S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 141–144 (2005) УДК 512.554

Краткие сообщения MSC 16P10, 16W20

$\mathbb{Z}_3$-ОРТОГРАДУИРОВАННЫЕ КВАЗИМОНОКОМПОЗИЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ С ОДНОМЕРНОЙ НУЛЬ-КОМПОНЕНТОЙ

А.Т. ГАЙНОВ

We consider $\mathbb{Z}_3$-ortograded nondegenerate quasimonocomposition algebras $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ such that $\dim A_0 = 1$ and $A_1 A_2 = 0$. It is proved that all algebras in this class W are solvable of solvability index either two or three. All not bi-isotropic orthogonal nonisomorphic algebras A of W of least dimension, which is equal to 9, are classified. An infinite series of algebras C_r in W of dimension $\dim C_r = 8r + 1$ is constructed for every $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. All algebras C_r are solvable of solvability index 3 and nilpotent of nil-index 5.

Давно замечено, что если алгебра A над полем Φ имеет автоморфизм φ конечного порядка n, то φ определенным образом влияет на строение алгебры A. Так, А.Борель и Г.Мостов в 1955г. доказали, что если A – конечномерная алгебра Ли и подалгебра $C(\varphi) = \{x \in A | \varphi(x) = x\}$ нулевая, то A – разрешимая алгебра [1]. В 1963г. В.А.Крекнин обобщил эту теорему на бесконечномерные алгебры Ли [2]. При этом он оценил сверху ступень разрешимости алгебры Ли A некоторой функцией от $n = |\varphi|$. Спустя много лет Е.И.Хухро пошел в этом направлении еще дальше [3,4]. Он изучил случай, когда подалгебра $C(\varphi)$ конечной размерности m. Тогда алгебра Ли A обладает разрешимой подалгеброй L,причем Е.И.Хухро дал оценки сверху ступени разрешимости подалгебры L и размерности фактор-пространства A/L функциями от n и m.

В 2002г. автор ввел в [5] понятие $\mathbb{Z}_n$-ортоградуированной конечномерной алгебры A над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 в случае, если на векторном пространстве A задана невырожденная симметрическая билинейная форма $N(x, y)$ и алгебра A имеет автоморфизм φ конечного порядка

Gainov, A.T. $\mathbb{Z}_3$-ortograded quasimonocomposition algebras with one-dimensional null component.

Представлена А.С. Морозовым 17 августа 2005 г., опубликована 18 августа 2005 г.

n, удовлетворяющий условию

$$(\forall x, y \in A) \quad N(\varphi(x), \varphi(y)) = N(x, y) \ ,$$

т.е. φ – ортогональный оператор относительно формы $N(x, y)$.

Основное внимание в той работе было уделено коммутативным невырожденным монокомпозиционным алгебрам $\Re$ с единицей 1 (кратко, НМЕ-алгебрам) ввиду того, что, как ранее показал автор, все автоморфизмы конечномерной НМЕ-алгебры $\Re$ являются ортогональными [6]. Невырожденной монокомпозиционной алгеброй называется алгебра $\Re = (\Re, \cdot, N)$ над полем Φ характеристики $\neq 2$, на которой задана невырожденная симметрическая билинейная форма $N(x, y)$ такая, что

$$(\forall x \in A) \quad N(x^2, x^2) = [N(x, x)]^2.$$

С коммутативной НМЕ-алгеброй $\Re = (\Re, \cdot, N, 1)$ ассоциирована коммутативная невырожденная квазимонокомпозиционная алгебра (кратко, НКМ-алгебра) $(A, \times, N)$, определенная при помощи равенств

$$\Re = \Phi 1 \oplus A, \quad A = \{x \in \Re | N(x, 1) = 0\}; \quad (\forall x, y \in A)$$

$$x \cdot y = -N(x, y)1 + x \times y, \quad N(x \times x, x) = N(x \times x, x \times x) = 0.$$

НКМ-алгебра A называется биизотропной, если $A \times A$ – вполне изотропное пространство, т.е. $(\forall x, y, z, t \in A)$ $N(x \times y, z \times t) = 0$. В противном случае алгебра A называется небиизотропной. В настоящей работе, как и в [5], рассматриваются только небиизотропные НКМ-алгебры. Теория $\mathbb{Z}_n$-ортоградуированных НМЕ-алгебр сводится к теории $\mathbb{Z}_n$-ортоградуированных НКМ-алгебр A.

В [5] было начато изучение $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированных коммутативных НКМ-алгебр $(A, \cdot, N)$. Ортогональный автоморфизм φ порядка 3 определяет на этой алгебре ортогональное разложение

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad A_i = \{x \in A | \varphi(x) = \varepsilon^i x\}, \quad i = 0, 1, 2; \tag{1}$$
$$\varepsilon = \sqrt[3]{1}, \quad A_i A_j \subseteq A_{i+j(\mathrm{mod} 3)} \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

A_0 и $B_1 = A_1 \oplus A_2$ – неизотропные ортогональные подпространства, т.е. $N(A_0, B_1) = 0$. A_1, A_2 вполне изотропные подпространства, $\dim A_1 = \dim A_2$. A_0-подалебра, причем НКМ-алгебра; она называется нуль-компонентой ортогонального разложения (1). В [5] рассматривались $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированные НКМ-алгебры, для которых

$$\dim A_0 = 1. \tag{2}$$

Были найдены с точностью до ортогонального изоморфизма все небиизотропные алгебры A размерности 7 и для каждой алгебры A найдены группа $\mathrm{Aut}A$ и группа $\mathrm{Ortaut}A$ всех ортогональных автоморфизмов алгебры A.

В настоящей работе исследуются $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированные НКМ-алгебры A, удовлетворяющие условию

$$A_1 A_2 = 0. \tag{3}$$

Доказано, что если A_0 – n-ступенно разрешимая алгебра ($n \geq 1$), то A – разрешимая алгебра ступени m, $n \leq m \leq n+2$. В частности, если $1 \leq \dim A_0 \leq 3$, то A – двух- или трехступенно разрешимая алгебра.

Далее на алгебру накладывается условие (2). Класс $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированных коммутативных НКМ-алгебр A, удовлетворяющих условиям (2) и (3), обозначим через W.

Доказано, что минимальная размерность небиизотропных алгебр $A \in W$ равна 9. Найдены с точностью до ортогонального изоморфизма все такие алгебры и для каждой алгебры A найдена группа Ortaut$A$.

Рассмотрим класс W $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированных коммутативных НКМ-алгебр $A = (A, \cdot, N)$, удовлетворяющих условиям

$$\dim A_0 = 1,\ \dim A_1 = \dim A_2 = n,\ A_1 A_2 = 0.$$

Такие алгебры A являются двух- или трехступенно разрешимыми. Ассоциированные с ними НМЕ-алгебры $\Re$ будут центральными простыми.

Теорема 1. *В алгебре A можно выбрать канонический базис*

$$\operatorname{bas} A = \{d_0; e_1, \ldots, e_n; e^1, \ldots, e^n\}, \tag{4}$$

где $\{d_0\} = \operatorname{bas}, A_0$, $\{e_1, \ldots, e_n\} = \operatorname{bas} A_1$, $\{e^1, \ldots, e^n\} = \operatorname{bas} A_2$, удовлетворяющий условиям

$$N(d_0, d_0) = 1,\ N(e_i, e^i) = 1,\ i = \overline{1, n};\ \ N(x, y) = 0;$$

для всех остальных базисных элементов x, y.

Таблица умножения алгебры A в этом базисе имеет вид

$$\begin{gathered} d_0 e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^k e_k,\ j = \overline{1, n};\ \ d_0 e^k = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k e^j,\ k = \overline{1, n}; \\ e_j e_k = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{jks} e^s, \quad e^j e^k = \sum_{s=1}^{n} \varepsilon^{jks} e_s;\ j, k = \overline{1, n}; \end{gathered} \tag{5}$$

все остальные произведения базисных элементов равны 0.

При переходе от канонического базиса (4) к другому каноническому базису $\{\overline{d}_0; \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n; \overline{e}^1, \ldots, \overline{e}^n\}$ совокупности структурных констант (γ_{ijk}) и (ε^{ijk}) ведут себя как трехвалентные тензоры в векторном пространстве Φ^n, (α_j^k) является двухвалентным тензором в Φ^n, причем всюду нижние индексы — ковариантные, верхние — контравариантные.

Теорема 2. *Пусть НКМ-алгебра A размерности $\dim A = 8r + 1$, $(\forall r \in \mathbb{N})$, в каноническом базисе (4)*

$$\operatorname{bas} A = \{d_0; e_1, \ldots, e_{4r}; e^1, \ldots, e^{4r}\}$$

задана следующей таблицей умножения вида (5):

$$\begin{gathered} d_0 e_j = e_{2r+j},\ d_0 e^{2r+j} = -e^j,\ (j = \overline{1, 2r}),\ \ e_j e_{4r} = e^{3r+j}, \\ e_{r+j} e_{4r} = -e^{2r+j},\ e_{2r+j} e_{4r} = e^{r+j},\ (j = \overline{1, r}), \\ e_{3r+j} e_{4r} = -e^j,\ (j = \overline{1, r-1}),\ e_{4r} e_{4r} = -2e^r, \\ e_i e_j = \sum_{s=1}^{2r} \gamma_{ijs} e^s, \quad (1 \le i \le j \le 2r), \end{gathered}$$

остальные произведения базисных элементов равны 0.

Тогда алгебра A принадлежит классу W, она трехступенно разрешимая и нильпотентная нильиндекса 5 (потому небиизотропная).

В [5] автором были найдены все ортогонально неизоморфные небиизотропные $\mathbb{Z}_3$-ортоградуированные коммутативные НКМ-алгебры A размерности 7, $\dim A_0 = 1$. Они удовлетворяют условию $A_1 A_2 \neq 0$, т.е. не принадлежат классу W. Отсюда размерность небиизтропных алгебр A класса W будет $\dim A \ge 9$.

Теорема 3. *Минимальная размерность небиизотропных НКМ-алгебр класса W равна 9.*

Каждая такая алгебра ортогонально изоморфна одной и только одной алгебре A из семейства НКМ-алгебр, заданных в каноническом базисе

$$\operatorname{bas} A = \{d_0; e_1, e_2, e_3, e_4; e^1, e^2, e^3, e^4\}$$

следующими правилами умножения (выписываются только ненулевые произведения):

I. Двухступенно разрешимые алгебры.

Общие соотношения для всех алгебр:

$$d_0e_1 = e_3,\ d_0e_2 = e_4,\ d_0e^3 = -e^1,\ d_0e^4 = -e^2,\ e_1e_1 = 2e^4.$$

Индивидуальные соотношения.

Алгебра D_1: $e_1e_4 = -e^1 + e^2,\ e_2e_4 = -e^1,\ e_2e_3 = e^1,\ e_1e_2 = -e^3$.

Алгебра $D_2(\varrho)$, $\forall\varrho \in \Phi$: $e_1e_4 = -e^1,\ e_1e_3 = \varrho\cdot e^2,\ e_2e_3 = (1-\varrho)\cdot e^1,\ e_1e_2 = -e^3$.

Алгебра D_3: $e_1e_4 = -e^1,\ e_1e_3 = e^2,\ e_2e_2 = 2e^1,\ e_1e_2 = -e^2 - e^3$.

II. Трехступенно разрешимые алгебры.

Общие соотношения:

$$d_0e_1 = e_3,\ d_0e_2 = e_4,\ d_0e^3 = -e^1,\ d_0e^4 = -e^2,\ e_4e_4 = 2e^1,$$
$$e_1e_4 = -e^4,\ e_2e_4 = e^3,\ e_3e_4 = -e^2.$$

Индивидуальные соотношения.

Алгебра C_1: $e_1e_3 = e^2,\ e_2e_3 = -e^1$.

Алгебра C_2: $e_1e_1 = 2e^2,\ e_1e_2 = -e^1$.

Алгебра $C_3(\varrho)$, $\forall\varrho \in \Phi$: $e_2e_2 = 2\varrho \cdot e^1,\ e_1e_2 = -\varrho \cdot e^2$.

Список литературы

[1] A. Borel, G.D. Mostow. *On semi-simple automorphisms of Lie algebras*, Ann. Math. (2), 1955, v.61, 389–405.

[2] В.А. Крекнин.*Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода*, ДАН СССР **150** (1963), 467–469.

[3] Е.И. Хухро. *Группы и кольца Ли, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка*, Матем. сб. **181** (1990), 1207–1219.

[4] Н.Ю. Макаренко, Е.И. Хухро. *Почти разрешимость алгебр Ли с почти регулярными автоморфизмами*, Докл. РАН **393** (2003), 18–19.

[5] А.Т. Гайнов. *$\mathbb{Z}_n$-ортоградуированные монокомпозиционные алгебры*, Алгебра и логика **41**:1 (2002), 57–69.

[6] А.Т. Гайнов. *Изоморфизмы конечномерных невырожденных монокомпозиционных алгебр*, Матем. заметки **25** (1979), 801–810.

Алексей Тимофеевич Гайнов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gainov@math.nsc.ru