S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 145–155 (2005) УДК 519.634
MSC 13A99

О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М. О. КОРПУСОВ, А. Г. СВЕШНИКОВ

Abstract. We consider a certain initial boundary value problem for a strongly nonlinear Sobolev type equation of fifth order. We obtain a necessary and sufficient condition for blowing up of a solution.

1. Введение

В данной статье мы рассматриваем следующую начально-краевую задачу, описывающую квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии отрицательной дифференциальной проводимости, сильной пространственной дисперсии и нелинейной, анизотропной зависимости диэлектрической проводимости от электрического поля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u) = 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, причем $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$, $\delta \in (0,1]$, $p_1 > 2$, $p_2 > 2$.

Задача (1.1)–(1.2) возникает при исследовании квазистационарных процессов в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью

Korpusov, M.O., Sveshnikov, A.G., On a necessary and sufficient condition for a blowing up of a solution to a mixed boundary problem for a certain nonlinear equation of the Sobolev type.

Работа поддержана РФФИ (гранты 02-01-00253, 02-01-06038).

Поступила 23 июня 2005 г., опубликована 2 сентября 2005 г.

при наличии сильной пространственной дисперсии и нелинейной связи вектора индукции электрического поля от напряженности электрического поля [1].

Поскольку уравнение (1.1) содержит нелинейный эллиптический оператор при производной по времени, то методика работ [2], [3] по доказательству разрушения решения не применима. Наша техника доказательства разрушения, изложенная в работе [4], основана на методике работ [2], [3], но является её нетривиальным развитием. Заметим, что в работе [5] был исследован вопрос о разрушении решения обобщенного уравнения Буссинеска, родственного к (1.1), но с линейным оператором при производной по времени. Отметим также работу [6], в которой впервые было исследовано асимптотическое поведение при больших временах для обобщенного уравнения Буссинеска с линейным опрератором при производной по времени и кубической нелинейностью.

Уравнение (1.1) является уравнением типа Соболева, а точнее псевдопараболического типа. По поводу исследования линейных уравнений типа Соболева смотри прежде всего классическую работу С.Л. Соболева [7], а также монографии [8], [9] и библиографию к этим работам.

2. Локальная разрешимость задачи (1.1)–(1.2) в сильном обобщенном смысле.

Дадим определение сильного обобщенного решения

Определение 1. *Сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.2) называется решение класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}_0^2(\Omega))$, удовлетворяющее условиям*

$$\langle \mathbb{D}(u), w\rangle = 0, \ \ \forall\, w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \ \ \forall\, t \in [0,\mathrm{T}], \ \ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\mathbb{D}(u) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle^2 u - \triangle u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)\right) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u),$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Введем обозначение: $\overline{p} = \max\{p_1, p_2\}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$. Предположим, что либо $N \le 2$ либо $N \ge 3$ и тогда выполнено условие $\overline{p} \le 2N(N-2)^{-1}$. Тогда найдется такое максимальное $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_0(u_0) > 0$, что существует единственное сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.2) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$ либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\limsup_{t\uparrow \mathrm{T}_0} \parallel \triangle u \parallel_2 = +\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\mathbb{A}_0 u \equiv \triangle^2 u - \triangle u : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{2.3}$$

$$\mathbb{A}_1(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_1'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{2.4}$$

$$\mathbb{F}(u) \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u) : \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_2}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p_2'}(\Omega) \subset \mathbb{H}^{-2}(\Omega), \tag{2.5}$$

где

$$p_j = \frac{p_j}{p_j - 2}, \ \ j = 1, 2.$$

Посредством $\| \cdot \|_{+2}$ обозначим норму гильбертова пространства $\mathbb{H}^2_0(\Omega)$, а через $\| \cdot \|_{-2}$ обозначим норму гильбертова пространства $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

С учетом введенных обозначений (2.3)–(2.5) задача (2.1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{A}_0 u + \mathbb{A}_1(u)\right) = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^2_0(\Omega). \tag{2.6}$$

Введем оператор

$$\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}_0 u + \mathbb{A}_1(u) : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{2.7}$$

Заметим, что

$$\langle \mathbb{A}(u_1) - \mathbb{A}(u_2), u_1 - u_2 \rangle = \| \triangle u_1 - \triangle u_2 \|_2^2 + \| \nabla u_1 - \nabla u_2 \|_2^2 +$$
$$+ \int\limits_\Omega dx \left(|\nabla u_1|^{p_1 - 2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p_1-2} \nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2 \right).$$

Значит, для оператора $\mathbb{A}(\cdot)$ определен липшиц–непрерывный обратный с постоянной Липщица равной единице. Аналогичным образом доказывается, что оператор

$$\mathbb{A}_0 : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$$

имеет липшиц–непрерывный обратный с постоянной Липшица равной единице.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_1(u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u)$$

Производная Фреше данного оператора имеет вид

$$\mathbb{A}^{'}_{1,u} = \mathbb{A}_{11} + \mathbb{A}_{12}, \tag{2.8}$$

$$\mathbb{A}_{11}(u)h \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla \mathrm{h}), \quad \forall\, \mathrm{h} \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega),$$
$$\mathbb{A}_{12}(u)h \equiv = -(p_1 - 2)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u),$$
$$\langle \mathbb{A}_{11}(u)u_1 - \mathbb{A}_{11}(u)u_2, u_1 - u_2 \rangle_1 =$$
$$= \langle -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_1) + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_2), u_1 - u_2\rangle_1 = \tag{2.9}$$
$$= \int\limits_\Omega dx \left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_1 - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_2\right)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq 0, \quad \forall\, u, u_1, u_2 \in \mathbb{W}^{1,p_1}_0(\Omega).$$

Докажем теперь, что производные Фреше $\mathbb{A}_{11}(u)$ в $u \in \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ обладают свойством непрерывности в равномерной операторной топологии $\mathcal{L}(\mathbb{H}^2_0(\Omega); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$:

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}^2_0 \to \mathbb{H}^{-2}} \to +0$$

при условии $\| u - u_n \|_{\mathbb{H}^2_0} \to +0$ при $n \to +\infty$. Действительно,

$$\| \mathbb{A}_{11}(u) - \mathbb{A}_{11}(u_n) \|_{\mathbb{H}^2_0 \to \mathbb{H}^{-2}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}^2_0} = 1} \| \mathbb{A}_{11}(u)h - \mathbb{A}_{11}(u_n)h \|_{\mathbb{H}^{-2}} \leq$$

$$\mathrm{C} \leq \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}^2_0}=1} \left(\int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2} \right|^{p_1^{'}} |\nabla h|^{p_1^{'}} \right)^{1/p_1^{'}}.$$

Рассмотрим отдельно следующий интеграл

$$\mathrm{J}_n = \int\limits_\Omega dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2} \right|^{p_1^{'}} |\nabla h|^{p_1^{'}}. \tag{2.10}$$

Справедливо следующее неравенство

$$\mathrm{J}_n \leq \mathrm{C} \left(\int\limits_{\Omega} dx ||\nabla u|^{p_1-2} - |\nabla u_n|^{p_1-2}|^{p_1/(p_1-2)} \right)^{(p_1-2)/(p_1-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} dx |\nabla h|^{p_1} \right)^{1/(p_1-1)} \leq \tag{2.11}$$

$$\leq \mathrm{C} \max\{\| \nabla u \|_{+2}^{p_1(p_1-2)/(p_1-1)}, \| \nabla u_n \|_{+2}^{p_1(p_1-2)/(p_1-1)}\} \leq \mathrm{C}.$$

Теперь заметим, что поскольку $\| u - u_n \|_{+2} \to +0$ при $n \to +\infty$. Тогда $\nabla u_n \to \nabla u$ при $n \to +\infty$ сильно в $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{f}(x,u) = |\nabla u|^{p_1-2} : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times ... \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega). \tag{2.12}$$

Можно проверить, что выполнены все условия теоремы Вайнберга–Немыцкого. По определению непрерывность оператора $\mathrm{f} : \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times ... \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega)$ означает, что имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int \int\limits_{\Omega} dx \, |f(x,u) - f(x,u_n)|^{p_1/(p_1-2)} = 0,$$

при условии сильной сходимости $\nabla u_n \to \nabla u$ в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Значит, в силу теоремы Вайнберга–Немыцкого приходим к выводу, что $\mathrm{J}_n \to +0$ при $n \to +\infty$ равномерно по h из сферы $\| \triangle h \|_2 = 1$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathbb{A}_{12}(u)h \equiv -(p_1-2) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p_1-4}(\nabla u, \nabla h)\nabla u).$$

Введем функции

$$f_{ij}(\overrightarrow{\xi}) = |\overrightarrow{\xi}|^{p_1-2} \frac{\xi_i}{|\overrightarrow{\xi}|} \frac{\xi_j}{|\overrightarrow{\xi}|}, \quad \overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \quad i,j = \overline{1,N},$$

где $\xi_m = u_{x_m}, \quad m \in \mathbb{N}, \ h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_1}(\Omega)$. Нетрудно проверить, что операторы Немыцкого, определенные функциями f_{ij} действуют из $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{p_1/(p_1-2)}(\Omega)$. Тогда справедливо неравенство

$$\| \mathbb{A}_{12}(u) - \mathbb{A}_{12}(u_n) \|_{\mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}^{-2}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \| \mathbb{A}_{12}(u)h - \mathbb{A}_{12}(u_n)h \|_{\mathbb{H}^{-2}} \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{N} \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}_0^2}=1} \left(\int\limits_{\Omega} dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\nabla u_n|^{p_1-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \right|^{p_1'} |h_{x_j}|^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \sum_{i,j=1}^{N} \left(\int\limits_{\Omega} dx \left| |\nabla u|^{p_1-2} \frac{u_{x_i}}{|\nabla u|} \frac{u_{x_j}}{|\nabla u|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\nabla u_n|^{p_1-2} \frac{u_{nx_i}}{|\nabla u_n|} \frac{u_{nx_j}}{|\nabla u_n|} \right|^{p_1/(p_1-2)} \right)^{(p_1-2)/(p_1-1)} \to +0,$$

как только $\nabla u_n \to \nabla u$ сильно в $\mathbb{L}^{p_1}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathbb{F}(u)$. Справедлива следующая цепочка неравенств

$$\| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_{-2} \leq$$

$$\leq \mathrm{C} \left(\int\limits_{\Omega} dx \left| |\nabla v_1|^{p_2-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p_2-2} \nabla v_2 \right|^{p_2/(p_2-1)} \right)^{p_2/(p_2-1)} \leq$$

$$\leq \mathrm{C}\mu(\overline{\mathrm{R}}) \| \nabla v_1 - \nabla v_2 \|_{p_2},$$

$$\overline{\mathrm{R}} = \max\{\| \nabla v_1 \|_{p_2}, \| \nabla v_2 \|_{p_2}\}, \quad \mu(\overline{\mathrm{R}}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p_2-2}, \quad p_2 > 2.$$

Значит,

$$\| \mathbb{F}(v_1) - \mathbb{F}(v_2) \|_{-2} \leq \mu(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{+2}, \quad \mu(\mathrm{R}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p_2-2},$$

$$\mathrm{R} = \max\{\| v_1 \|_{+2}, \| v_2 \|_{+2}\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (2.6). Будем искать v в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. В силу доказанных ранее свойств для оператора $\mathbb{A} : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$ существует липшиц–непрерывный обратный $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \to \mathbb{H}^2_0(\Omega)$. Таким образом, $u = \mathbb{A}^{-1}(v)$ и задача (2.6) эквивалентна

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)), \quad v(0) = v_0 = \mathbb{A}(u_0) \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega). \tag{2.13}$$

В классе $v \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ приходим к следующему интегральному уравнению

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t ds \mathbb{Q}(v)(s), \quad \mathbb{Q}(v) = \mathbb{F}(\mathbb{A}^{-1}(v)). \tag{2.14}$$

Будем искать решения интегрального уравнения (2.14) в классе

$$v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$

при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Воспользуемся методом сжимающих отображений. С этой целью введем замкнутое, выпуклое, ограниченное подмножество $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ банахова пространства $\mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_\mathrm{R} \equiv \left\{ v \in \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^{-2}(\Omega)) : \| v \|_\mathrm{T} \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t\in(0,\mathrm{T})} \| v \|_{-2} \leq \mathrm{R} \right\}. \tag{2.15}$$

Докажем, что оператор

$$\mathbb{H}(v) = v_0 + \int\limits_0^t ds \mathbb{Q}(v) \tag{2.16}$$

действует из $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ в $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_\mathrm{R}$ при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$ и достаточно большом $\mathrm{R} > 0$.

Итак, пусть $\| v_0 \|_{-2} \leq \mathrm{R}/2$, тогда

$$\| \mathbb{H}(v) \|_\mathrm{T} \leq \mathrm{R}/2 + \mathrm{T} \| v \|_\mathrm{T} \mu(\mathrm{R}),$$

где $\mu(\mathrm{R}) = \mathrm{C}\mathrm{R}^{p_2-2}$, $\mathrm{R} \geq \| v \|_T$, значит,

$$\| \mathbb{H}(v) \|_\mathrm{T} \leq \mathrm{R}$$

при условии $\mathrm{T} \leq (2\mu(\mathrm{R}))^{-1}$. Докажем теперь сжимаемость оператора $\mathbb{H}(v)$ на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$. Действительно,

$$\| \mathbb{H}(v_1) - \mathbb{H}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leq \mathrm{T} \| \mathbb{Q}(v_1) - \mathbb{Q}(v_2) \|_{\mathrm{T}} \leq \mathrm{T}\mu(\mathrm{R}) \| v_1 - v_2 \|_{\mathrm{T}},$$

$\mathrm{R} = \max\{\| v_1 \|_{\mathrm{T}}, \| v_2 \|_{\mathrm{T}}\}$, при условии $\mathrm{T} < 1/[2\mu(\mathrm{R})]$. Стало быть, оператор $\mathbb{H}$ является сжимающим на $\mathbb{B}_{\mathrm{R}}$ при достаточно большом $\mathrm{R} > 0$ и при достаточно малом $\mathrm{T} > 0$. Значит, существует единственное решение интегрального уравнения (2.14) класса $\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения (2.14) во времени получим, что найдется такое $\mathrm{T}_0 > 0$, что либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$ либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow \mathrm{T}_0} \| v \|_{-2} = +\infty. \tag{2.17}$$

Отметим теперь, что из явного вида оператора $\mathbb{H}(v)$ следует, что

$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)),$$

$$\mathbb{H}(v) : \mathbb{AC}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)).$$

Значит, в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$ существует единственное решение задачи (2.13), причем либо $\mathrm{T}_0 = +\infty$ либо $\mathrm{T}_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство (2.17).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathbb{A}(u) = v \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{2.18}$$

В силу свойств оператора $\mathbb{A}$ имеем,

$$u = \mathbb{A}^{-1}(v). \tag{2.19}$$

Причем справедливы следующие неравенства

$$\| u(t) - u(t_0) \|_{+2} \leq \| \mathbb{A}^{-1}(v)(t) - \mathbb{A}^{-1}(v)(t_0) \|_{+2} \leq \| v(t) - v(t_0) \|_{-2} \to +0$$

при $t \to t_0, \quad t, t_0 \in [0, \mathrm{T}_0)$. Значит, $u(x,t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$. Докажем теперь, что на самом деле u из (2.19) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$. Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{A}$ в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$ из (2.18) с необходимостью получаем, что

$$\mathbb{A}'_u u' = v' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^{-2}(\Omega)). \tag{2.20}$$

Выпишем подробнее уравнение (2.20):

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}'_{1,u}\right] u' = v'. \tag{2.21}$$

Уравнение (2.21) в силу свойств оператора $\mathbb{A}_0$ эквивалентно следующему

$$\left[\mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}'_{1,u}\right] u' = \mathbb{A}_0^{-1} v'. \tag{2.22}$$

Докажем теперь, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$ оператор

$$\mathbb{C} = \mathrm{I} + \mathbb{A}_0^{-1}\mathbb{A}'_{1,u} \tag{2.23}$$

ограничен и обратим. Действительно, ограниченность вытекает из свойств оператора $\mathbb{A}_0$, имеющего липшиц-непрерывный обратный, а оператор $\mathbb{A}^{'}_{1,u}$ ограничен как оператор $\mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathbb{H}^2_0(\Omega); \mathbb{H}^{-2}(\Omega))$. Докажем теперь, что оператор $\mathbb{C}$, определенный в (2.23) обратим. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\mathbb{C}w = 0. \tag{2.24}$$

Подействуем на обе части последнего уравнения оператором $\mathbb{A}_0$, тогда получим, что

$$\left[\mathbb{A}_0 + \mathbb{A}^{'}_{1,u}\right] w = 0.$$

Докажем, что оператор $\mathbb{E} = \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}^{'}_{1,u}$ обратим. Действительно, имеем

$$\langle \mathbb{E}w_1 - \mathbb{E}w_2, w_1 - w_2\rangle = \parallel \triangle w_1 - \triangle w_2 \parallel^2_2 + \parallel \nabla w_1 - \nabla w_2 \parallel^2_2 +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} dx \left(|\nabla w_1|^{p_1-2} \nabla w_1 - |\nabla w_2|^{p_1-2} \nabla w_2, \nabla w_1 - \nabla w_2 \right) \geq$$

$$\geq \parallel w_1 - w_2 \parallel^2_{+2} .$$

Значит, оператор $\mathbb{E}$ имеет липшиц–непрерывный обратный с постоянной Липшица равной единице. Стало быть, уравнение (2.24) имеет только тривиальное решение $w = 0$ в классе $\mathbb{H}^2_0(\Omega)$.

Значит, из (2.21) получим

$$u^{'} = \hat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}^{-1}_0 v^{'}. \tag{2.25}$$

Нам осталось доказать, что $u^{'} = \hat{\mathbb{C}}^{-1} \mathbb{A}^{-1}_0 v^{'} \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$ при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств

$$\begin{gathered}\parallel u^{'}(t) - u^{'}(t_0) \parallel_{+2} \leq \parallel \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) \mathbb{A}^{-1}_0 [v^{'}(t) - v^{'}(t_0)] \parallel_{+2} + \\ \parallel (\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)) \mathbb{A}^{-1}_0 v^{'}(t_0) \parallel_{+2} \leq \\ \leq \mathrm{C} \parallel v^{'}(t) - v^{'}(t_0) \parallel_{-2} + \mathrm{C} \parallel \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0) - \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t) \parallel_{\mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^2_0(\Omega)} .\end{gathered} \tag{2.26}$$

Отметим, что линейный при фиксированном $u \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}^2_0(\Omega))$ оператор $\hat{\mathbb{C}}$ является непрерывным, а значит в силу теоремы Банаха об обратном отображении оператор $\hat{\mathbb{C}}^{-1}$ является линейным непрерывным и, значит, в силу линейности ограниченным. Стало быть, мы можем воспользоваться спектральным представлением для линейного ограниченного оператора $\hat{\mathbb{C}}^{-1} : \mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^2_0(\Omega)$.

Прежде всего введем резольвенту оператора $\hat{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{R}(\lambda, \hat{\mathbb{C}}) = \left(\lambda \mathbb{I} - \hat{\mathbb{C}}\right)^{-1}.$$

Пусть Γ – окружность $|\lambda| = r$ с достаточно большим радиусом, большим чем

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \parallel \hat{\mathbb{C}} \parallel_{\mathbb{H}^2_0(\Omega) \to \mathbb{H}^2_0(\Omega)} .$$

Введенная величина определена корректно, поскольку при указанных $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [0, \mathrm{T}_0)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \parallel u \parallel_{+2} < +\infty.$$

Теперь мы можем воспользоваться спектральным представлением для операторов $\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)$ и $\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)$ с одним и тем же введенным ранее контуром Γ:

$$\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t)),\quad \hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\lambda^{-1}\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0))$$

Очевидно, имеем

$$\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t)-\hat{\mathbb{C}}^{-1}(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}d\lambda\lambda^{-1}\left[\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0))\right].$$

Теперь воспользуемся известным представлением для резольвент операторов

$$\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0))=\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0))\sum_{n=1}^{+\infty}[(\hat{\mathbb{C}}(t)-\hat{\mathbb{C}}(t_0))\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)]^n,$$

при условии

$$\| \hat{\mathbb{C}}(t_0)-\hat{\mathbb{C}}(t) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\| \mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\leq\delta<1.$$

Справедливо следующее неравенство

$$\| \mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\leq$$

$$\| \mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\| \mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)) \|^n_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\| \hat{\mathbb{C}}(t)-\hat{\mathbb{C}}(t_0) \|^n_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\right).$$

Теперь заметим, что

$$\hat{\mathbb{C}}(t)-\hat{\mathbb{C}}(t_0)=\mathbb{A}_0^{-1}\left[\mathbb{A}^{'}_{1,u}(u(t))-\mathbb{A}^{'}_{1,u}(u(t_0))\right].$$

В силу непрерывности производных Фреше $\mathbb{A}^{'}_{1,u}$ по $u\in\mathbb{H}^2_0(\Omega)$ и того, что мы уже доказали $u\in\mathbb{C}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^2_0(\Omega))$. Значит,

$$\| \hat{\mathbb{C}}(t)-\hat{\mathbb{C}}(t_0) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\leq\| \mathbb{A}^{'}_{1,u}(u(t))-\mathbb{A}^{'}_{1,u}(u(t_0)) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^{-2}(\Omega)}\to+0,$$

$$\| \mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t))-\mathbb{R}(\lambda,\hat{\mathbb{C}}(t_0)) \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\to 0$$

$$\| \hat{\mathbb{C}}(t)^{-1}-\hat{\mathbb{C}}(t_0)^{-1} \|_{\mathbb{H}^2_0(\Omega)\to\mathbb{H}^2_0(\Omega)}\to+0$$

при $t\to t_0$.

Значит, $u\in\mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}_0);\mathbb{H}^2_0(\Omega))$.

Теорема доказана.

3. Разрушение сильного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.2) и разрешимость в любом конечном цилиндре.

В предыдущем разделе мы доказали однозначную разрешимость задачи (1.1)–(1.2) в сильном обобщенном смысле. В данном разделе мы получим достаточное условие разрушения сильного обобщенного решения, а также достаточное условие разрешимости в любом конечном цилиндре.

Введем обозначение

$$\Phi(t)\equiv\frac{1}{2}\| \triangle u \|^2_2+\frac{1}{2}\| \nabla u \|^2_2+\frac{p_1-1}{p_1}\| \nabla u \|^{p_1}_{p_1}, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{J}(t) \equiv \| \triangle u' \|_2^2 + \| \nabla u' \|_2^2 + \int\limits_\Omega dx |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2. \tag{3.2}$$

$$\Phi_0 \equiv \Phi(0).$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы следующие свойства*

1. Если $p_1 > p_2$, то $\mathrm{T}_0 = +\infty$ и выполнено двустороннее неравенство

$$\left[\Phi_0^{(p_1-p_2)/p_1} + \frac{p_1-p_2}{p_1}\Phi_0^{-p_2/p_1} \| \nabla u_0 \|_{p_2}^{p_2} t\right]^{p_1/(p_1-p_2)} \leq \Phi(t) \leq$$

$$\leq \left[\Phi_0^{(p_1-p_2)/p_1} + \frac{p_1-p_2}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{p_2/p_1} \mathrm{B}_2^{p_2} t\right]^{p_1/(p_1-p-2)};$$

2. Если $p_1 = p_2 = p$, то $\mathrm{T}_0 = +\infty$ и выполнено двустороннее неравенство

$$\Phi_0 \exp\left(\| \nabla u_0 \|_p^p \Phi_0^{-1} t\right) \leq \Phi(t) \leq \Phi_0 \exp\left(\mathrm{B}_2^p \frac{p}{p-1} t\right);$$

3. Если $p_1 < p_2$, то $\mathrm{T}_0 \in [\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2]$ и выполнено предельное равенство (2.2), где

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\Phi_0^{(2-p_2)/2}}{(p_2-2)2^{(p_2-2)/2}\mathrm{B}_1^{p_2}}, \quad \mathrm{T}_2 = \frac{p_1}{p_2-p_1}\Phi_0 \| \nabla u_0 \|_{p_2}^{-p_2},$$

B_j *– константа наилучшего вложения $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p_j}(\Omega)$:*

$$\| \nabla v \|_{p_j} \leq \mathrm{B}_j \| \triangle v \|_2, \quad j = 1, 2,$$

для всех $v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$.

Доказательство.

Возьмем в качестве w в задаче (2.1) функцию $u \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим первое энергетическое равенство:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2}. \tag{3.3}$$

Из данного равенства с учетом определения функции $\Phi(t)$ не сложно получить указанные в формулировке теоремы 2 оценки сверху в случае $p_1 \geq p_2$ и, кроме того, оценку снизу на время разрушения решения $\mathrm{T}_0 \geq \mathrm{T}_1$ в случае $p_1 < p_2$.

Теперь в качестве w в задаче (2.1) функцию $u' \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$, тогда после интегрирования по частям получим второе энергетическое равенство:

$$\mathrm{J} = \frac{1}{p_2}\frac{d}{dt} \| \nabla u \|_{p_2}^{p_2}. \tag{3.4}$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки

$$\left|\int\limits_\Omega dx \triangle u' \triangle u\right| \leq \| \triangle u' \|_2 \| \triangle u \|_2, \quad \left|\int\limits_\Omega dx (\nabla u', \nabla u)\right| \leq \| \nabla u' \|_2 \| \nabla u \|_2,$$

$$\int\limits_\Omega dx |\nabla u|^{p_1-2}\left(\nabla u, \nabla u'\right) \leq \left(\int\limits_\Omega dx |\nabla u|^{p_1-2} |\nabla u'|^2\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega dx |\nabla u|^{p_1}\right)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Справедливо следующее соотношение

$$\left(\Phi^{'}\right)^2 = \left(\int\limits_{\Omega} dx \triangle u^{'} \triangle u + \int\limits_{\Omega} dx (\nabla u^{'}, \nabla u) + \int\limits_{\Omega} dx |\nabla u|^{p_1 - 2} (\nabla u^{'}, \nabla u)\right)^2 .$$

В силу (3.6) из (3.3), (3.4) получим обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка

$$\Phi\Phi^{''} - \alpha \left(\Phi^{'}\right)^2 \geq 0, \quad \alpha = \frac{p_2}{p_1}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим три случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha \in (0, 1)$. Заметим, что (3.3) вытекает, что при условии $\Phi_0 > 0$ имеет место неравенство $\Phi(t) > 0$ на интервале $[0, \mathrm{T}_0)$. Рассмотрим первый случай: $\alpha > 1$. Тогда из (3.6) получим неравенство снизу

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi_0^{1-\alpha} - (\alpha - 1) \parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2} \Phi_0^{-\alpha} t\right]^{1/(\alpha-1)}}. \tag{3.7}$$

Откуда сразу же приходим к выводу, что

$$\mathrm{T}_0 \leq \mathrm{T}_2 = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{\Phi_0}{\parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2}}. \tag{3.8}$$

В случае $\alpha = 1$ из (3.6) получим неравенство снизу

$$\Phi(t) \geq \Phi_0 \exp\{\frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2}}{\Phi_0} t\}. \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (0, 1)$. Тогда из (3.6) получаем

$$\Phi(t) \geq \Phi_0 \left[1 + (1 - \alpha) \frac{\parallel \nabla u_0 \parallel_{p_2}^{p_2}}{\Phi_0} t\right]^{1/(1-\alpha)}. \tag{3.10}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Корпусов М.О., Свешников А.Г. *Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики* // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43. N 12. С. 1835-1869.
2. Levine H.A. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational. Mech. Analys. 1973. V.51. P. 371-386.
3. Levine H.A., Park S.R., Serrin J. *Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type* // J. Differential Equations. 1998. V. 142. pp. 212–229.
4. Корпусов М.О., Свешников А.Г. *О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками* //Изв. РАН, сер. метам. 2005. Т. 69. N 4.
5. Кожанов А.И. *Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником* // Матем. заметки. 1999. Т. 65. N 1. С. 70-75.
6. Шишмарев И.А. *Об одном нелинейном уравнении типа Соболева* // Дифферен. уравн., 2005. Т. 41. N 1. С. 138–140.
7. Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Известия АН СССР, Сер. мат. 1954. N 18. С. 3-50.
8. Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.
9. Габов С.А., Свешников А.Г. *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн.* М.: Наука, 1990.

Максим Олегович Корпусов
кафедра математики физического факультета,
МГУ им М. В. Ломономова,
119899, Москва, Россия
E-mail address: korpusov@rsci.ru

Алексей Георгиевич Свешников
кафедра математики физического факультета,
МГУ им М. В. Ломономова,
119899, Москва, Россия