Séminaires & Congrès
10, 2005, p. 255–264

CONSTRUCTION D'HYPERSURFACES AFFINES À COHOMOLOGIE D'INTERSECTION PRESCRITE

par

Patrick Polo

Résumé. **—** Soit $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ un polynôme de degré d, à coefficients entiers positifs ou nuls, et sans terme constant. On pose $a = \rho(1)$ et $N = 2d + a$. On exhibe une hypersurface quasi-homogène $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ dont le m-ième nombre de Betti, pour la cohomologie d'intersection, est a_i si $m = 2i$, et 0 sinon. Explicitement, soient $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d$, $z_0, z_1, \ldots, z_a$ des indéterminées et, pour $s = 1, \ldots, d$, soit π_s le produit des z_i, pour $1 \leqslant i \leqslant a_1 + \cdots + a_s$. Alors V_ρ est définie par le polynôme $F_\rho = x_1 y_1 + \pi_1 x_2 y_2 + \cdots + \pi_{d-1} x_d y_d + \pi_d z_0$. Ceci est conséquence d'un travail antérieur de l'auteur, concernant les variétés de Schubert.

Abstract **(Construction of affine hypersurfaces with prescribed intersection cohomology)**
Let $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ be a polynomial of degree d, with non-negative integral coefficients and without constant term. Let $a = \rho(1)$ and $N = 2d + a$. We exhibit a quasi-homogeneous hypersurface $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ such that the m-th intersection cohomology Betti number of V_ρ is a_i for $m = 2i$, and 0 otherwise. Explicitly, let $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d$, $z_0, z_1, \ldots, z_a$ be indeterminates and, for $s = 1, \ldots, d$, let π_s denote the product of the z_i, for $1 \leqslant i \leqslant a_1 + \cdots + a_s$. Then V_ρ is defined by the polynomial $F_\rho = x_1 y_1 + \pi_1 x_2 y_2 + \cdots + \pi_{d-1} x_d y_d + \pi_d z_0$. This is a consequence of earlier work of the author about Schubert varieties.

Introduction

Le but de cet article, principalement d'exposition, est de montrer le résultat suivant. Soit $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$, à coefficients entiers $\geqslant 0$, et sans terme constant. Soient $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d$, $z_0, z_1, \ldots, z_a$ des indéterminées, où l'on a posé $a = a_1 + \cdots + a_d$, et soit V_ρ l'hypersurface définie par le polynôme

$$F_\rho := x_1 y_1 + \Big(\prod_{i=1}^{a_1} z_i\Big) x_2 y_2 + \cdots + \Big(\prod_{i=1}^{a_1+\cdots+a_{d-1}} z_i\Big) x_d y_d + \prod_{i=0}^{a} z_i.$$

Alors, la cohomologie d'intersection de V_ρ est décrite par le théorème suivant.

Théorème. — *On a* $\sum_{i\geqslant 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IH}^i(V_\rho)\, t^i = 1 + \rho(t^2)$.

Classification mathématique par sujets **(2000).** **—** 32S60, 14M15.
Mots clefs. **—** Cohomologie d'intersection, hypersurfaces, variétés de Schubert, polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Comme F_ρ est quasi-homogène, on a $\mathrm{IH}^i(V_\rho) \cong \mathcal{IH}^i_0(V_\rho)$, où $\mathcal{IH}^i_0(V_\rho)$ désigne la fibre au point 0 du faisceau $\mathcal{IH}^i(V_\rho)$. Le théorème est alors conséquence du fait que V_ρ s'identifie, au produit par un espace affine près, à un certain ouvert d'une variété de Schubert X_{w_ρ}, sur lequel on a décrit les faisceaux $\mathcal{IH}^i$ dans [**10**]. De façon plus précise, dans [**10**] on a associé au polynôme ρ un certain couple d'éléments $y_\rho < w_\rho$ dans le groupe symétrique S_n, où $n = a + d + 2$, et montré que :

$$(*) \qquad \sum_{i \geqslant 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{IH}^i_{y_\rho}(X_{w_\rho})\, t^i = 1 + \rho(t^2).$$

On montre ici qu'un voisinage ouvert de y_ρ dans X_{w_ρ} est isomorphe au produit d'un espace affine par V_ρ, ce qui entraîne le résultat voulu.

La démonstration de $(*)$ donnée dans [**10**] comporte essentiellement quatre étapes. Pour la commodité du lecteur, on rappelle brièvement ces quatre étapes, et l'on indique comment l'un des ingrédients, un argument de théorie des représentations dû à Irving [**6**], peut être remplacé par un argument géométrique dû à Braden et MacPherson [**2**]. On donne aussi, dans le cas de V_ρ, une démonstration directe de l'une des étapes, plus simple qu'un énoncé général sur les variétés de Schubert démontré dans [**10**, Sect.4].

1. Énoncé du théorème

1.1. Soit X une variété algébrique irréductible sur $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathrm{IC}(X)$ le complexe d'intersection de X, et par $\mathrm{IH}^\bullet(X) := \mathbb{H}^\bullet(X, \mathrm{IC}(X))$ la cohomologie d'intersection, voir [**5**]. A la différence de *loc. cit.*, on prend la convention que $\mathrm{IC}(X)$ coïncide sur le lieu lisse de X avec le faisceau constant $\mathbb{C}$ placé en degré 0 (au lieu de $-\dim_{\mathbb{C}} X$ dans *loc. cit.*). Notons $\mathcal{IH}^i(X)$ les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{IC}(X)$ et, pour tout point $x \in X$, notons $\mathcal{IH}^i_x(X)$ la fibre en x.

Soit t une indéterminée. On considèrera les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} IH(X,t) &:= \sum_{i \geqslant 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IH}^i(X)\, t^i, \\ IH_x(X,t) &:= \sum_{i \geqslant 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{IH}^i_x(X)\, t^i. \end{aligned}$$

1.2. Soit $\rho(q) = a_1 q + \cdots + a_d q^d$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$, à coefficients entiers $\geqslant 0$, et sans terme constant, où $q = t^2$. Soient $x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d,\ z_0, z_1, \ldots, z_a$ des indéterminées, où l'on a posé $a = a_1 + \cdots + a_d$. Posons $N = 2d + a$ et considérons l'hypersurface V_ρ de $\mathbb{C}^{N+1}$ définie par le polynôme F_ρ suivant :

$$F_\rho := x_1 y_1 + \Big(\prod_{i=1}^{a_1} z_i\Big) x_2 y_2 + \cdots + \Big(\prod_{i=1}^{a_1 + \cdots + a_{d-1}} z_i\Big) x_d y_d + \prod_{i=0}^{a} z_i.$$

Théorème. — $\mathrm{IH}(V_\rho, t) = \mathrm{IH}_0(V_\rho, t) = 1 + \rho(t^2)$.

La première égalité résulte du fait que F_ρ est quasi-homogène, de poids total $a+1$, si l'on attribue, par exemple, le poids 1 à chaque x_i et z_i, et le poids $\sum_{j\geqslant i} a_j$ à chaque y_i.

La seconde égalité est conséquence du fait, démontré plus bas, que V_ρ s'identifie, au produit par un espace affine près, à un certain ouvert d'une variété de Schubert X_{w_ρ}, sur lequel on a décrit les faisceaux $\mathcal{IH}^i$ dans [**10**].

2. Variétés de Schubert

2.1. Soit $n \geqslant 2$. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et l'on désigne par $\mathbb{C}^i$ le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_i$. Le groupe $GL(n)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux $V^1 \subset \cdots \subset V^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, où $\dim V^i = i$, et le stabilisateur du drapeau standard $\mathbb{C}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{C}^{n-1}$ est le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures. Ainsi, $GL(n)/B$ s'identifie à la variété des drapeaux, notée $\mathrm{Fl}(n)$.

On considère le groupe symétrique S_n comme un sous-groupe de $GL(n)$, agissant par permutation des e_i. Pour tout $w \in S_n$, soit $V_w^\bullet$ le drapeau défini par $V_w^i = w(\mathbb{C}^i)$; il correspond au point wB/B. On note $\ell(w)$ le nombre d'inversions de w et l'on introduit la fonction de rang de w, définie par

$$r_w(a,b) = \#\{i \leqslant a \mid w(i) \leqslant b\},$$

pour $a, b \in [1,n]$. Il est bien connu que l'orbite $BV_w^\bullet$ est un espace affine de dimension $\ell(w)$ et que son adhérence, notée X_w et appelée la variété de Schubert associée à w, est l'ensemble des drapeaux $V^\bullet$ vérifiant

$$\dim(V^a \cap \mathbb{C}^b) \geqslant r_w(a,b), \qquad \forall\, a, b \in [1,n], \tag{1}$$

voir, par exemple, [**9**, §§2.1 & 3.6.2]. On note $v \leqslant w$ si $X_v \subseteq X_w$; c'est l'ordre d'Ehresmann-Bruhat-Chevalley sur S_n.

Remarque. — Pour la commodité du lecteur, on rappelle le fait suivant (*cf.* [**4**, § 10.5, Ex. 10] ou [**9**, Prop. 3.6.6]). Dans (1), il suffit de se limiter aux couples (a,b) qui vérifient :

$$w^{-1}(b) \leqslant a \leqslant w^{-1}(b+1) \quad \text{et} \quad w(a) \leqslant b < w(a+1). \tag{\dagger}$$

En effet, si $a < w^{-1}(b)$ alors $r_w(a,b) = r_w(a,b-1)$ et la condition pour (a,b) est conséquence de celle pour $(a,b-1)$. On peut donc supposer $a \geqslant w^{-1}(b)$. Si de plus $a \geqslant w^{-1}(b+1)$, alors $r_w(a,b+1) = r_w(a,b)+1$ et la condition $\dim(V^a \cap \mathbb{C}^b) \geqslant r_w(a,b)$ peut être omise car elle est conséquence de

$$\dim(V^a \cap \mathbb{C}^{b+1}) \geqslant r_w(a,b+1) = r_w(a,b)+1.$$

De même, si $b < w(a)$ alors $r_w(a,b) = r_w(a-1,b)$ et la condition pour (a,b) résulte de celle pour $(a-1,b)$. Enfin, si $b \geqslant \max\{w(a), w(a+1)\}$, alors $r_w(a+1,b) = r_w(a,b)+1$ et la condition pour (a,b) résulte de celle pour $(a+1,b)$. Ceci montre qu'il suffit de se limiter dans (1) aux couples (a,b) vérifiant (†).

2.2. Soit U^- le sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices triangulaires inférieures unipotentes. Soient $y \leqslant w$ dans S_n et soit $\Omega_{y,w} := X_w \cap yU^-B/B$; c'est un voisinage ouvert du point $V_y^\bullet$ dans X_w.

Rappelons qu'on a identifié S_n au sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices de permutation. Ainsi, le translaté yU^- est bien défini et est une sous-variété fermée de $GL(n)$. Posons

$$\mathcal{V}_{y,w} := \{u \in yU^- \cap U^-y \mid uV_y^\bullet \in X_w\};$$

c'est une sous-variété fermée de yU^-. On sait, d'après [**7**, Lemma A.4], que $\Omega_{y,w}$ est isomorphe au produit de l'orbite $BV_y^\bullet \cong \mathbb{C}^{\ell(y)}$ et de la variété $\mathcal{V}_{y,w}$.

Notons φ l'inclusion $\mathcal{V}_{y,w} \hookrightarrow X_w$ ainsi obtenue ; c'est une immersion transversalement lisse (je propose cette terminologie comme traduction de « normally nonsingular »). Alors, d'après [**5**, Th. 5.4.1], l'on a $\mathrm{IC}(\mathcal{V}_{y,w}) \cong \varphi^* \mathrm{IC}(X_w)$. On a donc

$$\mathrm{IH}_y(\mathcal{V}_{y,w}, t) = \mathrm{IH}_y(X_w, t).$$

De plus, d'après Kazhdan et Lusztig [**8**] (voir aussi [**11**] pour une démonstration différente, due à MacPherson), le terme de droite est égal au polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{y,w}(t^2)$.

Enfin, notons $C_{[y,w]}$ l'ouvert $\bigcup_{z\in[y,w]} BzB/B$ de X_w. On sait, d'après Chevalley (voir [**3**, § 3.3, Lemme 1(a)]), que $\Omega_{y,w} \subseteq C_{[y,w]}$.

2.3. Revenons à notre polynôme $\rho(q) = \sum_{s=1}^{d} a_s q^s$ et posons $a = \rho(1)$ et $n = a+d+2$. Introduisons de plus les notations suivantes. Soit $A_s = a_1 + \cdots + a_s$, pour $s = 1, \dots, d$, et, pour $i = 1, \dots, a$, notons d_i le plus petit entier $s \geqslant 1$ tel que $i \leqslant A_s$. Dans [**10**], on a associé à ρ les éléments w_ρ et y_ρ de S_n définis comme suit. Premièrement, $w_\rho(n) = 2$, $w_\rho(n-1) = 1$, $w_\rho(n-s) = A_{s-1} + s + 1$ pour $s = 2, \dots, d$, et, pour $i = 1, \dots, a$, $w(i) = i + 1 + d_i$. Deuxièmement, $y_\rho(1) = 1$, $y_\rho(n) = n$, $y_\rho(i) = w_\rho(i-1)$ pour $i = 2, \dots, a+1$, et pour $s = 1, \dots, d$, $y_\rho(n-s) = A_{s-1} + s + 1$ (on pose $A_0 = 0$). On vérifie sans difficulté que $y < w$ et $\ell(w) - \ell(y) = 2d + a$, voir [**10**, § 2.1].

Proposition. — $V_\rho \cong \mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$.

Démonstration. — D'abord, pour tout $y \in S_n$, la sous-variété $yU^- \cap U^-y$ de $GL(n)$ est formée des matrices $(u_{ji})_{1\leqslant j,i\leqslant n}$ telles que $u_{y(i),i} = 1$ et $u_{j,i} = 0$ si $y^{-1}(j) < i$ ou $j < y(i)$.

D'autre part, on déduit de la remarque 2.1 que X_{w_ρ} est formée des drapeaux $V^\bullet$ qui vérifient $\mathbb{C}^1 \subset V^{n-1}$ et $V^i \subset \mathbb{C}^{i+1+d_i}$, pour $i = 1, \dots, a$.

On déduit de ce qui précède la description suivante de $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$. Soit (u_{ji}) un élément arbitraire de $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$. Comme $y_\rho(i') < y_\rho(i)$ si $a+1 \leqslant i < i' \leqslant n-1$, on obtient déjà que dans les colonnes C_i, où $a+1 \leqslant i \leqslant n-1$, mis à part $u_{y(i),i}$ qui vaut 1, tous les termes sont nuls sauf éventuellement ceux de la dernière ligne. On pose $z_0 = u_{n,a+1}$ et $y_s = u_{n,n-s}$, pour $s = 1, \dots, d$.

De plus, pour $1 \leqslant i \leqslant a$, la condition $V^i \subseteq \mathbb{C}^{i+1+d_i}$ entraîne que $u_{ji} = 0$ si $j > i+1+d_i$. Par conséquent, dans les colonnes d'indice $i \leqslant a$, mis à part $u_{y(i),i}$ qui vaut 1, les seuls termes éventuellement non nuls sont les u_{ji} avec $1+i+d_{i-1} \leqslant j \leqslant 1+i+d_i$. On pose $z_i = -u_{1+i+d_i,i}$ et l'on désigne par $-x_1, \ldots, -x_d$ les coefficients u_{ji} restants, en lisant de haut en bas la première colonne, puis la seconde, etc. C.-à-d., $x_1 = -u_{21}$ et lorsqu'on passe de x_i à x_{i+1}, l'indice de ligne augmente de $1 + a_i$, et l'indice de colonne augmente de a_i (voir les exemples plus bas). En termes de formule, ceci donne

$$x_{s+1} = -u_{A_s+s+2, A_s+1}, \qquad \text{pour } s = 1, \ldots, d-1.$$

On obtient ainsi que $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$ s'identifie à la sous-variété de l'espace affine $\mathbb{C}^{N+1}$ formée des matrices $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}(x_1, y_1, \ldots, x_d, y_d, z_0, z_1, \ldots, z_a)$ telles que $e_1 \in \underline{\mathbf{u}}(\mathbb{C}^{n-1})$. Cette condition équivaut au fait que la sous-matrice de $\underline{\mathbf{u}}$ obtenue en prenant les colonnes de 1 à $n-1$ et les lignes de 2 à n, est singulière. Or, en ajoutant à la 1ère colonne une combinaison linéaire appropriée des autres colonnes, on voit que le déterminant de cette sous-matrice est $\pm F_\rho$. Ceci prouve la proposition. $\square$

Illustrons le calcul fait dans la démonstration par les deux exemples ci-dessous. On a désigné par des $\bullet$ les coefficients u_{ji} qui sont nuls parce que $y^{-1}(j) < i$ ou $j < y(i)$, et par des 0 les coefficients u_{ji} pour $1 \leqslant i \leqslant a$ et $j > 1+i+d_i$, qui sont nuls en raison de la condition $\underline{\mathbf{u}}(\mathbb{C}^i) \subseteq \mathbb{C}^{1+i+d_i}$.

Exemple 1. — Pour $\rho = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4$, on a $a = \rho(1) = 10$, $n = 16$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 11 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 7 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$ est formée des matrices $\underline{\mathbf{u}}$:

1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
$-x_1$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	$\bullet$
$-z_1$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	$-x_2$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	$\bullet$	$\bullet$
0	$-z_2$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	$-z_3$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	$-x_3$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	$-z_4$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	$-z_5$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	$-z_6$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	$-x_4$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	$-z_7$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	0	$-z_8$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	0	0	$-z_9$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-z_{10}$	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z_0	y_4	y_3	y_2	y_1	1

telles que la sous-matrice $(u_{ji})_{2\leqslant j\leqslant n,\, 1\leqslant i\leqslant n-1}$ soit singulière. Ceci donne le polynôme $F_{q+2q^2+3q^3+4q^4}$ suivant :

$$x_1y_1 + z_1x_2y_2 + (z_1z_2z_3)x_3y_3 + (z_1\cdots z_6)x_4y_4 + (z_1\cdots z_{10})z_0.$$

Exemple 2. — Pour $\rho = 2q^2 + q^3 + 3q^5 + 2q^6$, on a $a = \rho(1) = 8$, $n = 16$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 4 & 5 & 7 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 16 & 13 & 9 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 & 9 & 8 & 6 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{V}_{y_\rho,w_\rho}$ est formée des matrices $\underline{\mathbf{u}}$ de la forme

1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-x_1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•
-x_2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•
-z_1	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	-z_2	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	-x_3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•	•
0	0	-z_3	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	-x_4	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•	•	•
0	0	0	-x_5	•	•	•	•	•	•	1	•	•	•	•	•
0	0	0	-z_4	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	-z_5	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	-z_6	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	-x_6	•	•	1	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	-z_7	1	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	-z_8	1	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	0	z_0	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	1

telles que la sous-matrice $(u_{ji})_{2\leqslant j\leqslant n,\, 1\leqslant i\leqslant n-1}$ soit singulière. Ceci donne le polynôme $F_{2q^2+q^3+3q^5+2q^6}$ suivant :

$$x_1y_1 + x_2y_2 + (z_1z_2)x_3y_3 + (z_1z_2z_3)(x_4y_4 + x_5y_5) + (z_1\cdots z_6)x_6y_6 + (z_1\cdots z_8)z_0.$$

2.4. Le théorème découle alors du résultat suivant, établi dans [**10**].

Théorème. — *On a* $\quad (*)\ \ \mathrm{IH}_{y_\rho}(X_{w_\rho}, t) = 1 + \rho(t^2).$

Pour la commodité du lecteur, on donne dans la Section 3 un résumé de la démonstration de [**10**], et l'on indique comment l'un des ingrédients, un argument de théorie des représentations dû à Irving [**6**], peut être remplacé par un argument géométrique dû à Braden et MacPherson [**2**]. On donne aussi, dans le cas de V_ρ, une démonstration directe de l'une des étapes, plus simple qu'un énoncé général sur les variétés de Schubert démontré dans [**10**, Sect.4].

3. La preuve de l'égalité $(*)$

3.1. Dans [**10**], on considère une certaine résolution des singularités $\pi : Z_\rho \to X_{w_\rho}$, propre et B-équivariante, qui possède de bonnes propriétés (voir ci-dessous). D'après le théorème de décomposition [**1**], joint à la B-équivariance de π, l'on a

$$R\pi_*(\mathbb{C}) = \mathrm{IC}(X_{w_\rho}) \oplus \bigoplus_{v<w_\rho} E_v \otimes \mathrm{IC}(X_v),$$

où chaque E_v est un espace vectoriel gradué de dimension finie tel que $E_v^* \cong E_v[2(\ell(w)-\ell(v))]$. Posons $E_v(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{C}} E_v^i)\, t^i$ et, pour tout $z \leqslant w_\rho$, soit

$$H_{z,\pi}(t) := \sum_{i\geqslant 0} \dim_{\mathbb{C}} H^i(\pi^{-1}(V_z^\bullet), \mathbb{C})\, t^i.$$

Comme π est propre, $R^i\pi_*(\mathbb{C})_{V_z^\bullet} \cong H^i(\pi^{-1}(V_z^\bullet), \mathbb{C})$ pour tout i, et l'on a donc, pour tout $z \leqslant w_\rho$:

$$H_{z,\pi}(t) = \mathrm{IH}_z(X_{w_\rho}, t) + \sum_{v\in[z,w_\rho[} E_v(t)\ \mathrm{IH}_z(X_v, t). \tag{1}$$

De plus, les fibres de π au-dessus de l'ouvert $C_{[y_\rho,w_\rho]}$ peuvent être décrites assez explicitement. Ainsi, dans [**10**, § 2.4], on montre que

$$H_{y_\rho,\pi}(t) = \sum_{i=1}^{a} (t^2 + \cdots + t^{2d_i})$$

et l'on exhibe des éléments $v_1, \ldots, v_a$ de $[y_\rho, w_\rho]$ tels que

$$E_{v_i}(t) = t^2 + \cdots + t^{2(d_i-1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{IH}_{y_\rho}(X_{v_i}, t) = 1.$$

Ceci entraîne la majoration :

$$\mathrm{IH}_{y_\rho}(X_{w_\rho}, t) \preccurlyeq 1 + \sum_{i=1}^{a} t^{2d_i} = 1 + \rho(t^2), \tag{2}$$

où l'on écrit $P \preccurlyeq Q$ pour signifier que le polynôme $Q - P$ est à coefficients $\geqslant 0$. Ceci constitue la première étape de la preuve de $(*)$.

3.2. La seconde est la suivante. Plaçons-nous dans le cas où ρ est égal au monôme aq^d et désignons y_{aq^d}, w_{aq^d} simplement par y, w. Dans ce cas, on a, d'après le paragraphe précédent,

$$1 + at^{2d} = \mathrm{IH}_y(X_w, t) + \sum_{\substack{v\in[y,w[\\ v\notin\{v_1,\ldots,v_a\}}} E_v(t)\ \mathrm{IH}_y(X_v, t).$$

Par conséquent, si on avait $\mathrm{IH}_y(X_w, t) \neq 1 + at^{2d}$, il existerait $v \in [y, w[$ tel que $E_v(t) = ct^{2d}$, avec $c \in [1, a]$. Comme $E_v(t) = t^{2(\ell(w)-\ell(v))}E_v(t^{-1})$, on aurait $\ell(w) - \ell(v) = d$ et, appliquant (1) à $z = v$, on obtiendrait que $\deg_t H_{v,\pi} \geqslant 2d$. Or cette possibilité est exclue par la proposition 3.1 de [**10**], qui montre que pour $v \in [y, w]$ tel que $\ell(w) - \ell(v) = d$, on a $\deg_t H_{v,\pi} \leqslant 2d - 2$.

On a donc $\mathrm{IH}_{y_{aq^d}}(X_{w_{aq^d}}, t) = 1 + at^{2d}$, ce qui prouve $(*)$ dans le cas où ρ est un monôme.

3.3. Revenons à $\rho = \sum_{s=1}^{d} a_s q^s$ arbitraire. La fin de la preuve de $(*)$ consiste à déduire le cas général du cas monomial. Ceci se fait en deux étapes. Dans [**10**], ces deux étapes prenaient la forme suivante.

i) On observait d'abord que, pour chaque $s \in [1, d]$ tel que $a_s \neq 0$, il existe un élément $z_s \in [y_\rho, w_\rho]$ tel que

$$\mathrm{IH}_{z_s}(X_{w_\rho}, t) = P_{z_s, w_\rho}(t^2) = 1 + a_s t^{2s}. \tag{3}$$

ii) Ensuite, on utilisait un argument de théorie des représentations dû à Irving [**6**], assurant que

$$P_{y_\rho, w_\rho} \succcurlyeq P_{z_s, w_\rho}. \tag{4}$$

Ces deux points, joints à la majoration (2), achèvent la preuve de $(*)$ dans le cas général.

Le point *i*) est prouvé de deux façons dans [**10**] : dans la proposition 2.6, par un argument combinatoire dans l'algèbre de Hecke, et dans la Section 4, par un argument géométrique.

En fait, l'analogue de *i*) peut se voir directement, et très simplement, dans V_ρ, de la manière suivante. Pour tout $s \in [1, d]$ tel que $a_s \neq 0$, soit U_s l'ouvert de V_ρ défini par : $z_j \neq 0$ pour tout $j \in [1, a] \smallsetminus]A_{s-1}, A_s]$.

Lemme. — *On a un isomorphisme* $U_s \cong (\mathbb{C}^*)^{a-a_s} \times \mathbb{C}^{2(d-s)} \times V_{a_s q^s}$.

Démonstration. — Pour $r = 1, \ldots, d$, notons π_r, resp. π'_r, le produit des z_j pour $j \in [1, A_r]$, resp. pour $j \in [1, A_r] \smallsetminus]A_{s-1}, A_s]$. Posons $z'_i = z_{A_{s-1}+i}$, pour $i = 1, \ldots, a_s$. Alors, l'égalité

$$x_1 y_1 + \cdots + \pi_{s-1} x_s y_s + \pi_s x_{s+1} y_{s+1} + \cdots + \pi_{d-1} x_d y_d + z_0 \pi_d = 0$$

se récrit en

$$\sum_{i=1}^{s} x'_i y_i + z'_0 z'_1 \cdots z'_s,$$

où l'on a posé $x'_i = \pi_{i-1} x_i$ et $z'_0 = z_0 \pi'_d + \sum_{r=s+1}^{d} \pi'_{r-1} x_r y_r$. Il est clair que ces formules définissent l'isomorphisme annoncé ; son inverse est donné par $z_0 = (z'_0 - \sum_{r=s+1}^{d} \pi'_{r-1} x_r y_r)/\pi'_d$ et $x_i = x'_i/\pi_{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, s$. Ceci prouve le lemme. $\square$

Notons τ_s le morphisme $V_{a_s q^s} \to U_s$ défini par $\tau_s(x) = (1^{a-a_s}, 0^{2(d-s)}, x)$; c'est une immersion transversalement lisse. D'autre part, on a vu en 2.2 qu'il existe une inclusion transversalement lisse φ de V_ρ dans l'ouvert $C_{[y_\rho, w_\rho]}$ de X_{w_ρ}. Soit z_s l'élément de $[y_\rho, w_\rho]$ dont la B-orbite contient $(\varphi \circ \tau)(0)$. En utilisant la B-équivariance et [**5**, § 5.4.1], on obtient le corollaire suivant, analogue du point *i*).

Corollaire. — *On a*

$$\mathrm{IH}_{z_s}(X_{w_\rho}, t) = \mathrm{IH}_{(\varphi\circ\tau)(0)}(X_{w_\rho}, t) = \mathrm{IH}_0(V_{a_s q^s}, t) = 1 + a_s t^{2s}.$$

3.4. Ainsi, le seul argument « non-géométrique » de [**10**] était le résultat d'Irving ([**6**]) sus-mentionné, utilisant l'interprétation des polynômes de Kazhdan-Lusztig en termes de multiplicités dans la filtration par le socle des modules de Verma pour obtenir la propriété de croissance suivante :

$$\text{si } y \leqslant z \leqslant w, \text{ alors } P_{y,w} \succcurlyeq P_{z,w}. \tag{5}$$

On dispose maintenant d'une démonstration géométrique, due à Braden et MacPherson [**2**]. Leur résultat est le suivant. Soit X une variété algébrique complexe, munie de l'action d'un tore algébrique T. On suppose que, pour tout $x_0 \in X^T$, il existe un ouvert de Zariski U contenant x_0 et un morphisme $\mu : \mathbb{C}^* \to T$ tels que $\lim_{z\to 0}\mu(z)x = x_0$, pour tout $x \in U$.

***Théorème* ([2, Thm.3.6]).** — *Soient X comme ci-dessus et $z \in X^T$. On suppose qu'il existe une stratification de Whitney de X telle que la strate contenant z, notée C_z, soit connexe et simplement connexe. Soit $y \in X^T \cap \overline{C_z}$. Alors* $\dim \mathrm{IH}^i_y(X) \geqslant \dim \mathrm{IH}^i_z(X)$ *pour tout i.*

(Les hypothèses sur X faites dans [**2**, § 1.1] sont plus restrictives, mais en fait seules les hypothèses ci-dessus sont utilisées dans la preuve du Théorème 3.6 de *loc. cit.*)

Comme toute variété de Schubert X_w, munie de la stratification par les B-orbites, vérifie les hypothèses précédentes (et celles de [**2**, § 1.1]), ce théorème, combiné avec le corollaire 3.3, achève la preuve de $(*)$.

Références

[1] A. Beilinson, J. Bernstein & P. Deligne – *Faisceaux pervers*, Astérisque, vol. 100, Société Mathématique de France, 1982.

[2] T. Braden & R.D. MacPherson – « From moment graphs to intersection cohomology », *Math. Ann.* **321** (2001), p. 533–551.

[3] M. Demazure – « Désingularisation des variétés de Schubert généralisées », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **7** (1974), p. 53–88.

[4] W. Fulton – *Young Tableaux*, London Math. Soc. Student Texts, vol. 35, Cambridge Univ. Press, 1997.

[5] M. Goresky & R.D. MacPherson – « Intersection homology II », *Invent. Math.* **71** (1983), p. 77–129.

[6] R. Irving – « The socle filtration of a Verma module », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **21** (1988), p. 47–65.

[7] D. Kazhdan & G. Lusztig – « Representations of Coxeter groups and Hecke algebras », *Invent. Math.* **53** (1979), p. 165–184.

[8] ———, « Schubert varieties and Poincaré duality », in *Geometry of the Laplace operator*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 36, American Mathematical Society, Providence, RI, 1980, p. 185–203.

[9] L. Manivel – *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Cours spécialisés, vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[10] P. Polo – « Construction of arbitrary Kazhdan-Lusztig polynomials », *Representation Theory (an electronic journal of the AMS)* **3** (1999), p. 90–104.

[11] T.A. Springer – « Quelques applications de la cohomologie d'intersection », in *Sém. Bourbaki 1981/82*, Astérisque, vol. 92-93, Société Mathématique de France, Paris, 1982, Exp. 589.

P. Polo, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 82, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05 • *E-mail :* polo@math.jussieu.fr