S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 14–22 (2005)

УДК 519.1
MSC 68R15

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НА АРИФМЕТИЧЕСКУЮ СЛОЖНОСТЬ СЛОВ ШТУРМА

А.Э. ФРИД

Abstract. We give an $O(n^3)$ lower bound for the arithmetical complexity of a Sturmian word, that is the number of words of length n occuring in all arithmetic progressions of a Sturmian word. This result supplements the recent $O(n^3)$ upper bound for the same function by Cassaigne and Frid.

1. Введение

Слова Штурма представляют собой один из самых известных классов бесконечных слов над конечными алфавитами и могут определяться многими эквивалентными способами [3]. Во-первых, их можно определить как слова с минимальной среди всех непериодических бесконечных слов *комбинаторной сложностью*, то есть количеством подслов заданной длины. Напомним, что конечное слово u называется *подсловом* конечного или бесконечного слова v, если $v = t_1 u t_2$ для некоторых (возможно, пустых) слов t_1 и t_2. Бесконечное в одну сторону слово называется словом Штурма, если содержит лишь $n+1$ различное подслово всякой длины n: это минимальное значение количества подслов, встречающихся в непериодическом слове ([5, 2]).

Согласно другому, эквивалентному, определению, n-ый символ $s(n)$ слова Штурма $s(\alpha, x_0) = s(1)s(2)\cdots$ над алфавитом $\{0,1\}$, где $\alpha, x_0 \in [0,1)$, причем α иррационально, определяется одним из равенств

$$s(n) = \lfloor \alpha(n+1) + x_0 \rfloor - \lfloor \alpha n + x_0 \rfloor \tag{1}$$

Frid, A.E., A lower bound for the arithmetical complexity of Sturmian words.

Работа поддержана РФФИ (гранты 02-01-00939 и 03-01-00796) и Фондом содействия отечественной науке.

Поступила 31 января 2005 г., опубликована 5 марта 2005 г.

или

$$s(n) = \lceil \alpha(n+1) + x_0 \rceil - \lceil \alpha n + x_0 \rceil \tag{2}$$

(одним и тем же для всех n), причем всякое слово Штурма может быть получено по одной из этих двух формул при надлежащем выборе параметров α и x_0. Число α — наклон порождающей слово Штурма прямой $y = \alpha x + x_0$ — называется *наклоном* самого слова Штурма.

Слова, полученные по формулам (1) и (2) для данных α и x_0, отличаются друг от друга не более чем двумя символами. Более того, хорошо известно [3], что множество подслов слова Штурма не зависит ни от выбора формулы (1) или (2), ни от выбора x_0, и полностью определяется наклоном α. В дальнейшем множество подслов любого слова Штурма $s(\alpha, x_0)$ обозначается через $F(\alpha)$.

Простые в порождении и с минимальным количеством подслов, слова Штурма являются простейшими среди непериодических слов и в некоторых других смыслах. Например, минимальна (и равна $2n$) их *максимальная оконная сложность* [10]. Другие свойства языка $F(\alpha)$ зависят от числа α, часто — от его разложения в непрерывную дробь.

Арифметическая сложность бесконечного слова была введена в 2000 г. в работе Августиновича, Фон-Дер-Флаасса и Фрид [1] как совокупное число всех подслов *арифметических подпоследовательностей* данного слова $w = w(1)w(2)\cdots$, то есть последовательностей вида $w(k)w(k+d)w(k+2d)\cdots w(k+nd)\cdots$. Число d называется *разностью* такой арифметической подпоследовательности.

Таким образом, арифметическая сложность $a_w(n)$ равна мощности множества $A_w(n) = \{w(k)w(k+d)\cdots w_(k+(n-1)d) | k, d \geq 1\}$. Объединение по n всех множеств $A_w(n)$ называется *арифметическим замыканием* слова w и обозначается через $A(w)$. Заметим, что классическая теорема Ван-дер-Вардена об арифметических прогрессиях может быть естественно сформулирована в терминах арифметического замыкания, что и послужило одним из обоснований для его исследования:

Теорема 1 (Ван-Дер-Варден, 1927)**.** *Арифметическое замыкание всякого слова w над конечным алфавитом содержит сколь угодно большие степени некоторого символа a этого алфавита: $a^n \in A(w)$ для всех n.*

Ясно, что арифметическая сложность растет не медленнее, чем комбинаторная, и не быстрее, чем мощность алфавита в степени n. Если комбинаторная сложность растет линейно, арифметическая может быть как экспоненциальной [1, 7], так и субполиномиальной [8], в том числе линейной [1]. Более того, получена характеризация всех *равномерно рекуррентных* слов с линейной арифметической сложностью [9]. Свойство равномерной рекуррентности означает, что всякое подслово бесконечного слова встречается в нем бесконечное число раз, причем с ограниченным расстоянием между вхождениями; нам важно только, что всякое слово Штурма равномерно рекуррентно (см., напр., [13]), и при этом ни одно из них не попадает в описанный класс слов с линейной сложностью, поскольку известно, что частота единиц в слове Штурма иррациональна (и равна α), а в словах с линейной арифметической сложностью — рациональна. Уже отсюда следует, что арифметическая сложность слов Штурма растет нелинейно. В частности, ясно, что с точки зрения арифметической сложности слова Штурма не являются “простейшими”.

Заметим, что арифметическое замыкание слова Штурма $s(\alpha, x_0)$ зависит только от языка $F(\alpha)$ его подслов, то есть только от иррационального числа α. Далее арифметическое замыкание слова Штурма с наклоном α обозначается через $A(\alpha)$, а арифметическая сложность всякого такого слова — через $a_\alpha(n)$. Недавно Ж. Кассень и автор [4] установили следующую верхнюю оценку на арифметическую сложность слов Штурма:

Теорема 2 ([4])**.** *Для любого $\alpha \in [0,1)$ выполняется неравенство*

$$a_\alpha(n+1) \le \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^{n}(n-p+1)\varphi(p) + 2. \tag{3}$$

Как нетрудно проверить стандартными методами, правая часть этого неравенства равна $(1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2)$. Заметим, что хотя верхняя оценка на арифметическую сложность не зависит от α, сама сложность для разных слов Штурма оказывается разной. Как показано в [4], разность между верхней оценкой (3) и истинным значением $a_\alpha(n+1)$ ограничена при $1/3 < \alpha < 2/3$ и, по-видимому, неограниченно возрастает при других значениях α. Однако до сих пор не существовало никакой нижней оценки на арифметическую сложность слова Штурма — помимо информации о ее нелинейности, вытекающей из характеризации из работы [9]. Не было даже известно, всегда ли арифметическая сложность слова Штурма растет как $O(n^3)$.

В данной работе получен положительный ответ на этот вопрос: получена нижняя оценка на $a_\alpha(n)$, равная $n^3/4\pi^2 + O(n^2) - O(1/\alpha^3)$. Верхней оценки (3) она меньше асимптотически в $(1/6 + 1/\pi^2)/(1/4\pi^2) = 10,58\ldots$ раза и, в отличие от нее, не претендует на точность, поскольку получена достаточно грубыми методами. Однако это первая нетривиальная нижняя оценка на арифметическую сложность слов Штурма, и пока не ясно, возникнет ли потребность в ее уточнении.

2. Используемые методы

Рассмотрим конечное слово $w = w(1)w(2)\cdots w(n)$, где $w(i)$, $i = 1, \ldots, n$, — символы алфавита. Говорят, что слово w *периодично с периодом p*, или *p-периодично*, для некоторого натурального числа p, если $w(i) = w(i+p)$ для всех $i = 1, \ldots, n-p$. В частности, всякое слово периодично с периодом, равным своей длине. Бесконечное слово называется p-периодичным, если каждый его префикс p-периодичен.

Следующая классическая теорема существенна для доказательства основного результата работы.

Теорема 3 (Файн и Вилф, 1965; [6, 11])**.** *Если слово длины не менее $p + q - (p, q)$ является p-периодичным и q-периодичным, то оно является и (p, q)-периодичным.*

Теперь вернемся к словам Штурма и арифметическим подпоследовательностям в них. Заметим, что (1) эквивалентно выражению

$$s(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } \{\alpha(n+1) + x_0\} < \alpha, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

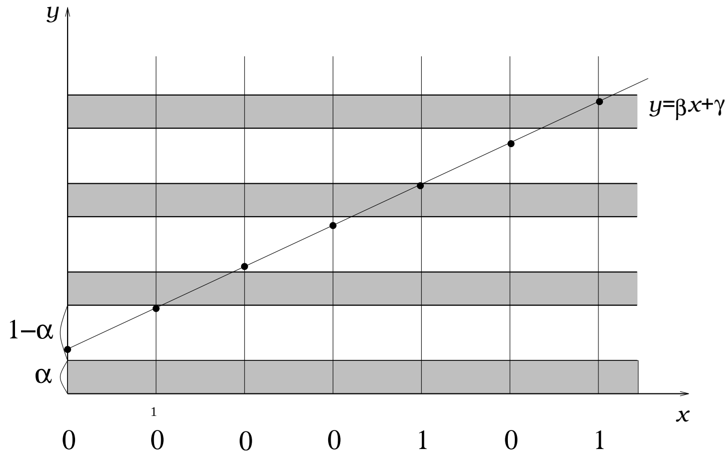

Рис. 1. Произвольное слово из $A(\alpha)$

Для всяких $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ обозначим через $w_\alpha(\beta, \gamma) = w(0)w(1)\cdots w(n)\cdots$ бесконечное слово, задаваемое для всех $i = 0, \ldots, n$ по формуле

$$w(i) = \begin{cases} 1 \text{ при } \{i\beta + \gamma\} < \alpha, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Префикс $w(0)\cdots w(n)$ длины $n+1$ слова $w_\alpha(\beta, \gamma)$ обозначим через $w_\alpha(\beta, \gamma, n)$.

Теперь рассмотрим слово длины $n + 1$, встречающееся в слове Штурма $s(\alpha, x_0)$ по арифметической прогрессии с разностью d начиная с символа номер k. Ясно, что оно равно $w_\alpha(\{d\alpha\}, \{(k+1)\alpha + x_0\}, n)$. Поскольку число α иррационально, обе последовательности $\{d\alpha\}_{d=1}^{\infty}$ и $\{(k+1)\alpha + x_0\}_{k=1}^{\infty}$ порождают всюду плотные множества на интервале $(0, 1)$, причем зависят от независимых переменных d и k. Поэтому арифметическое замыкание $A(\alpha)$ совпадает со множеством всех слов $w_\alpha(\beta, \gamma, n)$, где β и γ пробегают интервал $(0, 1)$, а n — целое число, не меньшее -1 (значение $n = -1$ порождает пустое слово, естественно, входящее в арифметическое замыкание любого слова).

Слово $w_\alpha(\beta, \gamma, n)$ может быть представлено геометрически следующим образом. Заштрихуем все полоски $k \le y < k + \alpha$ в квадранте $x \ge 0$, $y \ge 0$. Тогда $(l+1)$-й символ $w(l)$ слова $w_\alpha(\beta, \gamma, n)$ равен 1 тогда и только тогда, когда линия $y = \beta x + \gamma$ пересекает вертикаль $x = l$ внутри заштрихованной полосы или на ее нижней, но не верхней, границе — см. рис. 1. Будем говорить, что прямая с уравнением $y = \beta x + \gamma$ *определяет* слово $w_\alpha(\beta, \gamma, n)$. Ясно, что каждая такая линия с $\beta, \gamma \in [0, 1)$ определяет ровно одно слово каждой длины.

В дальнейшем мы будем рассматривать слова, соответствующие рациональным значениям параметра β — точнее, слова вида $w_\alpha(q/p, \gamma, 2n-3)$, где $q < p \le n$, $(q, p) = 1$. Мы покажем, что количество различных слов, порождаемых таким образом при различных q, p и γ, равно $O(n^3)$.

3. Основной результат

Теорема 4. *Для всех $n > 0$ арифметическая сложность слова Штурма с наклоном $\alpha < 1/2$ удовлетворяет неравенству*

$$a_\alpha(2n-2) \geq \sum_{p=1}^{n} p\varphi(p) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha \rfloor} p\varphi(p) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\lfloor 1/\alpha \rfloor} p\varphi(p),$$

где $\varphi(p)$ — функция Эйлера, то есть количество натуральных чисел, не превосходящих p и взаимно простых с ним.

Доказательство теоремы начнем с еще нескольких определений и обозначений. Как и обычно, далее u^r обозначает слово u, записанное r раз подряд, а u^ω — бесконечное слово $uuuuu\cdots$. *Сдвигом* порядка k бесконечного слова $w = w(1)w(2)w(3)\cdots w(n)\cdots$ называется слово $S^k w = w(k+1)w(k+2)\cdots$. Заметим, что если бесконечное слово w периодично с минимальным периодом p, то мощность множества всех его сдвигов равна p.

Рассмотрим слово $w_\alpha(1/p,\varepsilon)$, где ε достаточно мало — если точнее, $0 \leq \varepsilon < \alpha - \lfloor \alpha p \rfloor /p$. Поскольку α иррационально, такое ε всегда существует. Обозначим число $\lfloor \alpha p \rfloor$ через k; тогда $w_\alpha(1/p,\varepsilon) = (1^{k+1}0^{p-k-1})^\omega$. Далее мы будем обозначать $w_\alpha(1/p,\varepsilon)$ как $w_{k+1}(p,1)$; аналогично слово $w_\alpha(1/p,\varepsilon)$ с $\alpha - \lfloor \alpha p \rfloor /p \leq \varepsilon < 1/p$, равное $(1^k 0^{p-k})^\omega$, будет обозначаться через $w_k(p,1)$. Нетрудно видеть, что если $k > 0$, в зависимости от ε слово $w_\alpha(1/p,\varepsilon)$ принимает ровно $2p$ значений: это по p различных сдвигов p-периодичных слов $w_{k+1}(p,1)$ и $w_k(p,1)$. Каждое из этих слов p-периодично и представляет собой блоки из, соответственно, $k+1 = \lceil p\alpha \rceil$ или $k = \lfloor p\alpha \rfloor$ единиц, чередующиеся с блоками из $p-k-1$ или $p-k$ нулей; при этом начинаться слово может с середины блока.

Теперь рассмотрим всевозможные слова $w_\alpha(q/p,\varepsilon)$, где $(q,p) = 1$, $q \in \{1, \ldots, p-1\}$. Они являются арифметическими подпрогрессиями с разностью q слов $w_{k+1}(p,1)$ и $w_k(p,1)$, и потому также p-периодичны, причем из любых p идущих подряд символов ровно $k+1$ или k являются единицами, а остальные — нулями.

Обозначим через $w_k(p,q)$ арифметическую подпоследовательность последовательности $w_k(p,1)$ с разностью q, начинающуюся с ее первого символа. Все остальные подпрогрессии слова $w_k(p,1)$ с разностью q, как нетрудно показать, являются сдвигами $w_k(p,q)$ (поскольку $(q,p) = 1$). Множество всех сдвигов последовательности $w_k(p,q)$ будем обозначать через $W_k(p,q)$.

Пример 1. $w_2(5,1) = 11000$. $W_2(5,1) = \{11000, 10001, 00011, 00110, 01100\}$. Далее, $w_2(5,2) = 10010$ и $W_2(5,2) = \{10010, 00101, 01010, 10100, 01001\}$.

Заметим, что все префиксы слов из $W_k(p,q)$ и из $W_{k+1}(p,q)$ являются префиксами слов $w_\alpha(q/p,\varepsilon)$ при различных ε, то есть принадлежат $A(\alpha)$. Для доказательства теоремы 4 мы оценим снизу совокупное количество таких префиксов длины $2n-2$ для всех $p \leq n$, $k = \lfloor p\alpha \rfloor$ и всевозможных q.

Лемма 1. *Если классы $W_k(p,q)$ и $W_k(p,q')$ пересекаются, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть $u \in W_k(p,q) \cap W_k(p,q')$. Тогда оба класса содержат слово u, его сдвиги Su, S^2u, …, $S^{p-1}u$ и только их. □

Лемма 2. *Для всех k и p имеем $W_k(p,1) = W_k(p,p-1)$.*

Доказательство. Имеем $w_k(p,p-1) = (10^{p-k}1^{k-1})^\omega = S^{k-1}w_k(p,1) \in W_k(p,1)$, что позволяет применить лемму 1. $\square$

Лемма 3. *Если $2 \le k \le p-2$, и при этом $W_k(p,x) = W_k(p,1)$ для некоторого $x \in \{1,\dots,p-1\}$ такого что $(x,p) = 1$, то $x \in \{1,p-1\}$.*

Доказательство. В силу симметрии между нулями и единицами мы без ограничения общности можем полагать $k \le p/2$. Далее, заметим, что x не может быть равен $p/2$, поскольку $(x,p) = 1$, а условие $2 \le k \le p-2$ подразумевает, что $p > 2$. Поэтому остается рассмотреть два симметричных случая: $x < p/2$ и $x > p/2$.

Пусть $x < p/2$. Рассмотрим произвольный элемент u множества $W_k(p,x)$ как подпоследовательность с разностью x слова $w = w_k(p,1) = (1^k0^{p-k})^\omega$. Поскольку $p-k \ge p/2$, а $x < p/2$, подряд идущие единицы из u не могут принадлежать к разным блокам единиц в w. В то же время одному и тому же блоку могут принадлежать не более $\lfloor (k-1)/x+1 \rfloor$ единиц подряд. Поскольку $k > 1$, последнее выражение может быть равно k только при $x = 1$: во всех остальных случаях u не содержит k единиц подряд, а значит, не принадлежит $W_k(p,1)$.

Случай $x > p/2$ рассматривается симметрично, с той разницей, что на сей раз подряд идущие единицы из u могут принадлежать только разным блокам единиц слова w. Поэтому их количество не превосходит $\lfloor (k-1)/(p-x)+1 \rfloor$, то есть k единиц подряд, как в словах из $W_k(p,1)$, могут возникнуть только при $x = p-1$. $\square$

Лемма 4. *Всякая арифметическая подпоследовательность v последовательности $w_k(p,1)$ с разностью, сравнимой с t по модулю p, где $t \in \{1,\dots,p-1\}$, принадлежит множеству $W_k(p,t)$.*

Доказательство. Поскольку $w_k(p,1)$ является p-периодичной, v совпадает с подпоследовательностью последовательности $w_k(p,1)$ с разностью t. $\square$

Лемма 5. *Если при некоторых $q,q' \in \{1,\dots,p-1\}$ таких что $(p,q) = (p,q') = 1$ и при некотором $k \ge 2$ множества $W_k(p,q)$ и $W_k(p,q')$ совпадают, то $q' = q$ или $q' = p-q$.*

Доказательство. Пусть $W_k(p,q) = W_k(p,q')$. Это значит, что всякая последовательность u, принадлежащая обоим множествам, является арифметической подпоследовательностью последовательности $w_k(p,1)$ как с разностью q, так и с разностью q'.

Рассмотрим число r такое что $qr \equiv 1 \pmod p$: оно существует, так как $(q,p) = 1$. Рассмотрим подпоследовательность v с разностью r подпоследовательности u с разностью q' последовательности w. Она является подпоследовательностью последовательности w с разностью $q'r$. Обозначив через t остаток от деления $q'r$ на p, мы по лемме 4 видим, что $v \in W_k(p,t)$.

С другой стороны, так как u — подпоследовательность последовательности w с разностью q, последовательность v совпадает с некоторой последовательностью слова w с разностью $qr \equiv 1 \pmod p$. По лемме 4, слово v принадлежит классу $W_k(p,1)$.

По лемме 1 отсюда следует, что $W_k(p,1) = W_k(p,t)$, то есть, по лемме 3, $t = 1$ или $t = p-1$. Первый из этих случаев соответствует $q' = q$, второй — $q' = p-q$, и других вариантов нет. $\square$

Замечание 1. В частности, отсюда следует, что для всех $q \in \{1, \dots, p-1\}$ классы $W_k(p,q)$ и $W_k(p,p-q)$ совпадают (хотя для доказательства теоремы 4 этот факт и не требуется).

Лемма 6. *Если $(p,q) = 1$ и $k \geq 1$, то p — минимальный период всякого бесконечного слова u из $W_k(p,q)$.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть минимальный период слова u меньше p и равен p'. По теореме Файна–Вилфа $p'|p$, то есть $p = tp'$, где $t \geq 2$. Как и раньше, предположим без ограничения общности, что $k \leq p/2$. Пусть i-ый символ последовательности u равен 1; тогда единице равны и все символы последовательности u с номерами вида $i + jp'$, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим u как подпоследовательность последовательности $w_k(p,1)$ с разностью q. Символы последовательности u с номерами вида $i + jp'$ и $i + (j+1)p'$ находятся в $w_k(p,1)$ на расстоянии $qp' \equiv t \neq 0 \pmod p$. По лемме 4, арифметическая подпоследовательность из всех таких символов равна подпоследовательности с разностью t. Поскольку в $w_k(p,1)$ блоки из k единиц чередуются с блоками из $p - k \geq p/2$ нулей, все символы, стоящие в $w_k(p,1)$ на расстоянии t друг от друга, не могут быть одновременно равны 1. Мы приходим к противоречию, которое завершает доказательство. □

Следствие 1. *Каждый класс $W_k(p,q)$, где $(p,q) = 1$ и $k \geq 1$, состоит из p различных p-периодических подслов.*

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим префиксы длины $2n-2$ всех слов из классов $W_k(p,q)$, где

- $p \leq n$,
- $q < p/2$,
- $(q,p) = 1$,
- $k = \lfloor p\alpha \rfloor$ или $k = \lceil p\alpha \rceil$, $k \geq 2$ (заметим, что $k \leq p/2$, так как $\alpha < 1/2$).

Как было показано выше, все они принадлежат множеству $A(\alpha)$. Посчитаем их количество.

Префиксы различных слов из одного и того же класса различны, так как слова полностью определяются своими периодами длины $p \leq n$. Префиксы слов, одно из которых лежит в классе $W_k(p,q_1)$, а другое — в классе $W_k(p,q_2)$, где $q_1 \neq q_2$, различны по лемме 5, так как $q_1, q_2 < p/2$, а значит, q_1 не может быть равно $p - q_2$. Префиксы слов, одно из которых лежит в $W_k(p,q_1)$, а другое — в $W_{k+1}(p,q_2)$, различны, так как среди первых p символов первого из них находится ровно k единиц, а среди p первых символов второго — ровно $k+1$ единица. Наконец, префиксы слов, одно из которых лежит в $W_{k_1}(p_1,q_1)$, а другое — в $W_{k_2}(p_2,q_2)$, где $p_1 \neq p_2$, различны по теореме Файна–Вилфа. Действительно, их длина $2n-2$ не меньше, чем $p_1 + p_2 - (p_1,p_2)$, так как $p_1, p_2 \leq n$ и $p_1 \neq p_2$, т.е. $p_1 + p_2 \leq 2n-1$, а $(p_1,p_2) \geq 1$. Поэтому если бы они совпадали, они были бы периодичны с периодом $(p_1,p_2) < \max(p_1,p_2)$, что невозможно по лемме 6.

Рассмотрим попарно различные префиксы из классов $W_k(p,q)$; при каждом p число q принимает $\varphi(p)/2$ взаимно простых с p значений между 1 и $p/2$. Каждый класс $W_k(p,q)$ содержит p различных p-периодических слов по следствию 1. Наконец, $\lfloor p\alpha \rfloor \geq 2$ при $p \geq \lceil 2/\alpha \rceil$ и $\lceil p\alpha \rceil \geq 2$ при $p \geq \lceil 1/\alpha \rceil$. Таким образом, существует по меньшей мере $p\varphi(p)/2$ различных префиксов длины $2n-2$ слов из $W_{\lceil p\alpha\rceil}(p,q)$, где $p \in \{\lceil 1/\alpha\rceil, \dots, \lfloor 2/\alpha\rfloor\}$, и по меньшей мере $p\varphi(p)$ различных префиксов длины $2n-2$ слов из $W_{\lceil p\alpha\rceil}(p,q)$ и $W_{\lfloor p\alpha\rfloor}(p,q)$, где $p \in \{\lceil 2/\alpha\rceil, \dots, n\rfloor\}$. Все они по построению принадлежат $A(\alpha)$ и все они, как мы только что видели, различны. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_\alpha(2n-2) &\geq \frac{1}{2}\sum_{p=\lceil 1/\alpha\rceil}^{\lfloor 2/\alpha\rfloor} p\varphi(p) + \sum_{p=\lceil 2/\alpha\rceil}^{n} p\varphi(p) \\ &= \sum_{p=1}^{n} p\varphi(p) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\lfloor 2/\alpha\rfloor} p\varphi(p) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\lfloor 1/\alpha\rfloor} p\varphi(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 2. $a_\alpha(n) \geq \dfrac{n^3}{4\pi^2} + O(n^2) - \dfrac{9}{\pi^2\alpha^3} + O\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Доказательство основано на применении известной формулы $\sum_{p=1}^{n}\varphi(p) = \dfrac{3n^2}{\pi^2} + o(n)$. □

4. Расширение области применения результата: слова Роте

Класс последовательностей, для которых арифметическая сложность может быть оценена использованным способом, можно без труда расширить, заменив определение (4) очередного символа последовательности на

$$s(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } \{\delta(n+1)+x_0\} < \alpha, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{5}$$

где параметр δ не обязан быть равным α. Чтобы порождаемое таким образом слово $s = s(1)s(2)\cdots$ было непериодическим, δ должно быть иррациональным. В то же время α при таком определении может быть как рациональным, так и иррациональным. Слова, порождаемые равенством (5), рассматривались, в частности, Роте [12]; при иррациональном δ, не равном α, комбинаторная сложность такого слова не превосходит $2n$, а если α и δ рационально независимы, то начиная с какого-то момента комбинаторная сложность становится равна $2n$.

Нетрудно показать, что арифметическое замыкание слова s, порожденного равенством (5), как и арифметическое замыкание слова Штурма, совпадает с множеством всех слов $w_\alpha(\beta,\gamma,n)$, где $\beta,\gamma \in [0,1)$. Другими словами, оно совпадает с $A(\alpha)$, и если α иррационально, то теорема 4 применима к такому слову Роте так же, как и к словам Штурма.

Предположим теперь, что α рационально: $\alpha = b/c$, где $(b,c)=1$. Тогда единственное отличие рассуждений от случая иррационального α состоит в том, что для некоторых p — а именно, p, кратных c — число единиц в одном периоде длины p у слов, определяемых прямыми с наклоном k/p, может принимать не два, а только одно значение: ведь $p\alpha$ — целое число, то есть $\lfloor p\alpha\rfloor = \lceil p\alpha\rceil$. Поэтому слов, соответствующих этому p, в два раза меньше, чем при иррациональном α. Заведомо огрубляя ситуацию, мы можем по крайней мере гарантировать оценку на $a_{b/c}(2n-2)$ в два раза меньшую, чем дает теорема 4:

$$a_{b/c}(2n-2) \geq \frac{1}{2} \sum_{p=\lceil c/b \rceil}^{n} p\varphi(p),$$

и

$$a_{b/c}(n) \geq \frac{n^3}{8\pi^2} + O(n^2) - \frac{c^3}{\pi^2 b^3} + O\left(\frac{c^2}{b^2}\right).$$

Список литературы

[1] S. V. Avgustinovich, D. G. Fon-Der-Flaass, A. E. Frid, *Arithmetical complexity of infinite words*, in: Words, Languages and Combinatorics III, World Scientific, Singapore, 2003. P. 51–62. (Proc. 3rd ICWLC, Kyoto, March 2000).

[2] J. Berstel, D. Perrin, *Finite and infinite words*, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 2002. P. 1–39.

[3] J. Berstel, P. Séébold, *Sturmian words*, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 2002. P. 40–97.

[4] J. Cassaigne, A. Frid, *On arithmetical complexity of Sturmian words*, в работе.

[5] E. M. Coven, G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth*, Math. Systems Theory **7** (2003), 138–153.

[6] N. J. Fine and H. S. Wilf. Uniqueness theorem for periodic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 109–114.

[7] A. Frid, *Arithmetical complexity of symmetric D0L words*, Theoret. Comput. Sci. **306** (2003), 535-542.

[8] A. Frid, *On possible growth of arithmetical complexity*, `http://www.math.nsc.ru/LBRT/k4/Frid/frid_for_ita.ps`.

[9] A. Frid, *Sequences of linear arithmetical complexity*, Theoret. Comput. Sci., в печати.

[10] T. Kamae, L. Zamboni, *Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 1191–1199.

[11] F. Mignosi, A. Restivo, *Periodicity*, in: M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 2002. P. 237–274.

[12] G. Rote, *Sequences with subword complexity* $2n$., J. Number Th. **46** (1994), 196–213.

[13] L. Vuillon, *A characterisation of Sturmian words by return words*, European Journal of Combinatorics **22** (2001), 263-275.

Анна Эдуардовна Фрид
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `frid@math.nsc.ru`