Séminaires & Congrès
9, 2004, p. 83–98

PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ POUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DONT LES RACINES CARACTÉRISTIQUES SONT EN INVOLUTION

par

Renaud Camalès

Résumé. — Dans cet article, nous écrivons la solution de certains problèmes de Cauchy, avec second membre ramifié autour d'un ensemble analytique de codimension 1, sous une forme intégrale nous permettant d'en déduire le lieu singulier.

***Abstract* (Ramified Cauchy problem for some operators with involutive characteristics)**
In this paper, the solution of some ramified Cauchy problems, with second member ramified around some analytic set, is written under an integral form. This integral form allows us to find the singular locus of the solution.

1. Introduction

L'étude de la propagation de singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles complexes et du problème de Cauchy ramifié a été un des grands sujets étudiés par J. Leray. Son étude sur ce problème remonte à 1957 avec l'article (sous-titré Cauchy I) [**7**], puis s'est prolongée avec la série de publications intitulées Cauchy II jusqu'à Cauchy VI (voir [**3**] pour une bibliographie complète). Depuis, de nombreux travaux fondamentaux ont été publiés sur ce sujet. En 1976, Hamada-Leray-Wagschal [**4**] ont étudié le problème de Cauchy ramifié

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) = 0, \\ D_0^h u(x) = w_h(x') \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leqslant h < m, \end{cases}$$

où $a(x,D)$ est un opérateur d'ordre m à caractéristiques multiples de multiplicité constante et où les fonctions w_h sont ramifiées autour de $T = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}; x_0 = x_1 = 0\}$. Ces auteurs ont montré que le problème précédent admet une unique solution qui est ramifiée autour de la réunion K des caractéristiques de $a(x,D)$ issues de T.

En 1990, E. Leichtnam [**6**] étudie le même problème mais avec un second membre ramifié de manière quelconque autour de K. Il montre alors que le problème admet une

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35A20, 35A10, 35C15.
Mots clefs. — Problème de Cauchy ramifié, Prolongement analytique.

unique solution qui est, elle aussi, ramifiée autour de K. Ce résultat a été redémontré par PONGÉRARD-WAGSCHAL [**11**] en 1998.

Signalons que la monodromie de tels problèmes a été étudiée en 2002 par R. CAMALÈS [**1, 2**].

On aborde, dans ce travail, l'étude du problème de Cauchy lorsque le second membre est ramifié autour d'un ensemble analytique quelconque de codimension 1. Pour cela, nous supposerons que l'opérateur $a(x, D)$ s'écrit sous la forme

$$X_1 X_2 + R$$

où X_1 et X_2 sont deux champs de vecteurs qui commutent (ce qui est équivalent à supposer les racines caractéristiques en involution) et R est un opérateur d'ordre 1. Le but est d'écrire la solution u du problème sous forme intégrale puis de déterminer le lieu singulier de u grâce aux techniques de prolongement analytique de germes holomorphes définis par des intégrales multiples.

Il est clair que nos hypothèses concernant l'opérateur sont très fortes. Mais celles-ci ont un but : nous permettre d'écrire la solution sous la forme d'une intégrale multiple finie et d'en étudier ainsi aisément le prolongement analytique. Signalons qu'en 1983, C. WAGSCHAL [**12**] donne une écriture intégrale de la solution du problème de Cauchy ramifié pour un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité variable. Malheureusement, cette formulation ne permet pas de déterminer le prolongement analytique de la solution. En 1988, C. WAGSCHAL [**13**] donne pour la première fois le prolongement analytique de la solution d'un problème de Cauchy pour un opérateur à caractéristiques tangentes. La solution de ce problème s'écrit formellement

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(x)$$

où I_m est un germe holomorphe défini par une intégrale sur un simplexe de dimension m. Ceci entraîne des difficultés techniques extrêmement importantes dans la détermination du prolongement analytique de la solution. Ces techniques ne semblent d'ailleurs pas pouvoir se transposer à des opérateurs un peu plus généraux (opérateurs dans $\mathbb{C}^2$ d'ordre 2 en particulier).

Nous indiquons pour finir que nous ne présentons que le cas d'opérateurs d'ordre 2. Nous avons effectué les calculs pour des opérateurs d'ordre m de la forme

$$X_1 \cdots X_m + R$$

où les X_i sont des champs de vecteurs commutants deux à deux et où R est un opérateur d'ordre $m-1$. La démarche pour ce type d'opérateurs, ainsi que les résultats, sont les mêmes que pour le cas $m = 2$ mais les écritures sont beaucoup plus lourdes.

Le plan de l'article est le suivant. Le paragraphe 2 présente les notations employées et énonce le théorème principal. Dans le paragraphe 3, on écrit de manière formelle la solution sous forme intégrale. Le paragraphe 4 montre la convergence de cette écriture formelle. Enfin le paragraphe 5 indique quelques exemples de détermination de lieux singuliers.

2. Notations et énoncé du théorème principal

Les coordonnées d'un point x de $\mathbb{C}^{n+1}$ seront notées $x = (x_0, \dots, x_n) = (x_0, x')$; on note D_i l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe x_i.

On considère, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, le problème de Cauchy holomorphe non caractéristique

$$\begin{cases} p(x, D)u(x) = v(x), \\ u \text{ s'annule deux fois sur } S, \end{cases}$$

où S est un hyperplan non caractéristique en l'origine et $p(x, D)$ est un opérateur différentiel du second ordre tel que

$$p(x, D) = a_1(x, D)a_2(x, D) + b(x, D)$$

où a_1, a_2 et b sont des opérateurs différentiels linéaires du premier ordre, a_1 et a_2 étant homogènes. On suppose que $p(x, D)$ est un opérateur dont les racines caractéristiques sont en involution : ceci signifie, dans notre cas, que

$$a_1(x, D)a_2(x, D) = a_2(x, D)a_1(x, D).$$

Quant à v, nous supposerons qu'il est ramifié autour d'un ensemble analytique L, contenant 0, de codimension 1 et tel que $S \cap L$ soit un ensemble analytique de codimension 1 dans S : autrement dit, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap S$ soit connexe et il existe un point $a \in \Omega \cap S$ tel que v soit holomorphe au voisinage du point a et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega - L)$ (où $\mathcal{R}(X)$ désigne le revêtement universel d'une variété analytique connexe X).

Notre but est d'écrire sous forme d'une intégrale double la solution de ce problème au voisinage du point a.

Le problème auquel nous nous intéressons étant local, on peut, via un changement de variables, se ramener au problème suivant

$$\begin{cases} [D_0 a(x, D) + b(x, D)]u(x) = v(x), \\ \text{s'annule deux fois sur } S, \end{cases} \tag{1}$$

où $S : x_0 = 0$. D'après les hypothèses, D_0 et $a(x, D) = D_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)D_i$ commutent, donc

$$D_0 a(x, D) - a(x, D)D_0 = \sum_{i=1}^{n} D_0 a_i(x) D_i \equiv 0.$$

Par conséquent, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $D_0 a_i(x) \equiv 0$.

On note k_j, pour $j = 1, \dots, n$, la solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D)k_j(x) = 0, \\ k_j(x) = x_j & \text{pour } x_0 = 0 \end{cases}$$

et $\Sigma : x \mapsto (x_0, k(x)) = (x_0, k_1(x), \dots, k_n(x))$. Σ est un difféomorphisme au voisinage de l'origine. On note Ψ le difféomorphisme inverse de Σ.

On peut remarquer que les hypersurfaces, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, $K_j = \{x; k_j(x) = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de $a(x,D)$ issues de l'hyperplan $T_j : x_0 = x_j = 0$. De même, les hypersurfaces $H_j = \{x; x_j = 0\}$ sont les hypersurfaces caractéristiques de D_0 issues de T_j. On en déduit que H_j et K_j sont les hypersurfaces caractéristiques de $p(x,D)$ issues de T_j.

Le lemme suivant va nous permettre d'écrire explicitement Ψ.

Lemme 2.1. — *On a, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}$,*

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x').$$

Démonstration. — En effet, $x \mapsto k_j(s, k(x))$ est solution du problème

$$\begin{cases} a(x,D)u(x) = 0, \\ u(x) = k_j(s, x') & \text{pour } x_0 = 0. \end{cases}$$

Or $x \mapsto k_j(x_0 + s, x')$ est solution du même problème car les coefficients de $a(x,D)$ sont indépendants de x_0. Donc, par unicité de la solution, on a

$$k_j(s, k(x)) = k_j(x_0 + s, x'). \qquad \square$$

On déduit aisément de ce lemme que $\Psi(x) = (x_0, k(-x_0, x'))$. On en vient, à présent, au théorème principal.

Théorème 2.2. — *Il existe un voisinage ouvert connexe Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n+1}$ et un germe holomorphe f, au point $(0,0,a)$, se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' - L')$, où $L' = \{(t_1, t_2, x); (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x')) \in L\}$, tel que, au voisinage du point a, on ait*

$$u(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} f(t_1, t_2, x)\, dt_1.$$

3. Solution formelle

Dans ce paragraphe, nous écrivons formellement la solution sous forme d'une série, puis ensuite nous montrerons, à l'aide du formalisme des séries majorantes, la convergence de cette série.

Afin de faciliter les calculs, on écrira $p(x,D)$ sous la forme

$$p(x,D) = [D_0 + b(x)]a(x,D) - r(x,D')$$

où $r(x, D') = \sum_{i=1}^{n} r_i(x) D_i$ est un opérateur du premier ordre ne contenant pas de dérivation en x_0. On étudie, par conséquent, le problème suivant

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D) - r(x,D')\Big]u(x) = v(x), \\ u \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases} \tag{2}$$

On note u_0 la solution, au voisinage du point a, du problème

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big]u_0(x) = v(x), \\ u_0 \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalevski, u_0 est holomorphe sur un voisinage du point a. De même, on note u_p ($p \in \mathbb{N}^*$) la solution, au voisinage du point a, de

$$\begin{cases} \Big[[D_0 + b(x)]a(x,D)\Big]u_p(x) = r(x,D')u_{p-1}(x), \\ u_p \text{ s'annule deux fois sur } S. \end{cases}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un voisinage ouvert du point a sur lequel u_p est holomorphe. De plus, la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p \tag{3}$$

est la solution formelle du problème (2).

Nous allons expliciter, sous forme intégrale, chaque terme u_p, puis nous montrerons, au paragraphe suivant, la convergence de cette série au voisinage du point a. On montre tout d'abord la

Proposition 3.1. — *On peut écrire, au voisinage du point a,*

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} l_{t_1}(y)v(y)\big|_{y=\phi(t,x)} dt_1$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$, $\phi : (t,x) \mapsto (x_0 - t_1 - t_2, k(t_2, x'))$ et

$$l_{t_1}(x) = \exp\Big(-\int_0^{t_1} b(s + x_0, x')ds\Big).$$

(Toutes les intégrales s'effectuant sur le segment joignant les bornes.)

Démonstration. — u_0 est solution du problème suivant

$$\begin{cases} a(x,D)u_0(x) = \varphi(x), \\ u_0 \text{ s'annule sur } S, \end{cases}$$

où φ est la solution du problème

$$\begin{cases} [D_0 + b(x)]\varphi(x) = v(x), \\ \varphi \text{ s'annule sur } S, \end{cases}$$

ces deux problèmes étant étudiés au voisinage du point a.

On a

$$\varphi(x) = \int_0^{x_0} \exp\Big(-\int_0^{x_0-t_1} b(s+t_1,x')ds\Big) v(t_1,x')dt_1$$

et

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} \varphi(t_2, k(x_0-t_2,x'))dt_2;$$

on en déduit que

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{t_2} \exp\Big(-\int_0^{t_2-t_1} b(s+t_1,k(x_0-t_2,x'))ds\Big) v(t_1,k(x_0-t_2,x'))dt_1.$$

En faisant les changements de variables $\widetilde{t_1} = t_2 - t_1$ et $\widetilde{t_2} = x_0 - t_2$, on obtient

$$u_0(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} l_{t_1}(\phi(t,x))v(\phi(t,x))dt_1,$$

d'où le résultat. □

Nous montrons, maintenant, deux lemmes qui nous seront utiles pour l'écriture explicite des u_p.

Lemme 3.2. — *Soient $w,t\in\mathbb{C}^2$ et $x\in\mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\phi(t-w,x)$, $\phi(t,x)$, $\phi(w,x)$ et $\phi(t-w,\phi(w,x))$ soient définis. On a alors*

$$\phi(t-w,\phi(w,x)) = \phi(t,x).$$

Démonstration. — On rappelle que $\phi(t,x) = (x_0-t_1-t_2, k(t_2,x'))$; d'où

$$\phi(t-w,\phi(w,x)) = (x_0-w_1-w_2-(t_1+t_2-w_1-w_2), k(t_2-w_2,k(w_2,x'))).$$

Or, d'après le lemme 2.1, on a

$$k(t_2-w_2,k(w_2,x')) = k(t_2,x');$$

par conséquent,

$$\phi(t-w,\phi(w,x)) = (x_0-t_1-t_2,k(t_2,x')) = \phi(t,x)$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.3. — *Soit u holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Il existe alors un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout (t,x) dans ce voisinage, on ait*

$$r(x,D')\Big(u(y)\big|_{y=\phi(t,x)}\Big) = \widetilde{r}(t,y,D')u(y)\big|_{y=\phi(t,x)}$$

où $\widetilde{r}(t,y,D')$ est un opérateur du premier ordre à coefficients holomorphes.

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}r(x,D')\Big(u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big) &= \sum_{k=1}^{n} r_k(x)\sum_{i=1}^{n}(D_k\phi_i)(t,x)D_{y_i}u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}(D_k\phi_i)(t,x)r_k(x)\Big)D_{y_i}u(y)_{\big|y=\phi(t,x)},\end{aligned}$$

où on a noté $\phi(t,x)=(\phi_0(t,x),\dots,\phi_n(t,x))$. On a donc, en utilisant le lemme 3.2,

$$\begin{aligned}r(x,D')\Big(u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}(D_k\phi_i)(t,\phi(-t,y))r_k(\phi(-t,y))\Big)D_{y_i}u(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\\ &= \widetilde{r}(t,y,D')u(y)_{\big|y=\phi(t,x)},\end{aligned}$$

où D_{y_i} désigne l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe y_i. Ceci termine la preuve du lemme. □

Montrons, à présent, la proposition suivante

Proposition 3.4. — *On a, au voisinage du point a,*

$$u_p(x)=\int_0^{x_0}dt_2\int_0^{x_0-t_2} r_p(t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}dt_1,$$

où $r_p(t,y,D')v(y)$ est donné pour $p=1$ par

$$\int_0^{t_1}dw_1^1\int_0^{t_2}\widetilde{r}_{w^1}(t,y,D')(l_{t_1-w_1^1}\cdot v)(y)dw_2^1$$

et pour $p\geqslant 2$ par

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_1}dw_1^p\int_0^{t_2}dw_2^p\int_{w_1^p}^{t_1}dw_1^{p-1}\int_{w_2^p}^{t_2}dw_2^{p-1}\cdots\int_{w_1^2}^{t_1}dw_1^1\int_{w_2^2}^{t_2}\\ &\qquad\qquad \widetilde{r}_{w^p}(t,y,D')\prod_{i=1}^{p-1}\widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}\cdot v)(y)dw_2^1,\end{aligned}$$

avec les notations suivantes

- $w^i=(w_1^i,w_2^i)$,
- $\widetilde{r}_w(t,y,D')=l_{w_1}(\phi(w-t,y))\widetilde{r}(t-w,y,D')$.

On convient que, pour k opérateurs différentiels $a_i(y,D)$, $i=1,\dots,k$,

$$\prod_{i=1}^{k}a_i(y,D)=a_k(y,D)\cdots a_1(y,D).$$

Démonstration. — Montrons, par récurrence, que l'on peut écrire, au voisinage du point a,

$$u_p(x)=\int_0^{x_0}dt_2\int_0^{x_0-t_2} r_p(t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}dt_1.$$

Déterminons, tout d'abord, u_1. On a

$$\begin{aligned} r(x,D')u_0(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} r(x,D')\Big(l_{t_1}(y)v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\Big)dt_1 \\ &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} \widetilde{r}(t,y,D')(l_{t_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t,x)}dt_1 \end{aligned}$$

car $r(x,D')$ est un opérateur ne contenant pas de dérivation par rapport à x_0. On a donc

$$u_1(x) = \int_0^{x_0} dw_2 \int_0^{x_0-w_2} dw_1 \int_0^{x_0-w_2-w_1} dt_2 \int_0^{x_0-w_2-w_1-t_2} \\ l_{w_1}(z)\Big(\widetilde{r}(t,y,D')(l_{t_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t,z)}\Big)_{\big|z=\phi(w,x)}dt_1.$$

On effectue les changements de variables $\widetilde{t}_j = t_j + w_j$ $(j=1,2)$, ce qui donne

$$u_1(x) = \int_0^{x_0} dw_2 \int_0^{x_0-w_2} dw_1 \int_{w_2}^{x_0-w_1} dt_2 \int_{w_1}^{x_0-t_2} \\ l_{w_1}(z)\Big(\widetilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t-w,z)}\Big)_{\big|z=\phi(w,x)}dt_1.$$

Supposons, à présent, que $x_0\in\mathbb{R}$. Vu que toutes les intégrales s'effectuent sur l'intervalle joignant les bornes, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient, compte-tenu des changements de bornes,

$$(4)\quad u_1(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\ l_{w_1}(z)\Big(\widetilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t-w,z)}\Big)_{\big|z=\phi(w,x)}dw_2.$$

Cette égalité est valable pour tout $x\in V\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n)$ où V est un voisinage du point a. De plus, chaque membre de (4) définit une fonction holomorphe sur V (quitte, pour cela, à réduire V). Par conséquent, par prolongement analytique, l'égalité (4) est valable pour tout $x\in V$. On a alors, d'après le lemme 3.2,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\ &\qquad \Big(l_{w_1}(\phi(w-t,y))\widetilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t-w,z)}\Big)_{\big|z=\phi(w,x)}dw_2 \\ &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1 \int_0^{t_2} \\ &\qquad l_{w_1}(\phi(w-t,y))\widetilde{r}(t-w,y,D')(l_{t_1-w_1}\cdot v)(y)_{\big|y=\phi(t,x)}dw_2, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour $p=1$ grâce à l'écriture des opérateurs $\widetilde{r}_w(t,x,D')$. Supposons, maintenant, le résultat vrai à l'ordre p, et montrons-le à l'ordre $p+1$.

On a, d'après le lemme 3.3,

$$\begin{aligned} r(x,D')u_p(x) &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} r(x,D')\Big(r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}\Big)dt_1 \\ &= \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} \widetilde{r}(t,y,D')r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}dt_1. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) = \int_0^{x_0} dw_2^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}} dw_1^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}-w_1^{p+1}} dt_2 \int_0^{x_0-w_2^{p+1}-w_1^{p+1}-t_2} dt_1 \\ \int_0^{t_1} dw_1^p \int_0^{t_2} dw_2^p \cdots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\widetilde{r}(t,y,D')\widetilde{r}_{w^p}(t,y,D') \\ \prod_{i=1}^{p-1} \widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}\cdot v)(y)\big|_{y=\phi(t,z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)}dw_2^1. \end{aligned}$$

En utilisant les changements de variables $\widetilde{t}_j = t_j + w_j^{p+1}$ pour $j=1,2$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) = \int_0^{x_0} dw_2^{p+1} \int_0^{x_0-w_2^{p+1}} dw_1^{p+1} \int_{w_2^{p+1}}^{x_0-w_1^{p+1}} dt_2 \int_{w_1^{p+1}}^{x_0-t_2} dt_1 \\ \int_0^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^p \int_0^{t_2-w_2^{p+1}} dw_2^p \cdots \int_{w_1^2}^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2-w_2^{p+1}} \\ l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\widetilde{r}(t-w^{p+1},y,D')\widetilde{r}_{w^p}(t-w^{p+1},y,D') \\ \prod_{i=1}^{p-1} \widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1}-w^{p+1},y,D') \\ (l_{t_1-w_1^1-w_1^{p+1}}\cdot v)(y)\big|_{y=\phi(t-w^{p+1},z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)}dw_2^1. \end{aligned}$$

On montre, de la même manière qu'au cas $p=1$, en utilisant le théorème de Fubini, que l'on peut écrire, au voisinage du point a,

$$\begin{aligned} u_{p+1}(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0-t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \\ \int_0^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^p \int_0^{t_2-w_2^{p+1}} dw_2^p \cdots \int_{w_1^2}^{t_1-w_1^{p+1}} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2-w_2^{p+1}} \\ l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\widetilde{r}(t-w^{p+1},y,D')\widetilde{r}_{w^p}(t-w^{p+1},y,D') \\ \prod_{i=1}^{p-1} \widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1}-w^{p+1},y,D') \\ (l_{t_1-w_1^1-w_1^{p+1}}\cdot v)(y)\big|_{y=\phi(t-w^{p+1},z)}\Big)\Big|_{z=\phi(w^{p+1},x)}dw_2^1. \end{aligned}$$

En effectuant, à présent, les changements de variables $\widetilde{w}_j^i = w_j^i + w_j^{p+1}$ pour $j = 1, 2$ et $i = 1, \ldots, p$, on a

$$u_{p+1}(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \int_{w_1^{p+1}}^{t_1} dw_1^p \int_{w_2^{p+1}}^{t_2} dw_2^p \cdots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} l_{w_1^{p+1}}(z)\Big(\widetilde{r}(t - w^{p+1}, y, D') \prod_{i=1}^{p} \widetilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t - w^{i+1}, y, D') (l_{t_1 - w_1^1} \cdot v)(y)_{\big| y = \phi(t - w^{p+1}, z)}\Big)_{\big| z = \phi(w^{p+1}, x)} dw_2^1.$$

Maintenant, en utilisant le lemme 3.2 de la même manière qu'au cas $p = 1$, on obtient

$$u_{p+1}(x) = \int_0^{x_0} dt_2 \int_0^{x_0 - t_2} dt_1 \int_0^{t_1} dw_1^{p+1} \int_0^{t_2} dw_2^{p+1} \int_{w_1^{p+1}}^{t_1} dw_1^p \int_{w_2^{p+1}}^{t_2} dw_2^p \cdots \int_{w_1^2}^{t_1} dw_1^1 \int_{w_2^2}^{t_2} l_{w_1^{p+1}}(\phi(w^{p+1} - t, y)) \widetilde{r}(t - w^{p+1}, y, D') \prod_{i=1}^{p} \widetilde{r}_{w^i - w^{i+1}}(t - w^{i+1}, y, D') (l_{t_1 - w_1^1} \cdot v)(y)_{\big| y = \phi(t, x)} dw_2^1.$$

ce qui donne le résultat d'après la définition des opérateurs $\widetilde{r}_w(t, x, D')$. $\square$

4. Convergence de la série

Nous allons tout d'abord rappeler quelques résultats sur les séries majorantes tels qu'ils sont exposés dans [**14**] par exemple. Soit E un espace de Banach complexe. On note $E[[x]]$ l'espace vectoriel des séries formelles en $n+1$ indéterminées à coefficients dans E et $E\{x\}$ le sous-espace vectoriel des séries convergentes en l'origine.

Proposition 4.1. — *Soit $\phi \in \mathbb{R}_+\{x\}$ une fonction majorante et $u \in E[[x]]$ une série formelle telle que $u \ll \phi$, son domaine de convergence contient le domaine de convergence Ω_0 de ϕ et*

$$||u(x)|| \leqslant \phi(|x_0|, \ldots, |x_n|) \text{ pour tout } x \in \Omega_0.$$

A toute série formelle $\phi \in \mathbb{R}_+[[x]]$, on peut associer un espace de Banach complexe de la façon suivante. On pose

$$B_\phi = \Big\{u \in E[[x]]; (\exists\, c \geqslant 0)(u \ll c\phi)\Big\}.$$

B_ϕ est un sous-espace vectoriel de $E[[x]]$ sur lequel on définit une norme par

$$||u||_\phi = \inf \Big\{c \geqslant 0; u \ll c\phi\Big\}.$$

Proposition 4.2. — *$(B_\phi, ||\bullet||_\phi)$ est un espace de Banach.*

Proposition 4.3. — *Soit $u : \Delta(0,R) \mapsto E$ une fonction holomorphe bornée par M, alors*

$$u \ll M\frac{R}{R-\xi} \quad \text{où } \xi = \sum_{j=0}^{n} x_j.$$

Proposition 4.4. — *Soit $\Phi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$ donnée par*

$$\Phi(\xi) = \frac{R}{R-\xi} \quad (R > 0).$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(R-\xi)D^k\Phi(\xi) \gg 0.$$

Proposition 4.5. — *Soient E, F et G des espaces de Banach complexes, une application bilinéaire $(a,u) \in E \times F \mapsto au \in G$ de norme $\leqslant 1$,*

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

un opérateur différentiel dont les coefficients $a_\alpha \in E\{x\}$ sont holomorphes et bornés par M sur le polydisque $\Delta(0,\eta R)$, $\eta > 1$. Alors, il existe une constante positive $c = c(m,M,\eta,R)$ telle que pour tout $\phi \in \mathbb{R}_+[[\xi]]$ tel que $(R-\xi)\phi(\xi) \gg 0$ où $R > 0$ et tout $u \in F[[x]]$

$$u \ll \phi \Longrightarrow A(x,D)u \ll cD^m\phi.$$

Nous pouvons, à présent, montrer la convergence de la série (3). Pour cela, nous allons prouver la convergence de la série

$$\sum_p r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}. \tag{5}$$

On peut, tout d'abord, remarquer que pour tout $i \geqslant 1$

$$\widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')$$

ainsi que

$$\widetilde{r}_{w^i}(t,y,D')$$

définissent des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes que l'on peut supposer bornés par M sur $\Delta(0,R) \subset \mathbb{C}^4_{w^i,w^{i+1}} \times \mathbb{C}^2_t \times \mathbb{C}^{n+1}_y$ et $\Delta(0,R) \subset \mathbb{C}^2_{w^i} \times \mathbb{C}^2_t \times \mathbb{C}^{n+1}_y$ respectivement. De même, on peut supposer que $l_{t_1-w^1_1}(y)$ est holomorphe et bornée par M sur $\Delta(0,R) \subset \mathbb{C}_{w^1_1} \times \mathbb{C}_{t_1} \times \mathbb{C}^{n+1}_y$. On peut aussi supposer (car on étudie le problème localement) que v est holomorphe sur $\mathcal{R}(\Delta_y(0,R)-L)$. On note $\pi : \mathcal{R}(\Delta_y(0,R)-L) \to \Delta_y(0,R)-L$ la surjection canonique du revêtement. Soit $z \in \mathcal{R}(\Delta_y(0,R)-L)$; v définit, au voisinage du point $\pi(z) = y^0$, un germe holomorphe que l'on note encore v et que l'on peut supposer borné par M' sur le polydisque $\Delta_y(y^0,\eta r) \subset \Delta_y(0,R)-L$ où $\eta > 1$ et $r > 0$ sont fixés.

Nous allons, à présent, majorer indépendamment de p

$$r_p(t,y,D')v(y)$$

sur un voisinage de $(0,y^0)\in\mathbb{C}^2_t\times\mathbb{C}^{n+1}_y$ indépendant lui aussi de p.

On note, pour tout $p\geqslant 1$,

$$\widetilde{r}_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)=\widetilde{r}_{w^p}(t,y,D')\prod_{i=1}^{p-1}\widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')(l_{t_1-w_1^1}\cdot v)(y)$$

(avec $\prod_{i=1}^{0}\equiv 1$).

Montrons, à présent, le lemme fondamental suivant

Lemme 4.6. — *Il existe une constante c positive telle que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, pour tout $(w^1,\dots,w^p,t)\in\Delta(0,R)\subset\mathbb{C}^{2p}_w\times\mathbb{C}^2_t$, on ait*

$$\widetilde{r}_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)\ll c^{p+1}D^p\Phi,$$

où

$$\Phi(\xi)=M'\frac{r}{r-\xi}\qquad \textit{avec } \xi=\sum_{i=0}^{n}(y_i-y_i^0).$$

Démonstration. — Nous ne montrerons que le cas $p\geqslant 2$, le cas $p=1$ étant d'une adaptation évidente. On note tout d'abord

$$c=\max\Big\{c(0,M,\eta,r),c(1,M,\eta,r)\Big\},$$

où les constantes $c(0,M,\eta,r)$ et $c(1,M,\eta,r)$ sont données par la proposition 4.5. On fixe, à présent, $p\in\mathbb{N}^*$ et $(w^1,\dots,w^p,t)\in\Delta(0,R)\subset\mathbb{C}^{2p}_w\times\mathbb{C}^2_t$.

v est holomorphe sur $\Delta_y(y^0,r)$ et est bornée par M' car $\eta>1$, donc $v\in\mathbb{C}\{y-y^0\}$ et d'après la proposition 4.3, on a

$$v\ll\Phi.$$

On peut voir la fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}$, $y\mapsto l_{t_1-w_1^1}(y)$ (on rappelle que $(w^1,\dots,w^p,t)$ est fixé) comme un opérateur d'ordre 0 dont le coefficient est borné par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0,\eta r)$; de plus, on a $(r-\xi)\Phi(\xi)\gg 0$ d'après la proposition 4.4. Par conséquent, vu que $v\ll\Phi$, on en déduit, d'après la proposition 4.5, que

$$l_{t_1-w_1^1}\cdot v\ll c\Phi.$$

Montrons, à présent, par récurrence sur j, que

$$\Big[\prod_{i=1}^{j}\widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{i+1},y,D')\Big]\big(l_{t_1-w_1}\cdot v\big)\ll c^{j+1}D^j\Phi.$$

Pour $j=1$, on a

$$l_{t_1-w_1^1}\cdot v\in\mathbb{C}\{y-y^0\}\tag{6}$$

et

$$\widetilde{r}_{w^1-w^2}(t-w^2,y,D')$$

est un opérateur holomorphe d'ordre 1 dont les coefficients (à valeurs dans $\mathbb{C}$ car $(w^1,\dots,w^p,t)$ est fixé) sont bornés par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0,\eta r)$. De plus, on a $(r-\xi)(c\Phi(\xi)) \gg 0$ d'après la proposition 4.4. Donc, vu que (6) est majorée par $c\Phi$, on a, d'après la proposition 4.5,

$$\widetilde{r}_{w^1-w^2}(t-w^2,y,D')\big(l_{t_1-w_1^1}\cdot v\big)(y) \ll c^2 D\Phi,$$

ce qui prouve le résultat pour $j=1$. On suppose le résultat vrai à l'ordre $j-1$ et montrons-le à l'ordre j.

$$\left[\prod_{i=1}^{j-1}\widetilde{r}_{w^i,w^{i+1}}(t-w^{j+1},y,D')\right]\big(l_{t_1-w_1^1}\cdot v\big) \tag{7}$$

appartient à $\mathbb{C}\{y-y^0\}$ et

$$\widetilde{r}_{w^j-w^{j+1}}(t-w^{j+1},y,D')$$

est un opérateur holomorphe d'ordre 1 dont les coefficients (à valeurs dans $\mathbb{C}$ car $(w^1,\dots,w^p,t)$ est fixé) sont bornés par M sur le polydisque $\Delta_y(y^0,\eta r)$. De plus, on a $(r-\xi)(c^jD^{j-1}\Phi(\xi)) \gg 0$ d'après la proposition 4.4. Donc, vu que, par hypothèse de récurrence, (7) est majorée par $c^jD^{j-1}\Phi$, on a, d'après la proposition 4.5,

$$\left[\prod_{i=1}^{j}\widetilde{r}_{w^i-w^{i+1}}(t-w^{j+1},y,D')\right]\big(l_{t_1-w_1^1}\cdot v\big) \ll c^{j+1}D^j\Phi,$$

ce qui prouve le résultat.

En réitérant le même raisonnement pour

$$\widetilde{r}_{w^p}(t,y,D'),$$

on termine aisément la preuve du lemme. □

On déduit de ce qui précède qu'il existe une constante $c_1>0$ telle que pour tout $y\in\Delta_y(y^0,r')$, où $r'<r/(n+1)$ et pour tout $(w^1,\dots,w^p,t)\in\Delta(0,R)\subset\mathbb{C}_w^{2p}\times\mathbb{C}_t^2$, on ait, d'après la proposition 4.1,

$$|\widetilde{r}_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)| \leqslant c_1^p p!$$

car pour tout $y\in\Delta_y(y^0,r')$, $D^p\Phi(|\xi_0|,\dots,|\xi_n|)\leqslant M'r'\widetilde{c}^{p+1}p!$, où $\widetilde{c}$ est une constante ne dépendant que de r'.

On choisit, à présent, un polydisque $\Delta\subset\Delta_t(0,R)\times\Delta_x(0,R)$ centré en l'origine de $\mathbb{C}_t^2\times\mathbb{C}_x^{n+1}$ tel que

$$\phi(\Delta)\subset\Delta_y(0,R).$$

On a alors pour tout $\widehat{z}\in\mathcal{R}(\Delta-L')$, l'existence d'un voisinage V de $\widehat{\pi}(\widehat{z})=(t^0,x^0)$ (où $\widehat{\pi}:\mathcal{R}(\Delta-L')\to\Delta-L'$ désigne la surjection canonique) inclus dans $\Delta-L'$ et d'une constante c_2 tels que pour tout $(t,x)\in V$

$$\left|\widetilde{r}_p(w^1,\dots,w^p,t,y,D')v(y)_{\big|y=\phi(t,x)}\right| \leqslant c_2^p p!.$$

On a donc, pour tout $(t,x)\in V$,

$$\begin{aligned}\Big|r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}\Big| &\leqslant \int_0^1 ds_1^p\int_0^1 ds_2^p\int_{s_1^p}^1 ds_1^{p-1}\int_{s_2^p}^1 ds_2^{p-1}\cdots\int_{s_1^2}^1 ds_1^1\int_{s_2^2}^1\\ &\qquad\qquad \Big|t_1^pt_2^p\widetilde{r}_p(s_1t_1,s_2t_2,t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}\Big|ds_2^1\\ &\leqslant \int_0^1 ds_1^p\int_0^1 ds_2^p\int_{s_1^p}^1 ds_1^{p-1}\int_{s_2^p}^1 ds_2^{p-1}\cdots\int_{s_1^2}^1 ds_1^1\int_{s_2^2}^1 c_3^p p!ds_2^1\\ &\leqslant \frac{c_3^p}{p!}\end{aligned}$$

où $s_it_i=(s_i^1t_i,\dots,s_i^pt_i)$ pour $i=1,2$. La dernière inégalité provenant du fait que pour $i=1,2$

$$\int_0^1 ds_i^p\int_{s_i^p}^1 ds_i^{p-1}\cdots\int_{s_i^2}^1 ds_i^1=\frac{1}{p!}.$$

La convergence de la série (5) sur $\mathcal{R}(\Delta-L')$ découle de l'inégalité

$$\Big|r_p(t,y,D')v(y)\big|_{y=\phi(t,x)}\Big|\leqslant\frac{c_3^p}{p!}.$$

On a ainsi l'existence d'une fonction holomorphe f sur $\mathcal{R}(\Delta-L')$ telle que l'on ait, au voisinage du point a,

$$u(x)=\int_0^{x_0}dt_2\int_0^{x_0-t_2}f(t,x)dt_1.$$

L'étude du prolongement analytique d'une telle intégrale est classique. En effet, la méthode consiste en la déformation continue de la classe d'homologie relative du simplexe d'intégration. On pourra trouver plus de détails dans [**1, 5, 8, 9, 10, 13**].

5. Quelques exemples

Nous présentons, ici, quelques exemples de détermination de lieux singuliers pour certains problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases}a(x,D)u(x)=v(x),\\ u(x)=D_0u(x)=0 \text{ pour } x_0=0.\end{cases}$$

On désignera par $g(x,\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $a(x,D)$.

Exemple 5.1. — Si

– $g(x,\xi)=(\xi_0-a\xi_1-b\xi_2)\xi_0$ où $a,b\in\mathbb{C}^*$,

– v est holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega-(K_1\cup K_2\cup L_1\cup L_2))$ où Ω est un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et

$$\begin{aligned}K_1&=\{x_1=0\} & K_2&=\{x_2=0\},\\ L_1&=\{x_1+ax_0=0\} & L_2&=\{x_2+bx_0=0\},\end{aligned}$$

alors v est ramifiée autour des caractéristiques de $a(x,D)$ issues de $T_i : x_i = x_0 = 0$ pour $i = 1, 2$.

Il existe un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tel que la solution u soit holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' - (K_1 \cup K_2 \cup L_1 \cup L_2 \cup \widetilde{L}))$ où

$$\widetilde{L} = \{bx_1 - ax_2 = 0\}.$$

Exemple 5.2. — Si

– $g(x,\xi) = (\xi_0 + x_2\xi_1)\xi_0$,

– v est holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbb{C}^{n+1} - (K_1 \cup K_2))$ où

$$K_1 = \{x_1 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - x_2x_0 = 0\},$$

– $a(x,D)$ est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur tout $\mathbb{C}^{n+1}$,

la solution u est alors holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbb{C}^{n+1} - (K_1 \cup K_2 \cup \widetilde{L}))$ où

$$\widetilde{L} = \{x_2 = 0\}.$$

Exemple 5.3. — Si

– $g(x,\xi) = (\xi_0 + 2x_2\xi_1 + x_3\xi_2)\xi_0$,

– $v \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(\mathbb{C}^{n+1} - (K_1 \cup K_2)))$ où

$$K_1 = \{x_1 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - 2x_2x_0 + x_3x_0^2 = 0\},$$

– $a(x,D)$ est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur tout $\mathbb{C}^{n+1}$,

la solution u est alors holomorphe sur $\mathcal{R}(\mathbb{C}^{n+1} - (K_1 \cup K_2 \cup \widetilde{L}))$ où

$$\widetilde{L} = \{(x_1x_3 - x_2^2)x_3 = 0\}.$$

Exemple 5.4. — Si

– $g(x,\xi) = (\xi_0 - \xi_1 - \xi_2)\xi_0$,

– v est holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega - (K_1 \cup K_2))$ où Ω est un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et

$$K_1 = \{x_1 - x_0 = 0\} \qquad K_2 = \{x_1 - x_0 - (x_2 - x_0)^2 = 0\},$$

il existe alors un voisinage ouvert connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tel que la solution u soit holomorphe sur $\mathcal{R}(\Omega' - (K_1 \cup K_2 \cup L_1 \cup L_2 \cup \widetilde{L}))$ où

$$L_1 = \{x_1 = 0\}, \quad L_2 = \{x_1 - x_2^2 = 0\} \quad \text{et} \quad \widetilde{L} = \{x_1 - x_2 = 0\}.$$

Références

[1] R. Camalès – « Monodromie de problème de Cauchy ramifié & ramification autour d'un ensemble analytique », Université Paul Sabatier, Toulouse, 2002.

[2] ______, « Sur la monodromie du problème de Cauchy ramifié », *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), p. 603–640.

[3] L. Gårding, T. Kotake & J. Leray – « Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées (Problème de Cauchy I bis et VI) », *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), p. 263–361.

[4] Y. Hamada, J. Leray & C. Wagschal – « Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle », *J. Math. Pures Appl.* **55** (1976), p. 297–352.

[5] T. Kobayashi – « On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain », *Math. Ann.* **269** (1984), p. 217–234.

[6] E. Leichtnam – « Le problème de Cauchy ramifié », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **23** (1990), p. 369–443.

[7] J. Leray – « Uniformisation de la solution du problème de linéaire analytique de cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (problème de Cauchy I) », *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), p. 349–443.

[8] ______, « Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique », *Bull. Soc. Math. France* **95** (1967), p. 313–374.

[9] N. Nilsson – « Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds », *Arkiv Math.* **55** (1963), p. 463–476.

[10] F. Pham – « Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau », *Mémorial Sci. Math.* **164** (1967).

[11] P. Pongérard & C. Wagschal – « Ramification non abélienne », *J. Math. Pures Appl.* **77** (1998), p. 51–88.

[12] C. Wagschal – « Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques holomorphes de multiplicité variable », *J. Math. Pures Appl.* **62** (1983), p. 99–127.

[13] ______, « Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes », *J. Math. Pures Appl.* **67** (1988), p. 1–21.

[14] ______, « Équations aux dérivées partielles holomorphes », 1997, École du Cimpa-Unsa-Unesco-Vietnam Ho Chi Minh Ville.

R. Camalès, UFR MIG, Laboratoire MIP, Université P. Sabatier, 118 route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France • *E-mail :* `camales@mip.ups-tlse.fr`
E-mail : `renaud_camales@yahoo.fr`