SÉMINAIRES ET CONGRÈS 10

SINGULARITÉS FRANCO-JAPONAISES

édité par

Jean-Paul Brasselet

Tatsuo Suwa

Société Mathématique de France 2005

J.-P. Brasselet
Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 CNRS,
Campus de Luminy - Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France.
E-mail : `jpb@iml.univ-mrs.fr`

T. Suwa
Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan.
E-mail : `suwa@math.sci.hokudai.ac.jp`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 12D10, 13A18, 14B05, 14C05, 14C17, 14 C22, 14D05, 14E15, 14E20, 14G17, 14H30, 14J17, 32A27, 32B20, 32S05, 32S10, 32S15, 32S25, 32S45, 32S60, 53D35, 58K05.

***Mots clefs*. —** Singularité, singularité de surface, singularité normale de surface, normalisation, singularité de Kodaira, singularité ordinaire, singularité d'hypersurface, nombre de Milnor, fibre de Milnor, spectre, intersection complète, courbe plane, entrelacs, arrangement de droites, polynôme d'Alexander, points singuliers infiniment proches, exposants caractéristiques, clôture intégrale, idéal complet, discriminant, valuation, extension, résidu, résidu local de Grothendieck, formule de Riemann-Roch, classe de Chern, nombre de Chern, forme de Chern, limite adiabatique, classe de Schwartz-MacPherson, classe de Fulton-Johnson, champ de vecteur radial, théorie bivariante, fonction constructible, cohomologie d'intersection, variété de Schubert, système de racines, surface complexe, surface elliptique, genre d'un pinceau, variété torique, variété de dimension 3, groupe fondamental, revêtement galoisien, groupe de Picard, théorie de Hodge, groupe de Néron-Severi, stratification, stratification de Lipschitz, surface algébrique réelle, polynôme hyperbolique, ensemble semi-analytique, ensemble sous-analytique, ensemble arc-analytique, ensemble blow-analytique, remplissage symplectique, courbe pseudo-holomorphe, $\mathcal{D}$-module holonome.

SINGULARITÉS FRANCO-JAPONAISES

édité par Jean-Paul Brasselet, Tatsuo Suwa

Résumé. **—** Le second colloque franco-japonais de Singularités s'est tenu au CIRM (Marseille-Luminy) du 9 au 13 Septembre 2002. Les actes des conférences reproduites dans ce volume traduisent la diversité mais aussi la cohérence des sujets abordés. Les conférences ont eu comme thèmes principaux les classes caractéristiques, les résidus, les stratifications, les singularités de courbes et de surfaces, les valuations, la résolution des singularités, les variétés toriques. Plusieurs articles présentent les résultats récents obtenus dans le domaine, de façon à être accessibles aux non-spécialistes et aux utilisateurs de la théorie des singularités.

Abstract **(Franco-Japanese Singularities). —** The second Franco-Japanese Singularity Conference was held in the CIRM (Marseille-Luminy) from the 9th to the 13th of September 2002. The proceedings of the meeting published in this volume show the diversity, but also the consistency of the fields discussed. The main topics covered by the lectures were characteristic classes, residues, stratifications, singularities of curves and surfaces, valuations, resolution of singularities, and toric varieties. Several papers present the results recently obtained in the field so as to be accessible to non-specialists and to users of singularity theory.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Nous démontrons que toute singularité quasi-ordinaire normale est isomorphe à la normalisation d'une intersection complète que l'on détermine à partir du groupe de la projection quasi-ordinaire. Nous donnons une nouvelle preuve du fait qu'une singularité quasi-ordinaire normale est un germe de variété torique. Nous étudions certains aspects de ces singularités : rationalité, minimalité et « quotient cyclique ».

Dans ce travail, on expose des applications d'un théorème obtenu avec Lê D.T. sur les familles linéaires de courbes sur une singularité de surface normale. Le principal concept utilisé est une définition précise d'élements généraux dans un idéal m-primaire de l'anneau local de la surface. On explicite le lien qui existe entre cette notion et celle, plus élémentaire, d'élément général d'un pinceau linéaire grâce à la notion de clôture intégrale des ideaux.
Ceci permet de prouver l'invariance de la valeur du nombre de Milnor générique (resp. de la multiplicité du discriminant) si l'on considère différents pinceaux engendrant des idéaux de même clôture intégrale (resp. les projections associées).
Nous montrons aussi comment ce résultat complète, en enlevant une hypothèse inutile, un théorème de J. Snoussi sur les limites d'hyperplans tangents, et d'autre part donne aussi un théorème de type μ-constant algébrique pour les familles linéaires de courbes planes.

Pour une hypersurface singulière X d'une variété complexe, et dans certaines conditions, nous montrons une formule explicite pour les classes de Fulton-Johnson en termes de théorie d'obstruction. Dans ce contexte notre formule est similaire à l'expression des classes de Schwartz-MacPherson donnée par Brasselet et Schwartz. Nous utilisons, d'une part, une généralisation de l'indice virtuel (ou GSV-indice) d'un champs de vecteurs au cas où l'espace ambiant a des singularités non-isolées et, d'autre part, un Théorème de Proportionnalité pour cet indice, similaire à celui dû à Brasselet et Schwartz.

Steenbrink, Schrauwen et Stevens ont montré comment calculer les paires spectrales d'un germe analytique à l'aide de la résolution de la singularité. Ici on considère $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale et on montre comment calculer les paires spectrales associées à la monodromie à l'infini à l'aide de la résolution à l'infini. Une fois ces calculs effectués, on prouve la conjecture de Hertling et Dimca dans le cas d'un polynôme ayant un nœud comme entrelacs à l'infini.

Dans cet article, nous montrons une décomposition reliée au groupe fondamental affine et au groupe fondamental projectif d'un arrangement de droites et d'une courbe réductible avec une composante linéaire. Nous donnons quelques applications de ce résultat.

Dans cet article, nous montrons quelques relations entre la topologie d'une variété algébrique complexe et son groupe de Picard algébrique ou analytique. Certains de nos résultats concernent le sous-groupe du groupe de Picard dont les éléments ont une classe de Chern triviale et le groupe de Néron-Severi, quotient du groupe de Picard par ce sous-groupe. Nous obtenons aussi des résultats sur leurs relations avec la topologie de la variété algébrique complexe.

La notion de points singuliers infiniment proches est classique et bien comprise pour les courbes planes. On généralise cette notion aux plus grandes dimensions et on développe une théorie générale, en termes de d'*exposants*

idéalistes et certaines algèbres graduées associées. Ainsi on obtient une généralisation raffinée de la notion classique des premiers exposants caractéristiques. Au niveau technique de base dans la théorie de dimension plus grande, on a des outils puissants, appelés les *Trois théorèmes-clefs*. Ce sont *le Théorème de différenciation*, *le Théorème de l'exposant numérique* et *le Théorème de réduction de l'espace ambiant*.

Nous déterminons des stratifications de Lipschitz pour la famille de surfaces $y^a = z^b x^c + x^d$, où a, b, c, d sont des entiers positifs.

Nous considérons des polynômes moniques *hyperboliques* à une variable réelle, c'est-à-dire des polynômes dont toutes les racines sont réelles. Définissons le *domaine d'hyperbolicité* Π de la famille de polynômes $P(x,a) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_i, x \in \mathbf{R}$, comme l'ensemble $\{a \in \mathbf{R}^n \mid P \text{ est hyperbolique}\}$. L'article étudie la stratification de Π définie par l'arrangement des racines de P et de $P^{(k)}$, où $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Nous montrons que les strates sont des ensembles lisses, contractibles et semi-algébriques.

Nous montrons que l'ensemble de points où une fonction sous-analytique, bornée et continue n'est pas arc-analytique est un ensemble sous-analytique fermé. Autrement dit : la propriété d'être arc-analytique en un point est une propriété ouverte.

Nous décrivons le « link » du revêtement cyclique sur une singularité de surface complexe (S, p) totalement ramifiée sur le lieu des zéros d'un germe de fonction analytique $(S, p) \to (\mathbf{C}, 0)$. A titre d'application, nous prouvons la conjecture de Lê pour cette famille de singularités, *i.e.* si le « link » est homéomorphe à la sphère de dimension 3, alors la singularité est une famille équisingulière de courbes unibranches.

On considère une classe de cohomologie locale algébrique attachée à une hypersurface à singularités isolées, du point de vue de l'analyse algébrique. On étudie le système holonome des équations aux dérivées partielles du premier

ordre associé à la classe de cohomologie ainsi que ses solutions. On décrit une méthode générale pour examiner le système holonome associé. Il est montré que, dans le cas de singularités isolées unimodales, la multiplicité du système holonome associé à la classe génératrice de l'espace dual de l'algèbre de Milnor est égale à deux. Une description explicite des solutions du système holonome est donnée.

Dans cet article, nous donnons un bref état des lieux sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane et son polynôme d'Alexander. Nous introduisons de plus la notion de polynôme d'Alexander de type θ et discutons leurs propriétés élémentaires.

Si une variété symplectique de dimension 4 contient une courbe rationnelle pseudo-holomorphe avec un point de rebroussement de type $(2,3)$ de nombre d'auto-intersection positif, alors elle est elle-même rationnelle.

En utilisant les propriétés des stratifications lipschitziennes on montre l'intégrabilité locale d'une classe de fonctions définies sur les ensembles semi-analytiques. Cette classe contient les polynômes invariants de la courbure. Le résultat est vrai aussi pour les ensembles sous-analytiques.

Soit $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ un polynôme de degré d, à coefficients entiers positifs ou nuls, et sans terme constant. On pose $a = \rho(1)$ et $N = 2d + a$. On exhibe une hypersurface quasi-homogène $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ dont le m-ième nombre de Betti, pour la cohomologie d'intersection, est a_i si $m = 2i$, et 0 sinon. Explicitement, soient $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d, z_0, z_1, \ldots, z_a$ des indéterminées et, pour $s = 1, \ldots, d$, soit π_s le produit des z_i, pour $1 \leqslant i \leqslant a_1 + \cdots + a_s$. Alors V_ρ est définie par le polynôme $F_\rho = x_1 y_1 + \pi_1 x_2 y_2 + \cdots + \pi_{d-1} x_d y_d + \pi_d z_0$. Ceci est conséquence d'un travail antérieur de l'auteur, concernant les variétés de Schubert.

Étant donnée une famille de sections d'un fibré vectoriel complexe sur une variété intersection complète, on donne trois expressions pour le résidu en un point singulier isolé. Elles consistent en une expression analytique en termes

Par une formule classique due à Enriques, les nombres de Chern de la normalisation non singulière X de la surface algébrique S avec singularités ordinaires dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sont donnés par $\int_X c_1^2 = n(n-4)^2 - (3n-16)m + 3t - \gamma$, $\int_X c_2 = n(n^2-4n+6) - (3n-8)m + 3t - 2\gamma$, où n est le degré de S, m est le degré de la courbe double (lieu singulier) D_S de S, t est le nombre de points triples de S, et γ est le nombre de points cuspidaux de S. Dans cet article nous donnons des formules similaires pour une “threefold” algébrique $\overline{X}$ avec singularités ordinaires dans $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ (Théorème 1.15, Théorème 2.1, Théorème 3.2). Comme application, nous obtenons une formule numérique pour la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X, \mathcal{T}_X)$ à coefficients dans le faisceau $\mathcal{T}_X$ de champs de vecteurs holomorphes de la normalisation non singulière X de $\overline{X}$ (Théorème 4.1).

Cet article concerne les surfaces cubiques semi-stables et stables du point de vue de la théorie géométrique des invariants. Nous nous sommes intéressé aux propriétés des sous-ensembles $i\mathcal{A}_1 j\mathcal{A}_2$ correspondant à toutes les surfaces cubiques singulières semi-stables avec exactement i points singuliers de type A_1 et j points singuliers de type A_2. Nous considérons les surfaces cubiques semi-stables comme « c-surfaces » d'ensembles de 6 points en position presque générale avec certaines conditions de configurations. Ceci est une généralisation de l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en 6 points en position générale. À partir de configurations adaptées d'ensembles de 6 points, nous pouvons déterminer le nombre de points « étoile », la configuration des points singuliers, des droites et des plans « tritangents » avec multiplicités sur les surfaces singulières cubiques semi-stables.

Toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant une valuation ν donnée de K permet de construire une famille admise de valuations de $K[x]$, essentiellement unique, qui converge vers μ. L'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ des valuations ou pseudo-valuations prolongeant ν à $K[x]$ peut alors se ramener à l'étude de l'ensemble $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ des familles admissibles, ce qui permet en particulier de définir une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{E}(K[x], \nu)$.

Pour un morphisme algébrique $f : X \to Y$ où la variété Y est non singulière, la classe de Ginzburg-Chern de la fonction constructible α sur la variété source X est définie comme la classe de Chern-Schwartz-MacPherson de la fonction constructible α suivi du cap-produit par l'image réciproque de la classe de Segre de la variété but Y. Dans cet article nous donnons quelques généralisations de la classe de Ginzburg-Chern y compris lorsque la variété but Y est singulière et nous en discutons quelques propriétés.

Dans cet article, nous calculons la limite adiabatique des formes de Chern pour les fibrations holomorphes sur des coubes complexes. Nous supposons que le projection de la fibration n'a que des points critiques isolés.

ABSTRACTS

Normal quasi-ordinary singularities

FUENSANTA AROCA & JAWAD SNOUSSI 1

We prove that any normal quasi-ordinary singularity is isomorphic to the normalization of a complete intersection that we get from the group of the quasi-ordinary projection. We give a new proof of the fact that any normal quasi-ordinary singularity is a germ of a toric variety. We also study some particular aspects of these singularities such as minimality, rationality and "cyclic quotient".

General elements of an $\mathfrak{m}$-primary ideal on a normal surface singularity

ROMAIN BONDIL 11

In this paper, we show how to apply a theorem by Lê D.T. and the author about linear families of curves on normal surface singularities to get new results in this area. The main concept used is a precise definition of *general elements* of an ideal in the local ring of the surface. We make explicit the connection between this notion and the more elementary notion of general element of a linear pencil, through the use of *integral closure of ideals*. This allows us to prove the invariance of the generic Milnor number (resp. of the multiplicity of the discriminant), between two pencils generating two ideals with the same integral closure (resp. the projections associated). We also show that our theorem, applied in two special cases, on the one hand completes, removing an unnecessary hypothesis, a theorem by J. Snoussi on the limits of tangent hyperplanes, and on the other hand gives an algebraic μ-constant theorem in linear families of planes curves.

For a singular hypersurface X in a complex manifold we prove, under certain conditions, an explicit formula for the Fulton-Johnson classes in terms of obstruction theory. In this setting, our formula is similar to the expression for the Schwartz-MacPherson classes provided by Brasselet and Schwartz. We use, on the one hand, a generalization of the virtual (or GSV) index of a vector field to the case when the ambient space has non-isolated singularities, and on the other hand a Proportionality Theorem for this index, similar to the one due to Brasselet and Schwartz.

Steenbrink, Schrauwen and Stevens have computed the spectral pairs of an analytic germ in terms of the resolution of the singularity. Here we consider $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ a polynomial function and we show how we can compute the spectral pairs associated to the monodromy at infinity to f from the resolution at infinity. After we prove the conjecture of Hertling and Dimca on the variance of the spectrum for polynomial with knot at infinity.

In this note we prove a decomposition related to the affine fundamental group and the projective fundamental group of a line arrangement and a reducible curve with a line component. We give some applications to this result.

In this paper we show some relations between the topology of a complex algebraic variety and its algebraic or analytic Picard group. Some of our results involve the subgroup of the Picard group whose elements have a trivial Chern class and the Néron-Severi group, quotient of the Picard group by this subgroup. We are also led to give results concerning their relations with the topology of the complex algebraic variety.

The notion of infinitely near singular points is classical and well understood for plane curves. We generalize the notion to higher dimensions and to develop a general theory, in terms of *idealistic exponents* and certain graded algebras associated with them. We then gain a refined generalization of the classical notion of first characteristic exponents. On the level of technical base in the higher dimensional theory, there are some powerful tools, referred to as *Three Key Theorems*, which are namely *Differentiation Theorem*, *Numerical Exponent Theorem* and *Ambient Reduction Theorem.*

We determine Lipschitz stratifications for the family of surfaces $y^a = z^b x^c + x^d$, where a, b, c, d are positive integers.

We consider real monic *hyperbolic* polynomials in one real variable, *i.e.* polynomials having only real roots. Call *hyperbolicity domain* Π of the family of polynomials $P(x,a) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_i, x \in \mathbf{R}$, the set $\{a \in \mathbf{R}^n \mid P \text{ is hyperbolic}\}$. The paper studies a stratification of Π defined by the arrangement of the roots of P and $P^{(k)}$, where $2 \leqslant k \leqslant n-1$. We prove that the strata are smooth contractible semi-algebraic sets.

We prove that the locus of the points where a bounded continuous subanalytic function is not arc-analytic, is a closed nowhere dense subanalytic set. This shows that the property of being arc-analytic at a point, is an open property.

We describe the link of the cyclic cover over a singularity of complex surface (S,p) totally branched over the zero locus of a germ of analytic function $(S,p) \to (\mathbf{C}, 0)$. As an application, we prove Lê's conjecture for this family of singularities *i.e.* that if the link is homeomorphic to the 3-sphere then the singularity is an equisingular family of unibranch curves.

An algebraic local cohomology class attached to a hypersurface isolated singularity is considered from the view point of algebraic analysis. A holonomic system derived from first order differential equations associated to a cohomology class and its solutions are studied. For the unimodal singularities case, it is shown that the multiplicity of the holonomic system associated to the cohomology class, which generates the dual space of Milnor algebra, is equal to two.

In this paper, we give a brief survey on the fundamental group of the complement of a plane curve and its Alexander polynomial. We also introduce the notion of θ-Alexander polynomials and discuss their basic properties.

If a symplectic 4-manifold contains a pseudo-holomorphic rational curve with a $(2,3)$-cusp of positive self-intersection number, then it must be rational.

Using the properties of Lipschitz stratification we show that some functions on a semi-analytic sets, in particular the invariant polynomials of curvature form, are locally integrable. The result holds as well for subanalytic sets.

Let $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ be a polynomial of degree d, with non-negative integral coefficients and without constant term. Let $a = \rho(1)$ and $N = 2d + a$. We exhibit a quasi-homogeneous hypersurface $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ such that the m-th intersection cohomology Betti number of V_ρ is a_i for $m = 2i$, and 0 otherwise. Explicitly, let $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d,\ z_0, z_1, \ldots, z_a$ be indeterminates and, for $s = 1, \ldots, d$, let π_s denote the product of the z_i, for $1 \leqslant i \leqslant a_1 + \cdots + a_s$. Then V_ρ is defined by the polynomial $F_\rho = x_1 y_1 + \pi_1 x_2 y_2 + \cdots + \pi_{d-1} x_d y_d + \pi_d z_0$. This is a consequence of earlier work of the author about Schubert varieties.

For a collection of sections of a holomorphic vector bundle over a complete intersection variety, we give three expressions for its residues at an isolated singular point. They consist of an analytic expression in terms of a Grothendieck residue on the variety, an algebraic one as the dimension of a certain complex vector space and a topological one as a mapping degree. Some examples are also given.

Grothendieck local residues are studied from a view point of algebraic analysis. The main idea in this approach is the use of regular holonomic $\mathcal{D}$-modules attached to a zero-dimensional algebraic local cohomology class. A new method for computing Grothendieck local residues is developed in the context of Weyl algebra. An effective computing algorithm that exploits first order annihilators is also described.

We introduce the notion of a versal Galois cover, and study versal S_4-covers explicitly. Our goal of this article is to show that two S_4-covers arising from certain rational elliptic surfaces are versal.

In this paper, we prove some relations between surface singularities and pencils of compact complex algebraic curves. Let (X, o) be a complex normal surface singularity. Let $p_f(X, o)$ be the arithmetic genus of the fundamental cycle associated to (X, o). If there is a pencil of curves of genus $p_f(X, o)$ (*i.e.*, $\Phi\colon S \to \Delta$, where Φ is a proper holomorphic map between a non-singular complex surface and a small open disc in $\mathbb{C}^1$ around the origin $\{0\}$ and the fiber $S_t = \Phi^{-1}(t)$ is a smooth compact algebraic curve of genus $p_f(X, o)$ for any $t \neq 0$) and a resolution $(\widetilde{X}, E) \to (X, o)$ such that $(S, \mathrm{supp}(S_o)) \supset (\widetilde{X}, E)$, then we call (X, o) *a weakly Kodaira singularity.* Any Kodaira singularity in the sense of Karras is a weakly Kodaira singularity. In this paper we show some sufficient conditions for surface singularities of some classes to be weakly Kodaira singularities.

We study the link between the positive divisors supported on the exceptional divisor of the minimal resolution of a rational double point and the root systems of Dynkin diagrams. Then, we calculate the toric variety corresponding to the fundamental Weyl chamber.

By a classical formula due to Enriques, the Chern numbers of the non-singular normalization X of an algebraic surface S with ordinary singularities in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ are given by $\int_X c_1^2 = n(n-4)^2 - (3n-16)m + 3t - \gamma$, $\int_X c_2 = n(n^2-4n+6) - (3n-8)m + 3t - 2\gamma$, where n = the degree of S, m = the degree of the double curve (singular locus) D_S of S, t = the cardinal number of the triple points of S, and γ=the cardinal number of the cuspidal points of S. In this article we shall give similar formulas for an algebraic threefold $\overline{X}$ with ordinary singularities in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ (Theorem 1.15, Theorem 2.1, Theorem 3.2). As a by-product, we obtain a numerical formula for the Euler-Poincaré characteristic $\chi(X, \mathcal{T}_X)$ with coefficient in the sheaf $\mathcal{T}_X$ of holomorphic vector fields on the non-singular normalization X of $\overline{X}$ (Theorem 4.1).

This paper deals with semi-stable and stable singular cubic surfaces from the point of view of the geometric invariant theory. We are interested in properties of the subsets $i\mathcal{A}_1 j\mathcal{A}_2$ corresponding to all semi-stable, singular cubic surfaces with exactly i singular points of type A_1 and j singular points of type A_2. We consider semi-stable cubic surfaces as "csurfaces" of 6-point schemes in almost general position with some conditions of configurations. This is a generalization of the blowing-up of $\mathbb{P}^2$ at 6 points in general position. From relevant configurations of 6-point schemes, we can determine number of star points, the configuration of singular points, of lines and tritangent planes with multiplicities on semi-stable, singular cubic surfaces.

Any valuation μ of $K[x]$ extending a given valuation ν of K gives a construction of an almost unique admissible family of valuations of $K[x]$, which converges to μ. The study of the set $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ of the valuations or pseudo-valuations extending ν to $K[x]$ is then reduced to the study of the set $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ of admissible families. By this way we can define an order on the set $\mathcal{E}(K[x], \nu)$.

For a morphism $f : X \to Y$ with Y being nonsingular, the Ginzburg-Chern class of a constructible function α on the source variety X is defined to be the Chern-Schwartz-MacPherson class of the constructible function α followed by capping with the pull-back of the Segre class of the target variety Y. In this paper we give some generalizations of the Ginzburg-Chern class even when the target variety Y is singular and discuss some properties of them.

In this note, we compute the adiabatic limit of Chern forms for holomorphic fibrations over complex curves. We assume that the projection of the fibration has only isolated critical points.

PRÉFACE

Ce volume de la Série *Séminaires et Congrès* de la Société Mathématique de France constitue les Actes du Colloque Franco-Japonais de Singularités, tenu au CIRM (Marseille-Luminy) du 9 au 13 Septembre 2002. Il s'agit du second colloque de ce nom : le premier colloque Franco-Japonais de Singularités s'est tenu à Sapporo du 6 au 10 Juillet 1998 et a été publié comme volume de la Série *Advanced Studies in Pure Mathematics* de la Société Mathématique Japonaise, Volume 29, 2000.

La coopération franco-japonaise dans le domaine des singularités est ancienne et s'est concrétisée à l'occasion des séjours en France de Heisuke Hironaka dans les années 1970. Un accord bilatéral CNRS/JSPS puis un PICS (Programme International de Coopération Scientifique) ont permis de réaliser des missions de travail, des rencontres et ont servi de support à des postes de post-docs au Japon et en France.

Le colloque de Luminy a été organisé comme l'une des activités du PICS franco-japonais. Il a rassemblé 51 participants, essentiellement du Japon et de France, mais aussi d'autres pays tels que Allemagne, Brésil, Pays-Bas, Italie, Iran, Mexique, USA. Les conférences, au nombre de 24 ont eu comme thèmes principaux les classes caractéristiques, les résidus, les stratifications, les singularités de courbes et de surfaces, les valuations, la résolution des singularités, les variétés toriques. Une brève présentation de ces thèmes est donnée en introduction.

Nous tenons à remercier ceux qui nous ont permis de réaliser ce colloque, en particulier le CNRS, la JSPS, l'Université de la Méditerranée, le Conseil Général des Bouches-du-Rhône, la Communauté des Communes Marseille Provence Métropole. La représentation du CNRS à Tokyo et les services de l'Ambassade de France à Tokyo nous ont apporté leur soutien. Nos remerciements vont spécialement au personnel du CIRM qui, par sa compétence, sa disponibilité et sa gentillesse, a permis de faire de ce colloque un réel succès.

J.-P. Brasselet & T. Suwa

序文

フランス数学会刊行シリーズ **Séminaires et Congrès** の一つとして出版されるこの巻は 2002 年 9 月 9 日から 13 日まで CIRM (マルセイユ - リュミニ) で開催された日仏特異点シンポジウムの報告集です．これは同標題の第二回目のシンポジウムです：第一回の日仏特異点シンポジウムは 1998 年 7 月 6 日から 10 日まで札幌で開催され, その報告集は日本数学会刊行シリーズ **Advanced Studies in Pure Mathematics** の第 29 巻として 2000 年に出版されています.

特異点理論における日仏の協力関係は古く, それは 1970 年代の広中平祐のフランス滞在を契機に具体化されました. CNRS と JSPS の協力事業および PICS (科学協力国際プログラム) により相互派遣, 研究交流が可能となり, また日仏両国におけるポストドックに財政援助が与えられました.

リュミニにおけるシンポジウムは日仏 PICS の活動の一つとして組織されました. 主に日仏両国, またドイツ, ブラジル, オランダ, イタリア, イラン, メキシコ, アメリカ合衆国などの諸国より計 51 名の参加者がありました. 講演は 24 あり, 主として特性類, 留数, 階層化, 曲線および曲面の特異点, 付値, 特異点の解消, トーリック多様体などの主題について行われました. これらの主題の簡単な紹介が以下の introduction にあります.

このシンポジウムの実現に援助して下さった方々, 特に CNRS, JSPS, Méditerranée 大学, Bouches-du-Rhône 委員会, Marseille Provence Métropole 地域協会に感謝します. 東京の CNRS 事務局, フランス大使館科学技術部にも支援をして頂きました. 最後になりましたが, 有能, 意欲的かつ懇切な尽力によりこのシンポジウムを真に成功させて下さった CIRM の職員の方々にお礼申し上げます.

Jean-Paul Brasselet, 諏訪 立雄

©PhotoPQR/La Provence/Karine Villalonga

Tatsuo Suwa, Jean-Paul Brasselet & Heisuke Hironaka

Crédit : Jean-Paul Brasselet

INTRODUCTION

The present volume of the Series "Séminaires et Congrès" of the SMF constitutes the Proceedings of the Franco-Japanese meeting held in the CIRM (Marseille-Luminy), September 9th to 13th, 2002. The general theme is that of Singularities. These last years, singularitiy theory has been developed from different complementary points of view. The lectures given during the meeting provide an overview of recent progress in Singularity theory.

Many results have been obtained in the last few years concerning *characteristic classes* of singular varieties and related *residues*. The Chern numbers of the nonsingular normalization of an algebraic surface with ordinary singularities in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ are well known, by a classical formula due to Enriques. S. Tsuboi generalizes this formula for an algebraic threefold with ordinary singularities in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. In a partially expository article, T. Suwa gives various expressions for the residues of Chern classes of vector bundles, in particular when the base space is a complete intersection variety. These expressions involve in particular the Grothendieck residue relative to a variety. A new method for computing the local Grothendieck residues is given, by S. Tajima and Y. Nakamura, in the context of algebraic analysis using regular holonomic $\mathcal{D}$-modules. In another article, the same authors consider algebraic local cohomology classes attached to hypersurface singularities and clarify the difference between quasi-homogeneity and non-quasihomogeneity from the viewpoint of $\mathcal{D}$-module theory.

The definitions of Schwartz-MacPherson and Fulton-Johnson for Chern classes of singular varieties are well-known. In particular, there is an explicit expression of Schwartz-MacPherson classes in terms of obstruction theory (in fact the original M.-H. Schwartz definition). J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa provide a similar expression for the Fulton-Johnson classes. The relative case is studied by S. Yokura, extending to the singular case the notion of Ginzburg-Chern class: for a morphism with nonsingular target variety, the so-called Ginzburg-Chern class of a constructible function α on the source variety is defined in terms of the Schwartz-MacPherson class of α. Chern classes can be also defined by differential forms, relative to specific metrics. The paper by A.Y. Yoshikawa and K.-I. Yoshikawa deals with the so-called adiabatic limit corresponding to adapted families of differential forms.

H. Hamm and Lê D.T. show some relations between the topology of a *complex algebraic variety* and its algebraic or analytic Picard group. P. Polo exhibits a quasi-homogeneous hypersurface whose intersection homology is prescribed, using earlier results about Schubert varieties.

The use of *stratifications* in the understanding of singularities is a common tool, after R. Thom and H. Whitney laid the foundations of the theory. Depending on the conditions imposed on the stratification, the geometry of the singular set can be better understood. The paper by D. Juniati and D. Trotman checks Mostowski's conditions for (almost all of) the family of surfaces $y^a = z^b x^c + x^d$. From another point of view, using the properties of Lipschitz stratifications, A. Parusiński shows suitable integrability of some functions on semi-analytic sets, in particular invariant polynomials of curvature form. K. Kurdyka and L. Paunescu prove that the property of a function on an open subset of $\mathbb{R}^n$ to be arc-analytic at a point is an open property.

R. Bondil uses a previous result that he obtained with Lê D.T., about linear families of curves on normal *surface singularities*, and relates the notion of a general element of a linear pencil to that of a general element of an ideal in the local ring of the surface. The description of the link of the cyclic cover over a complex surface singularity, totally branched over the zero locus of a germ of an analytic function allows I. Luengo-Velasco and A. Pichon to prove a conjecture of Lê for this family of singularities. T. Brélivet shows how to compute the spectral pairs associated to the *monodromy* at infinity of a polynomial function of two variables. As a consequence, he proves the conjecture of Hertling and Dimca on the variance of the spectrum for polynomials with knotting at infinity. The paper by H. Ohta and K. Ono concerns the topology of symplectic fillings of the links of simple singularities in complex dimension two, they prove that for smoothly embedded pseudo-holomorphic curves, the self-intersection number can be arbitrary large. The paper by Nguyen C.T. deals with semi-stable and stable singular cubic surfaces from the point of view of geometric invariant theory. The paper by T. Tomaru concerns Kodaira singularities, in particular the so-called Kulikov singularities and considers normal surface singularities associated to pencils of curves, in the context of deformation theory of singularities. The link between the positive divisors supported on the exceptional divisor of the minimal resolution of a rational double point and the root systems of Dynkin diagrams is given by M. Tosun. She calculates also the *toric variety* corresponding to the fundamental Weyl chamber.

M. Vaquié recalls the notions of augmented *valuations* and limit augmented valuations, necessary to define admitted families of valuations. Using these families, one can define a partial order relation on the set of of all extensions of a given valuation to $K[x]$.

V.P. Kostov defines a stratification of the hyperbolicity domain of a family of real monic hyperbolic polynomials in one real variable. He shows that the strata are smooth contractible semi-algebraic sets.

The paper by M. Oka is a survey for the study of the *fundamental group* of the complement of plane curves and the Alexander polynomials of plane curves. The Libgober characteristic variety and the Alexander polynomial sets are defined and their properties are studied. D. Garber proves a decomposition related to the affine fundamental group and the projective fundamental group of (the complement of) a line arrangement and of a reducible curve with a line component. H. Tokunaga investigates G-covers, in particular the problem of construction of G-covers from geometric data of the base variety. This point of view is strongly related to the inverse Galois problem: to construct a field extension of Q having a prescribed group as its Galois group over Q.

The paper by F. Aroca and J. Snoussi provides simple models for normal quasi-ordinary singularities. These models are linked with toric varieties: they prove that a normal quasi-ordinary singularity is a germ of an affine toric variety.

The notion of infinitely near singular points is classical and well understood for plane curves. H. Hironaka introduced the notion of idealistic exponents in order to generalize the notion of first *characteristic exponents* to higher dimensions. The Three Key Theorems are powerful tools used in the theory: the Differentiation Theorem, Numerical Exponent Theorem and Ambient Reduction Theorem. In his paper, H. Hironaka proves these three key theorems for singular data on an ambient regular scheme of finite type over a perfect field of arbitrary characteristic.

J.-P. Brasselet & T. Suwa