совпадает с доказательством в случае выпуклых M_1 и M_2 [12].

10. Множество $M \neq \varnothing$ ограничено тогда и только тогда, когда $0 \in IntM^0$.

Доказательство. Пусть множество M ограничено. Тогда найдется замкнутый шар $\overline{B}(o,\varepsilon) = \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ такой, что $M \subset \overline{B}(o,\varepsilon)$. По свойству 8 имеем: $B(0,\varepsilon^{-1}) \subset \overline{B}(0,\varepsilon^{-1}) = \overline{B}^0(o,\varepsilon) \subset M^0$. Следовательно, 0 — внутренняя точка множества M^0. Обратно, пусть $0 \in IntM^0$. Тогда M^0 содержит замкнутый шар $\overline{B}(o,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то есть $M^0 \supset \overline{B}(o,\varepsilon) = \overline{B}^0(o,\varepsilon^{-1})$. Из свойства 8 получаем: $M \subset \overline{Co\overline{B}(o,\varepsilon^{-1})} = \overline{B}(0,\varepsilon^{-1})$, следовательно, M — ограниченное множество. □

11. Множество M^0 ограничено тогда и только тогда, когда $0 \in IntCoM$.

Доказательство. Пусть $0 \in Int\,CoM$, следовательно, $0 \in Int\,\overline{CoM}$. По свойству 7: $0 \in Int\overline{CoM} = Int\,M^{00}$, следовательно, по свойству 10 множество M^0 ограничено. Обратно: пусть множество M^0 ограничено. Тогда найдется замкнутый шар $\overline{B}(0,\varepsilon)$ такой, что $M^0 \subset \overline{B}(0,\varepsilon) = \overline{B^0}(0,\varepsilon^{-1})$. По свойству 8 имеем: $B(0,\varepsilon^{-1}) \subset \overline{B}(0,\varepsilon^{-1}) \subset \overline{Co\,(M \cup \{0\})}$. Следовательно, 0 — внутренняя точка множества $Co\,(M \cup \{0\})$. Так как $Co\,(M \cup \{0\}) = Co\,(Co\,M \cup \{0\})$ и $Co\,(K_1 \cup K_2) = \bigcup_{x_i \in K_i} x_1x_2$ для выпуклых K_1 и K_2, то $0 \in Int\,Co\,(M \cup \{0\}) = Int\,Co\,(Co\,M \cup \{0\}) = Int \bigcup_{x \in Co\,M} ox$, поэтому $0 \in Int\,Co\,M$. □

12. Если M — компактное множество в R^n и точка 0 является внутренней точкой выпуклой оболочки множества M, то полярное множество M^0 есть компактное выпуклое множество, содержащее внутри точку 0. Свойство 12 следует из свойств 10 и 11.

Пусть $G(n,k), 1 \leq k \leq n-1$ — грассманово многообразие k-мерных подпространств в R^n; $M \subset R^n$ — некоторое множество; $lin\,M$ — линейная оболочка множества M [25]. Пусть $x \in R^n$ и $L_k \in G(n,k)$ — подпространство размерности k, $1 \leq k \leq n-1$. По теореме о проекции: $R^n = L_k \bigoplus L_k^{\perp}$, где $L_k^{\perp}$- ортогональное дополнение подпространства L_k, и любой элемент $x \in R^n$ однозначно представим в виде: $x = x' + x''$, $x' \in L_k$, $x'' \in L_k^{\perp}$. Как обычно, определим проекцию $\pi_k = \pi_{L_k}$ элемента $x \in R^n$ и проекцию множества M на подпространство L_k, полагая

$$\pi_k x = x', \quad \pi_k M \equiv M|L_k = \{\pi_k x | x \in M\}.$$

Следующее утверждение будет иметь важное значение.

Предложение 3.1. *Если $M \subset R^n$ любое непустое множество, то поляра проекции множества M на подпространство $L_k \in G(n,k), 1 \le k \le n-1$, совпадает с пересечением поляры множества M с подпространством L_k: $(M|L_k)^0 = M^0 \cap L_k$, где полярный оператор ^{0} слева берется в L_k.*

Доказательство. Рассмотрим множество $M^0 \cap L_k$.

$$M^0 \cap L_k = \{x \in R^n |\ \langle x, y\rangle \le 1, \forall y \in M\} \cap L_k = \{x \in L_k |\ \langle x, y\rangle \le 1, \forall y \in M\}.$$

По теореме о проекции элемент $y \in M$ можно представить в виде: $y = y' + y''$, где $y' \in M|L_k \subset L_k$, $y'' \in M|L_k^{\perp} \subset L_k^{\perp}$. Поэтому

$$M^0 \cap L_k = \{x \in L_k |\ \langle x, y'\rangle \le 1,\ y' \in M|L_k\},$$

так как множество $M^0 \cap L_k$ не зависит от $y'' \in L_k^{\perp}$.

С другой стороны

$$(M|L_k)^0 \overset{\text{def}}{=} \{x \in L_k |\ \langle x, y'\rangle \le 1, \forall\, y' \in M|L_k\}.$$

Следовательно, $(M|L_k)^0 = M^0 \cap L_k$.

Эта полярная двойственность между проекциями и сечениями хорошо известна для выпуклых множеств [12, 25, 48]. □

Ниже рассматривается возможность определения аналитических многообразий по проекциям, по мерам проекций выпуклой оболочки, по сечениям и мерам сечений поляры.

Теорема 3.1. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \le m \le n-1$, многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в $R^n, n \ge 2$, и содержащее начало внутри его выпуклой оболочки, однозначно определяется сечениями поляры $\mathcal{M}^0$ k-мерными подпространствами, $1 \le k \le n-1$.*

Доказательство. Так как многообразие $\mathcal{M}$ вложено в R^n и $0 \in Int Co\,\mathcal{M}$, то $lin\,\mathcal{M}^0 = R^n$, поэтому поляра $\mathcal{M}^0$ — компактное выпуклое n-мерное тело, содержащее внутри начало 0 (свойства 12 поляры). Пусть известны сечения $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ поляры $\mathcal{M}^0$ k-мерными подпространствами L_k, $2 \le k \le n-1$. Согласно предложению 3.1, $\mathcal{M}^0 \cap L_k = (\mathcal{M}|L_k)^0$, поэтому известны поляры $(\mathcal{M}|L_k)^0$ и биполяры $(\mathcal{M}|L_k)^{00}$ проекций $\mathcal{M}|L_k$. По свойству 6 поляры $(\mathcal{M}|L_k)^{00} = \overline{Co\,(\mathcal{M}|L_k \cup \{0\})} = \overline{Co\,(Co\,\mathcal{M}|L_k \cup \{0\})}$. Поскольку начало 0 — внутренняя точка $Co\,\mathcal{M}$, то 0 относительно внутренняя точка любой проекции $Co\,\mathcal{M}|L_k$. Следовательно, $(\mathcal{M}|L_k)^{00} = \overline{Co\,(Co\,\mathcal{M}|L_k)} = \overline{Co\,\mathcal{M}|L_k}$, ввиду выпуклости $Co\,\mathcal{M}|L_k$. Хорошо известно, (см., например, [25] теорема 3.1.1) что компактное выпуклое множество в R^n определяется по всем проекциям на k-мерные подпространства, $1 \le k \le n-1$. Следовательно, по проекциям $\overline{Co\,\mathcal{M}|L_k} = \overline{Co\,\mathcal{M}}|L_k$ однозначно определяется замыкание выпуклой оболочки многообразия $\mathcal{M}$. Используя теорему A1, заключаем, что многообразие $\mathcal{M}$ определяется однозначно. □

Далее в следствиях предполагается, что на многообразие наложены такие же условия, как в теореме.

Следствие 3.2. *Пусть $L_k \in G(n,k)$, $2 \le k \le n-1$, и любое сечение $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ поляры многообразия $\mathcal{M}$ есть k-мерный эллипсоид. Тогда многообразие $\mathcal{M}$ является границей эллипсоида.*

Доказательство. По условию $\mathcal{M}^0 \cap L_k = (\mathcal{M}|L_k)^0$ - k-мерный эллипсоид. Так как 0 относительно внутренняя точка эллипсоида $\mathcal{M}^0 \cap L_k$, то его поляра $(\mathcal{M}^0 \cap L_k)^0 = (\mathcal{M}|L_k)^{00} = \overline{Co\,\mathcal{M}|L}_k$ также является k-мерным эллипсоидом ([25], стр. 21). Следовательно, по теореме 3.1.7 в [25], $\overline{Co\,\mathcal{M}}$ — n-мерный эллипсоид. Так как граница эллипсоида — аналитическая гиперповерхность, то из теоремы A2 следует, что многообразие $\mathcal{M}$ совпадает с границей этого эллипсоида. □

Множество $E \subset R^n$ называется *центрированным*, если оно центрально- симметрично с центром в начале, то есть $x \in E$ влечет $-x \in E$.

Следствие 3.3. *Пусть $L_k \in G(n,k)$, $2 \le k \le n-1$, и любое сечение $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ поляры многообразия $\mathcal{M}$ есть k-мерный шар. Тогда многообразие $\mathcal{M}$ является границей центрированного n-мерного шара.*

Доказательство. Так как $0 \in Int\,\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ — k-шар, то по следствию 7.1.4 из [25] $\mathcal{M}^0$ — шар, $\mathcal{M}^0 = r\overline{B} + t$, $\overline{B} = \{x \in R^n : |x| \le 1\}$ — единичный шар, $t \in R^n$, $r \in R$. Сечения $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ имеют центры симметрии, следовательно, по теореме о фальшивом центре (теорема 7.1.10 в [25]), $\mathcal{M}^0$ — либо центрированное тело, либо эллипсоид. Эллипсоид исключается, так как $\mathcal{M}^0 = r\overline{B} + t$ — шар. Этот шар должен быть центрированным, поэтому $\mathcal{M}^0 = r\overline{B}$. Поскольку поляра центрированного шара снова центрированный шар, то $\mathcal{M}^{00} = (r\overline{B})^0 = r^{-1}\overline{B} = \overline{Co\,\mathcal{M}}$. Доказательство завершается также, как в следствии 3.2. □

Следствие 3.4. *Пусть $L_k \in G(n,k)$, $2 \le k \le n-1$, и любое сечение $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ поляры многообразия $\mathcal{M}$ есть тело постоянной ширины (в L_k). Тогда многообразие $\mathcal{M}$ является границей центрированного n-мерного шара.*

Доказательство. Так как $0 \in Int\,\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}^0 \cap L_k$ — тело постоянной ширины, то $\mathcal{M}^0$ — шар, в силу замечания 7.1.16 в [25]. Далее доказательство завершается также, как в следствии 3.3. □

Теорема 3.5. *Связное компактное аналитическое m-мерное многообразие $\mathcal{M}, 1 \le m \le n-1$, без края, вложенное в $R^n, n \ge 2$, однозначно определяется своими проекциями на k-мерные подпространства, $1 \le k \le n-1$.*

Доказательство. Выберем начало 0 так, чтобы $0 \in Int\,Co\mathcal{M}$. Пусть $L_k \in G(n,k)$ — k-мерное подпространство, $2 \le k \le n-1$, и $\mathcal{M}|L_k$ — проекция многообразия $\mathcal{M}$ на подпространство L_k. По проекциям $\mathcal{M}|L_k$ однозначно определяются их поляры $(\mathcal{M}|L_k)^0$. Согласно предложению 3.1, $(\mathcal{M}|L_k)^0 = \mathcal{M}^0 \cap L_k$, поэтому известны сечения компактного выпуклого множества $\mathcal{M}^0$, содержащего внутри точку 0, подпространствами L_k. По сечениям $\mathcal{M}^0 \cap L_k, L_k \in G(n,k), 2 \le k \le n-1$, поляра $\mathcal{M}^0$ определяется однозначно ([25], теоремы 7.1.1 и 7.1.9). Так как $\overline{Co\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{00}$, то по поляре $\mathcal{M}^0$ однозначно определяется замыкание выпуклой оболочки многообразия $\mathcal{M}$. По теореме A1 аналитическое многообразие $\mathcal{M}$ однозначно определяется своей выпуклой оболочкой.

В случае $k = 1$, проекции многообразия $\mathcal{M}$ на 1-мерные подпространства совпадают с проекциями выпуклой оболочки $Co\,\mathcal{M}$ на 1-мерные подпространства. По теореме 3.1.1 из [25], этими проекциями выпуклое тело $Co\,\mathcal{M}$ определяется однозначно. Следовательно, в силу теоремы A1, однозначно определяется и многообразие $\mathcal{M}$.

Другим способом (редукцией к теореме Зюсса), но также с существенным использованием теоремы A1, этот результат был ранее получен В.П. Голубятниковым [10], [29] для $2 \leq k \leq n-1$ и $n \geq 3$. □

Теорема 3.6. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \leq m \leq n-1$, центрированное многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в $R^n, n \geq 2$, однозначно определяется по λ_i-мерам всех сечений его поляры $\mathcal{M}^0$ i-мерными подпространствами для двух различных значений i, $1 \leq i \leq n-1$.*

Доказательство. Как и в теореме 3.1, $\mathcal{M}^0$ — компактное выпуклое n-мерное тело, содержащее внутри начало o и центрированное. Центрированное звездное тело L в R^n среди всех звездных тел определяется однозначно по функциям сечений $\lambda_i(L \cap L_i)$, $\lambda_j(L \cap L_j)$, $L_i \in G(n,i)$, $L_j \in G(n,j), i \neq j$ ([25] теорема 7.2.12 и [27]). Следовательно, поляра $\mathcal{M}^0$ и биполяра $\mathcal{M}^{00}$ известны. По свойству 6 поляры $\mathcal{M}^{00} = \overline{Co\,(\mathcal{M} \cup \{0\})} = \overline{Co\,(Co\,\mathcal{M} \cup \{0\})} = \overline{Co\,\mathcal{M}}$, так как $0 \in Int Co\,\mathcal{M}$. Снова, используя теорему A1, получим требуемое. □

Теорема 3.7. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \leq m \leq n-1$, центрированное многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в $R^n, n \geq 2$, однозначно определяется среди всех таких многообразий по λ_i-мерам всех сечений его поляры $\mathcal{M}^0$ i-мерными подпространствами, $1 \leq i \leq n-1$.*

Доказательство. Центрированное выпуклое (даже звездное) тело в R^n среди всех центрированных звездных тел определяется однозначно по λ_i-мерам сечений ([25] следствие 7.2.7, [26, 27]). В остальном доказательство совпадает с доказательством предыдущей теоремы. □

Применение следствия 7.2.16 и теоремы 7.2.9 из [25] приводит к следующим утверждениям.

Следствие 3.8. *Пусть $1 \leq i \neq j \leq n-1$ и $\lambda_i(\mathcal{M}^0 \cap L_i)$, $\lambda_j(\mathcal{M}^0 \cap L_j)$, $L_i \in G(n,i)$, $L_j \in G(n,j)$ постоянны, тогда многообразие $\mathcal{M}$ — центрированный шар.*

В условиях теоремы 3.7 имеет место

Следствие 3.9. *Пусть $1 \leq i \leq n-1$ и $\lambda_i(\mathcal{M}^0 \cap L_i) = const$, для всех $L_i \in G(n,i)$, тогда многообразие $\mathcal{M}$ — центрированный шар.*

Пусть E множество в R^n. Расстояние между противолежащими ориентированными опорными плоскостями называется шириной множества E. Ясно, что ширина всякого компактное m-мерного, $1 \leq m \leq n-1$, многообразия $\mathcal{M}$ без края, вложенного в R^n, в любом направлении совпадает с шириной его выпуклой оболочки $Co\,\mathcal{M}$.

Пусть известна ширина $w_{Co\,\mathcal{M}}(u)$ выпуклой оболочки многообразия $\mathcal{M}$ в любом направлении $u \in S^{n-1}$. Шириной выпуклое тело не определяется однозначно. Следовательно, аналитическое многообразие $\mathcal{M}$ не определяется шириной. Однако, если $\mathcal{M}$ — центрированное многообразие, то его выпуклая оболочка $Co\,\mathcal{M}$ — центрированное выпуклое тело. В этом случае $w_{Co\,\mathcal{M}}(u) = 2h_{Co\,\mathcal{M}}(u)$, где $h_{Co\,\mathcal{M}}(u)$ — опорная функция границы выпуклой оболочки. А так как выпуклая поверхность своей опорной функцией определяется однозначно, то имеет место

Теорема 3.10. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \le m \le n-1$, центрированное многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в $R^n, n \ge 3$, однозначно определяется функцией $w_{Co\,\mathcal{M}}(u)$ (шириной).*

Так как $h_{K+x}(u) = h_K(u) + \langle x, u\rangle$, где K — выпуклое тело, $x \in R^n$, то из теоремы следует, что центрально-симметричное многообразие по ширине определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

Пусть $\mathcal{M}$ — компактное связное многообразие без края, вложенное в R^n. Далее $V_i(Co\,\mathcal{M}, u)$ и $W_i(Co\,\mathcal{M}, u)$, $1 \le i \le n-1$, означают i-й интеграл кривизны проекции и i-й интеграла кривизны "освещенной части" границы выпуклой оболочки $\partial\, Co\,\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$.

Теорема 3.11. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \le m \le n-1$, многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в R^n, $n \ge 2$, однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется интегралами кривизны $V_i(Co\,\mathcal{M}, u)$ и $W_i(Co\,\mathcal{M}, u)$.*

Доказательство. Линейные оболочки $\mathcal{M}$ и $Co\,\mathcal{M}$ совпадают, поэтому $\partial\, Co\,\mathcal{M}$ -замкнутая выпуклая гиперповерхность в R^n. По теореме 2.1 $\partial\, Co\,\mathcal{M}$ однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется по функциям $V_i(Co\,\mathcal{M}, u)$ и $W_i(Co\,\mathcal{M}, u)$ при фиксированном i, $1 \le i \le n-1$. Применяя теорему А1, получаем, что и само многообразие определяется с точностью до параллельного переноса. $\square$

Теорема 3.12. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \le m \le n-1$, многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в R^n, $n \ge 2$, однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется по функции $\varphi(u) = 2aV_i(Co\,\mathcal{M}, u) + bW_i(Co\,\mathcal{M}, u))$, где a и b постоянные, удовлетворяющие условиям:*

$$a \ne 0, \quad b \ne 0, \quad \frac{2a}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{b\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \ne 0,$$

$\Gamma(x)$-гамма-функция.

Доказательство. Рассмотрим уравнение первого рода с ядром $K(\langle u, v\rangle) = a|\langle u, v\rangle| + b\chi(\langle u, v\rangle)$ относительно i - ой функции кривизны $\sigma_i(Co\,\mathcal{M}, \cdot)$ гиперповерхности $\partial\, Co\,\mathcal{M}$

$$\varphi(u) = \int_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\, \sigma_i^+(Co\,\mathcal{M}, d\,v) = 2aV_i(u) + bW_i(u),$$

где a и b — постоянные.

Возьмем четную и нечетную части функции $\varphi(u)$. Тогда для четной и нечетной части i-ой функции кривизны $\sigma_i(\cdot)$ получим уравнения:

$$\varphi_1(u) = \int_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, \sigma_i^+(Co\,\mathcal{M}, d\,v), \tag{3.2}$$

$$\varphi^-(u) = b\int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle)\, \sigma_i^-(Co\,\mathcal{M}, d\,v), \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{a}\varphi^+(u) - \frac{bc}{2a}\int_{S^{n-1}} \varphi^+(u)\, \sigma_i(Co\,\mathcal{M}, d\,v), \quad c = \pi^{\frac{1-n}{2}}\left[\frac{2a}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{b\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right]^{-1}.$$

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\frac{2a}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{b\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \neq 0$, то из уравнения (3.2) однозначно определяется четная, а из уравнения (3.3) — нечетная часть функции кривизны $\sigma_i(Co\,\mathcal{M},\cdot)$. Следовательно, по функции $\varphi(u)$ однозначно определяется i-ая функция кривизны $\sigma_i(Co\,\mathcal{M},\cdot)$ выпуклой оболочки многообразия $\mathcal{M}$. По теореме А.Д. Александрова выпуклая поверхность $Co\,\mathcal{M}$ заданием i-ой функции кривизны $\sigma_i(Co\,\mathcal{M},\cdot)$, $1 \leq i \leq n-1$, определяется однозначно с точностью до параллельного переноса [2, 25]. В силу теоремы А1, само многообразие также определяется с точностью до параллельного переноса. □

Пусть $\mathcal{M}$ — центрированное многообразие, то $Co\,\mathcal{M}$ — центрированное тело. Так как центрированная выпуклая поверхность однозначно определяется любым из интегралов кривизны проекции [2, 25], то имеет место

Теорема 3.13. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \leq m \leq n-1$, центрированное многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в R^n, $n \geq 3$, однозначно определяется интегралом кривизны проекции $V_i(Co\,\mathcal{M},u)$, $1 \leq i \leq n-1$.*

Применение теоремы А2 и теоремы 2.2 дает следующий результат.

Теорема 3.14. *Если интегралы кривизны $V_i(Co\,\mathcal{M},u)$ и $W_i(Co\,\mathcal{M},u)$ аналитические функции, то внешняя граница многообразия $\mathcal{M}$- выпуклая и аналитическая гиперповерхность.*

Теорема остается справедливой, если вместо $V_i(Co\,\mathcal{M},u)$ и $W_i(Co\,\mathcal{M},u)$ рассматривать функцию $\varphi(u)$, определенную выше.

Список литературы

[1] Александров А.Д., *К теории смешанных объемов выпуклых тел. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел*, Матем. сборник, **2**(5) (1937), 947–972.

[2] Александров А.Д., *К теории смешанных объемов выпуклых тел. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения*, Матем. сборник **2**(6) (1937), 1205–1238.

[3] Александров А.Д., *К теории смешанных объемов выпуклых тел. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела*, Матем. сборник **3**(1) (1938), 27–46.

[4] Аниконов Ю.Е., *Замечания о выпуклых поверхностях*, Сибирский матем. журнал, **9**(6) (1968), 1413–1415.

[5] Аниконов Ю.Е., Голубятников В.П. *К вопросу единственности решения обратных задач рассеяния. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики*, Сб. научн. тр. Новосибирск: ВЦ СО РАН СССР, 1978, 13–17.

[6] Аниконов Ю.Е., Степанов В.Н. *Формула обращения в одной задаче интегральной геометрии*, ДАН СССР **318**(2) (1991), 265–266.

[7] Аниконов Ю.Е., Степанов В.Н., *Единственность и устойчивость решения одной задачи геометрии в целом*, Матем. сборник, **116**(2) (1981), 539–546.

[8] Боннезен Т., Фенхель В., *Теория выпуклых тел*, Москва, Фазис, 2002.

[9] Голубятников В.П., *Об однозначной восстановимости выпуклых и обозримых компактов по их проекциям*, Матем. сборник, **181**(5) (1991), 611–621.

[10] Голубятников В.П., *О восстановлении формы тела по его проекциям*, ДАН СССР **262**(3) (1982), 521–522.

[11] Кузьминых А.В., *О восстановимости выпуклого тела по множеству его проекций*, Сибирский матем. журнал **25**(2) (1984),145–150.

[12] Лейхтвейс К., *Выпуклые множества*, Москва, Наука, 1985.

[13] Матерон Ж., *Случайные множества и интегральная геометрия*, Москва, Мир, 1978.

[14] Погорелов А.В., *Четвертая проблема Гильберта*, Москва, Наука, 1974.

[15] Погорелов А.В., *Многомерная проблема Минковского*, Москва, Наука, 1975.

[16] Соболев С.Л., *Введение в теорию кубатурных формул*, Москва, Наука, 1974.

[17] Степанов В.Н., *О восстановлении нечетной функции на сфере по значениям ее интегралов по поверхностям долек*, Омский гос. техн. ун-т. - Омск, 2001. -Деп. В ВИНИТИ 28.09.2001, No 2057-B2001.

[18] Степанов В.Н., *Некоторые вопросы геометрии выпуклых поверхностей*, Исследование корректности обратных задач и некоторых операторных уравнений, Сб. научн. тр. Новосибирск: ВЦ СО РАН СССР, (1981), 65–75.

[19] Степанов В.Н., *О единственности решения обратных задач рассеяния*, Дифференциальные уравнения **18**(4) (1982), 656–663.

[20] Хелгасон С., *Группы и геометрический анализ*, Москва, Мир, 1987.

[21] Burton G., *Sections of convex bodies*, J. London Math. Soc. (2) **12** (1976), 331–336.

[22] Bateman H., Erdelyi A., *Higher Transcendental Functions*, V. 2, 1955.

[23] Fallert H., Goodey P., Weil W., *Spherical projections and centrally symmetric sets*, Adv. Math. **129** (1997), 301–322.

[24] Funk P., *Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung*, Math. Ann. **77** (1916), 129–135.

[25] Gardner R.J., *Geometric tomography*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995.

[26] Gardner R.J., Volcic A., *Tomography of convex and star bodies*, Adv. Math. **108** (1994), 367–399.

[27] Gardner R., Soranzo A., Volčič A., *On the determination of star and convex bodies by section function*, Discrete and Computational Geometry **21** (1999), 69–85.

[28] Gardner R., Koldobsky A., Schlumprecht T., *An analytic solution to the Busemann-Petty problem on sections of convex bodies*, Ann. of Math. (2) **149** (1999), 691–703.

[29] Golubyatnikov V.P., *Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht, VSP, 2000.

[30] Goodey P., *Radon transforms of projection functions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 159–168.

[31] Goodey P., Weil W., *Centrally symmetric convex bodies and Radon transform on higher order Grassmannians*, Mathematika **38** (1991), 117–133.

[32] Goodey P., Weil W., *Centrally symmetric convex bodies and the spherical Radon transform*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 675–688.

[33] Goodey P., Schneider R., Weil W., *On the determitation of convex bodies by projection functions*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 82–88.

[34] Grinberg E., Quinto E., *Analytic continuation of convex bodies and Funk's characterization of the sphere*, Pacific J. of Math. **201** (2001), 309–322.

[35] Grinberg E., Zhang G., *Convolutios, transform and convex bodies*, Proc. London Math. Soc. **78** (1999), 77–115.

[36] Groemer H., *On a spherical integral transformation and section of star bodies*, Monatsch. Math. **126**(2) (1988), 117–124.

[37] Helgason S., *The totally-geodesic Radon transform on constant curvature spaces*, Contemporary Math., 113, 1990, 141–149.

[38] Koldobsky A., *Inverse formula for the Blaschke–Levy representation*, Houston J. Math. **23** (1997), 95–107.

[39] Koldobsky A., *An application of the Fourier transform to sections of star bodies*, Israel J. Math. **106** (1998), 157–164.

[40] Koldobsky A., *Sections of star bodies and the Fourier transform*, Preprint, 1991.

[41] Kaasalainen M., Muinonen K., Laakso T., *Shapes and scattering properties of large irregular bodies from photometric data*, Optics Express **8**(6) 12 March (2001), 296–301.

[42] Radon J., *Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat.K1. **69** (1917), 262–277.

[43] Rubin B., *Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke–Levy representations on the sphere*, Israel J. Math. **114** (1999), 1–27.

[44] Rubin B., *Inversion of fractional integrals related to the spherical Radon transform*, J. Functional Anal. **157** (1998), 470–487.

[45] Rubin B., *Spherical Radon transform and related wavelet transforms*, Appl. and Comput. Harmonic Analysis **5** (1998), 202–215.

[46] Rubin B., *Inversion and characterization of the hemispherical transform*, J. d'Analyse Math. **77** (1999), 105–128.
[47] Schneider R., *Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres*, J. Math. Analysis and Appl. **26** (1969), 381–384.
[48] Schneider R., *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
[49] Ungar P., *Freak theorem about function on a sphere*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 100–101.

Владимир Николаевич Степанов
Омский Государственный Технический Университет,
пр. Мира 11,
630010, Омск, Россия
E-mail address: stpnv@rol.ru