# PREFACE

En 1999 s'est tenue à Kénitra une école d'été sur le thème *Analyse sur les goupes de Lie et théorie des représentations.* Chacun des cours qui y était donné présentait un développement récent dans ce domaine. Parallèlement un séminaire a permis aux participants de présenter leurs travaux. Ce volume rassemble les notes de trois des cours, rédigés dans le souci de rendre accessibles de nouvelles directions à des chercheurs en analyse harmonique :

Michèle Vergne : *Cohomologie équivariante et théorème de Stokes*

François Rouvière : *Espaces de Damek Ricci, géométrie et analyse*

Jacques Faraut : *Espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes*

La cohomologie équivariante, introduite par N. Berline et M. Vergne, permet d'établir une formule de la phase stationnaire exacte. Dans ce cours on présente la cohomologie équivariante dans le cas de l'action du cercle sur une variété, et son calcul explicite lorsque la variété est un espace vectoriel. En utilisant un théorème de partition de l'unité en cohomologie équivariante due à P. Paradan, on établit une formule de localisation qui permet d'exprimer l'intégrale d'une forme équivariante fermée comme une somme sur l'ensemble des points fixes lorsqu'ils sont isolés. L'exemple de l'action du cercle sur un espace projectif est étudié en détail. Une application en est donnée au calcul de l'intégrale de l'exponentielle sur un polyèdre convexe. On montre enfin comment la formule de localisation permet d'obtenir le théorème de Duistermaat-Heckman.

Une variété riemannienne est dite harmonique si le laplacien d'une fonction radiale est aussi radiale. Les espaces riemanniens symétriques de rang un sont harmoniques. La question de savoir si ce sont les seules variétés harmoniques, soulevée par A. Lichnérowicz, est restée ouverte jusqu'à ce que E. Damek et F. Ricci construisent une large famille de variétés harmoniques qui ne sont pas symétriques en général. Ces variétés sont appelées depuis espaces de Damek-Ricci. La plus petite dimension d'un espace de Damek-Ricci non symétrique est égale à 7. Ce cours présente cette contruction. Elle utilise les algèbres de Lie nilpotentes de type Heisenberg qui avaient été introduites par A. Kaplan, et qui sont en relation avec les représentations des algèbres de Clifford. On y développe ensuite l'analyse de Fourier d'un tel espace qui ressemble à celle d'un espace symétrique de rang un de type non compact. Mais les démonstrations sont plus délicates car en général un espace de Damek-Ricci n'est pas doublement transitif.

L'ensemble des sous-espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes sur une variété complexe qui sont invariant par un groupe d'automorphisme possède une structure de cône convexe. La théorie de Choquet permet de les analyser, et de donner une représentation intégrale de leurs noyaux reproduisants. Une condition géométrique simple, proposée par J. Faraut et E. Thomas, en assure l'unicité. On étudie en particulier le cas où la variété complexe est un domaine dans la complexification d'un espace riemannien symétrique compact, et on y expose les travaux de M. Lassale sur les séries de Laurent. Une application en est donnée à la transformation de Bargmann-Segal.

Cette école d'été, organisée et financée conjointement par le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) et plusieurs universités marocaines, s'est déroulée à Kénitra du 19 juillet au 4 août 1999. Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à ces organismes pour leur invitation, et tout particulièrement aux Professeurs Mohamed Akkouchi et Allal Bakali pour la qualité de l'organisation et leur accueil à l'université Ibn Tofail de Kénitra.

# SÉMINAIRE

Un séminaire quotidien a permis aux participants de présenter leurs travaux de recherche. Ce séminaire a eu beaucoup de succès et les exposés étaient en général de grande qualité. Toutes les équipes d'analyse harmonique des universités marocaines étaient bien représentées. Citons les principaux thèmes du séminaire :

– Analyse sur les domaines de $\mathbb{C}^n$,
– Représentations des groupes localement compacts, paires de Gelfand,
– Transformation de Radon, analyse sur les espaces de Damek-Ricci,
– Analyse harmonique et fonctions spéciales,
– $*$-produits.

**Liste des exposés**

Mercredi 21 juillet

Ahmed Sebbar, *Zéros des noyaux de Bergman, points d'équilibre et formes de Jacobi*

Abdelkarim Bourouihia, *Sur les algèbres compactifiantes*

Salem Ben Said, *Espaces de Bergman pondérés et correspondance de Howe*

Jeudi 22 juillet

Abdel Latif Mortajine, *Covariants relatifs des espaces préhomogènes réguliers*

Carina Boyalian, *Orthogonal polynomials and representation theory*

Mohammed Mesk, *Polynômes de Laguerre de deux variables*

Vendredi 23 juillet

Mamour Sankhe, *Formules explicites d'un opérateur unitairement équivalent au Laplacien d'une nilvariété de rang quelconque*

Nour el Houda Mahmoud, *Algèbres de rang deux, trois et système de Bessel*

Raja Essoussi, *Distributions centrales sur le produit semi-direct* $S \ltimes \mathbb{H}$

Lundi 26 juillet

Abderrahmane Essadiq, *q-polynômes orhtogonaux associés aux q-espaces de type q-Bergman*

Mohamed Ould Mustapha, *Noyau de la chaleur sur la boule unité de* $\mathbb{C}^n$

Mardi 27 juillet

Fatima Bouchiba, *Caractérisation des transformées de Bargmann des fonctions d'onde de Bloch de carré intégrable sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Khadija Ayaz, *Formule des traces de Selberg pour l'opérateur des ondes sur les formes automorphes de poids k sur la boule de* $\mathbb{C}^n$

Abdelhamid Boussejra, *Système de Hua et intégrale de Poisson-Shilov dans la boule matricielle de rang deux*

Mercredi 28 juillet

Omar El Fourchi, *Transformation de Radon horocyclique sur l'espace de Damek-Ricci*

Hassan Sami, *Noyau de Poisson sur certains groupes $NA$*

Radouan Daher, *Sur la transformation d'Abel*

Vendredi 30 juillet

Angella Gammella, *Produits-star tangentiels pour les algèbres de Lie*

Meryem El Beggar, *Star-représentation*

My Hicham Laloui Rhali, *Une caractérisation des $*_\nu$-produits et des $*_\nu$-produits faibles*

Belaid Bouikhalene, *Sur la paire $\big(SO(n+2), SO(n)\big)$*

Lundi 2 août

Taieb Daamache, *Groupe affine, fonctions et polynômes d'Hermite*

Mardi 3 août

Karim Ankabout, *Extension de la relation d'orthogonalité de Schur*

Samir Kabbaj, *Sur la série discrète d'un groupe localement compact*

Mohammed Ait Sibaha, *Caractérisation des fonctions $\mu$-sphériques par des équations intégro-différentielles*

Mohammed Akkouchi, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*

## Résumé des exposés

**Horocyclic Radon transform on a Damek-Ricci space,** Ahmed Abouelaz & Omar El Fourchi

We study the horocycle Radon transform on a Damek-Ricci space. This transform is obtained by integration over an orbital family of a Damek-Ricci space. We establish an inversion formula for this transform and for its dual transform. This is inverted by an integro-differential operator, and the inversion formula which is obtained is similar to the inversion formula in the case of non compact symmetric spaces. As an application, we prove a version on a Damek-Ricci space of the following theorem : Let $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a doubly infinite sequence of functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying

$$\begin{aligned} &\Delta f_k = f_{k+1},\ \forall\, k\in\mathbb{Z}, \quad \text{(equality in the distribution sense)}\\ &\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ k\in\mathbb{Z}}} |f_k(x)| < +\infty, \end{aligned}$$

then $\Delta f_0 + f_0 = 0$ (where $\Delta$ is the Laplacian on $\mathbb{R}^n$). Also we give a characterization of the range of the spherical Fourier transform of compactly supported radial distributions.

Faculté des Sciences Ain Chock
Université Hassan II
BP 53366, Casablanca
abouelaz@facsc-achok.ac.ma, elfourchi@hotmail.com

**Caractérisation des fonctions $\mu$-sphériques, par des équations intégro-différentielles,** Mohammed Ait Sibaha

Dans cet exposé nous donnons une caractérisation des fonctions $\mu$-sphériques définies dans les travaux d'Akkouchi et Bakali, en montrant que ce sont exactement les fonctions propres communes de certains opérateurs intégro-différentiels associés aux opérateurs différentiels invariants à gauche sur un groupe de Lie connexe, lorsque la mesure $\mu$ est à support compact.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000

**Extension de la relation d'orthogonalité de Schur,** Karim Ankabout

On définit une application positive sur l'espace des fonctions infiniment différentiables sur l'espace symétrique réductif réel $G/H$. L'ensemble des fonctions infiniment différentiables sur $G/H$, propres sous l'action de l'algèbre des opérateurs différentiels $G$-invariants, et dont leur image par cette application est finie, de même que leurs dérivées par les éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $G$, est un espace vectoriel. De plus, cette application est une semi-norme sur ce dernier. Nous montrons que les éléments sphériques de cet espace vectoriel sont tempérés. Réciproquement, on démontre que toute fonction tempérée sur $G/H$, sphérique, et propre sous l'action de l'algèbre des opérateurs différentiels $G$-invariants pour un caractère de paramètre d'Harish Chandra régulier, est élément de cet espace. Plus précisément, on explicite cette semi-norme pour ces fonctions étudiées à l'aide de leurs termes constants. On établit ainsi que cette semi-norme est une norme qui dérive d'un produit scalaire.

Nous remarquons que, lorsque $G/H$ possède des séries discrètes, et lorsque le paramètre d'Harish Chandra définissant ce caractère régulier est réel, ces fonctions sont de carré intégrable et cette norme coïncide avec la norme $L^2$. Ce travail offre d'une manière naturelle un moyen nouveau qui permet de se confronter à des questions d'intérêt actuel de la théorie des représentations ; ce que nous constatons à travers un exemple d'application. D'où l'originalité de ce travail.

Toute la difficulté de la preuve consiste à se ramener au cas des fonctions (certaines restrictions des termes constants) de carré intégrable sur des espaces symétriques réductifs réels admettant des séries discrètes. On y parvient grâce à un bon contrôle de la différence entre ces fonctions et leurs termes constants, qui s'obtient en passant par une analyse minutieuse des conséquences de notre hypothèse de régularité sur les développements convergents de ces fonctions et de leurs termes constants. Nous exploitons ensuite cette majoration en utilisant des calculs d'intégrales reposant sur un découpage convenable des chambres de Weyl, et la théorie du terme constant (J. Carmona), dont l'utilisation est rendue possible grâce encore à nos hypothèses de régularité et de tempérence. Une utilisation répétée du théorème de la convergence dominée et du lemme de Riemann-Lebesgue permet alors de clore la preuve de ce résultat.

Nous remarquons que lorsque $G = G_1 \times G_1$ et $H$ la diagonale de $G$, $G/H$ s'identifie à $G_1$. Notre travail généralise donc celui de Haisichi Midorikawa dans le cas des groupes. Nous pensons d'autre part que, même dans ce cas, notre formule explicite du produit scalaire n'a jamais été abordée.

Appliqués aux 'intégrales d'Eisenstein', qui sont des coefficients généralisés de représentations, ces résultats donnent une extension des relations d'orthogonalité de Schur.

Institut de Mathématiques de Luminy
Marseille
ankabout@iml.univ-mrs.fr

**Formule des traces de Selberg pour l'opérateur des ondes sur les formes $\Gamma$-automorphes de poids $k$ dans la boule de Bergman $B_n$, $n \geqslant 1$,** Khadija Ayaz & Ahmed Intissar

Pour une variété quotient compacte de la boule de Bergman $M = \Gamma \backslash B_n$, on donne une formule explicite de la trace distributionnelle de Selberg associée aux opérateurs des ondes sur les formes $\Gamma$-automorphes de poids $k$ dans la boule de Bergman $B_n$, $n \geqslant 1$.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat
Univesité Mohammed V
Rabat
K.ayaz@mail.com

**Espaces de Bergman pondérés et correspondance de Howe,** Salem Ben Saïd

Dans ce travail nous donnons une nouvelle approche, en utilisant la dualité et la correspondance de Howe, pour décrire la décomposition de l'espace de Bergman pondéré $\mathscr{H}_k^2(D)$ en sous-espaces irréductibles invariants pour l'action de $U(p,q) \times U(p,q)$ où

$$D := \{z \in M(n,\mathbb{C}) \mid I_n - zz^* \gg 0\},$$

et

$$\mathscr{H}_k^2(D) := \Big\{ f \in \mathscr{O}(D) \mid \int_D |f(z)|^2 \det(I_n - zz^*)^{k-2n} dz < \infty \Big\},$$

avec $n = p + q$ et $k \geqslant 2n$. De plus nous explicitons la correspondance de Howe pour la paire duale $\big(U(p,q), U(k)\big) \subset Sp(2nk, \mathbb{R})$.

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
Case 82, 4 place Jussieu, 75 252 Paris Cedex 05
bssalem@math.jussieu.fr

**Characterization of Bargmann transforms of $L^2$-Bloch wave functions on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,** Fatima-Zahra Bouchiba & Ahmed Intissar

In this work we characterize the Bargmann transforms of the $L^2$-Bloch wave functions on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. The Bargmann transform is a unitary mapping from $L^2(\mathbb{R}^n)$ onto the Fock-Bargmann space $\mathscr{F}(\mathbb{C}^n)$. We also give a characterization of the Bargmann transforms of $L^2 - \Gamma$-periodic functions for a given lattice $\Gamma$ in $\mathbb{R}^n$. This allows us to give an explicit formula for the integral kernel of some generalized Wannier transform.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat
Univesité Mohammed V
Rabat
bouchiba@hotmail.com

**Sur la paire $\big(SO(n+2), SO(n)\big)$,** Belaid Bouikhalene

Pour $n \geqslant 3$, notons $L_1^{\natural}\big(SO(n+2)\big)$ l'algèbre des fonctions intégrables biinvariantes par $SO(n)$. Comment se fabriquent les représentations irréductibles irréductibles de $L_1^{\natural}\big(SO(n+2)\big)$ ? La réponse est donnée par deux méthodes, la première à partir des représentations irréductibles de $SO(n+2)$, la seconde en termes de fonctions de type positif.

L'algèbre $L_1^{\natural}\big(SO(n+2)\big)$ est isomorphe à $L^1(\mathbb{D}_2, \sigma_{\mathbb{D}_2})$ où $\mathbb{D}_2$ est le biquotient $SO(n)\backslash SO(n+2)/SO(n)$ qui admet plusieurs réalisations, dont la réalisation matricielle est la plus importante ; $\sigma_{\mathbb{D}_2}$ est la mesure quotient sur $\mathbb{D}_2$. L'espace $M_1(\mathbb{D}_2)$ des mesures bornées sur $\mathbb{D}_2$ hérite alors d'une loi '$*_{\mathbb{D}_2}$' et d'une involution qui en font une algèbre de Banach involutive non commutative. L'espace $L_1(\mathbb{D}_2, \sigma_{\mathbb{D}_2}, *_{\mathbb{D}_2})$ est un idéal bilatère fermé de $M_1(\mathbb{D}_2)$ dont les représentations irréductibles sont toutes obtenues à partir de celles de $SO(n+2)$ de manière naturelle.

Dans la réalisation matricielle de $\mathbb{D}_2$, le groupe $SO(2)$ opère par multiplication à droite et à gauche, ces actions proviennent de celle du groupe

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & SO(2) \end{pmatrix} \simeq SO(2)$$

dans $SO(n+2)$. Il est à remarquer que les actions des groupes $SO(2)$ et $SO(n)$ commuttent dans $SO(n+2)$. Notons $T$ le biquotient $SO(2)\backslash\mathbb{D}_2/SO(2)$, et $\sigma_T$ la mesure quotient sur $T$. Les caractères $\chi$ de l'algèbre commutative $L_1(T, \sigma_T, *_T)$ sont des polynômes sur $T$ orthogonaux par rapport à $\sigma_T$. Les fonctions $\chi \circ \phi$ sont de type positif sur $\mathbb{D}_2$, où $\phi$ est une application continue sur $\mathbb{D}_2$ à valeurs dans $T$.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000

**Notion d'algèbre compactifiante,** Abdelkarim Bourouihiya

Soit $\mathscr{A}$ un sous-ensemble de $\mathscr{L}_\infty(\mathscr{H})$, l'espace des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. On appelle compactifiante de $\mathscr{A}$ l'algèbre

$$\mathscr{A}^0 = \{T \in \mathscr{L}_\infty(\mathscr{H}) \mid AT \text{ et } TA \text{ sont compacts}, \ \forall\, A \in \mathscr{A}\}.$$

Cette notion nouvelle a été introduite dans le but de caractériser les $C^*$-algèbres de certains groupes dont le groupe affine, et celui-ci nous a conduit à montrer que la caractérisation est insuffisante dans certains cas. Cependant on a pu entre autre donner des procédés de construction d'opérateurs compacts sur $L^2(G)$, où $G$ est un groupe localement compact.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000

**Orthogonal polynomials and representation theory,** Corina Boyallian

We give the Bernstein polynomial for basic matrix entries of irreducible unitary representations of the compact Lie group $SU(2)$. We also give an application to the analytic continuation of certain distributions on $SU(2)$, and finally we briefly describe the Bernstein polynomial for $B\times B$-semi-invariant functions on a semi-simple complex Lie group.

Famaf-Univ. Nac. de Cordoba
Ciudad Universitaria (5000) Cordoba, Argentian
boyallia@mate.uncor.edu

**Réalisation d'une série discrète holomorphe du groupe $SU(1,n)$ en tant que star-représentation,** Meryem El Beggar

La 'nouvelle' méthode des orbites, introduite par Fronsdal et Flato, est un développement de la méthode usuelle qui a débuté avec les travaux de A. Kirillov. Son but est la réalisation des représentations irréductibles unitaires par déformation. Donnons-en le principe :

Soit $\mathscr{O}$ une orbite coadjointe de $G$. Pour chaque vecteur $X$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$, nous définissons la fonction $\widetilde{X}$ sur $\mathscr{O}$ par

$$\widetilde{X}(\xi) = \langle \xi, X\rangle \quad (\xi \in \mathscr{O}),$$

et un star-produit sur $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{O})$,

$$u * v = \sum_{n\geqslant 0} \nu^n C_n(u,v),$$

où $\nu$ est un paramètre formel. Puis nous extrayons une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{O})$ involutive pour le produit $*$ et la conjugaison complexe des fonctions. Cette construction du produit $*$ suffisament régulier sur $\mathscr{A}$ permet la construction et la classification naturelle des représentations unitaires irréductibles $T$ de $\mathscr{A}$ . Nous obtenons ainsi celles de $\mathfrak{g}$, notées $\pi_T$ définies par

$$\pi_T(X) = T(i\widetilde{X}).$$

Par ce procédé nous obtenons tout ou une partie du dual unitaire $\widehat{G}$. Ce processus a été réalisé par D. Arnal et J. Cortet dans le cas d'un groupe nilpotent simplement connexe, puis pour un groupe exponentiel en utilisant le produit de Moyal sur les orbites $\mathscr{O}$. Enfin, avec J. Ludwig, ils ont étudié le cas d'un groupe résoluble de type I.

Le cas d'un groupe de Lie semi-simple compact a été traité par Wildberger à l'aide du produit $*$ de Berezin sur les orbites coadjointes. Ce programme est bâti sur le calcul symbolique qui associe à chaque opérateur de l'espace d'une repésentation irréductible $\pi$ de $G$ une fonction sur $\mathscr{O}$ associée à $\pi$. Ce calcul est défini par une méthode d'états cohérents.

Dans ce travail on applique cette méthode pour réaliser une série discrète holomorphe du groupe de Lie semi-simple non compact $SU(1, n)$. Pour cela on suit la démarche qui est utilisée par M. Yahyai dans la réalisation du dual unitaire du revêtement du groupe hyperbolique $SL_2(\mathbb{R})$.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000
elbeggar@hotmail.com

### $q$-analogue of Bargmann unitary transform associated to the $q$-continuous Laguerre polynomials, Abderrahman Essadiq & Ahmed Intissar

To the $q$-continuous Laguerre polynomials $\{L_n^\alpha(x, q)\}_n$ on the real half line $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$, we associate a family of Hilbert spaces $H_q^{2,\alpha}(D)$ of analytic functions on the unit disk $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, and we will give a $q$-analogue of the unitary integral transform that V. Bargmann constructed from the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^+, x^\alpha \exp(-x)dx)$ onto the weighted Hilbert space $H_q^{2,\alpha}(D)$.

Following the same scheme we can establish similar results for the $q$-continuous Gegenbauer polynomials and the $q$-Hermite polynomials.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat
Univesité Mohammed V
Rabat

### Star-produits tangentiels pour les algèbres de Lie, Angela Gammella

En général il n'existe pas de star-produit différentiel et tangentiel sur le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, c'est à dire de star-produit différentiel sur $\mathfrak{g}^*$ qui se restreigne aux orbites coadjointes.

Dans cet exposé on parvient à contourner cette difficulté dans le cas nilpotent en supprimant l'aspect différentiel ou en affaiblissant la notion de tangentialité. Plus précisément, nous présentons deux résultats valables pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente. D'une part nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence de star-produits tangentiels, gradués, différentiels ou non, sur l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. D'autre part nous montrons qu'il existe toujours un star-produit tangentiel, gradué et différentiel sur la variété des orbites de dimension maximale. Finalement on illustre ces résultats par des calculs explicites sur $\mathfrak{g}_{54}$, un exemple typique d'algèbre de Lie nilpotente posant des problèmes de tangentialité.

Laboratoire MMAS UPES-A CNRS 7035
Université de Metz, Ile de Saulcy,
57 045 Metz Cedex 1, France
gammella@poncelet.univ-metz.fr

**Sur la série discrète d'un groupe localement compact,** Samir Kabbaj

L'exposé sera partagé en trois paragraphes. Dans le premier je rappelerai les notions d'unités de $G$ et d'élément modéré dans $L^2(G)$ ($G$ est un groupe localement compact). Puis je donnerai une caractérisation des sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(G)$, stables par translations à gauche. Le sujet du deuxième paragraphe est la caractérisation des sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(G)$ stables par translations à gauche minimaux vis à vis de la représentation régulière gauche. Enfin, dans le troisième paragraphe, on donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe localement compact admette une r.u.c.i. de carré intégrable.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Kénitra
Université Ibn Tofail
BP 133 Kénitra 14000

**Caractérisaation des $*_\nu$-produits et des $*_\nu$-produits faibles,** My Hicham Lalaoui Rhali

La mécanique classique se fonde sur la structure symplectique de l'espace des phases muni de la 2-forme $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, exprimée en coordonnées locales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Le crochet

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \Big( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \Big)$$

définit une algèbre de Poisson de dimension infinie sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. En mécanique quantique on remplace les variables dynamiques $p_i$, $q_i$ par des opérateurs $\widehat{p_i}$, $\widehat{q_i}$. J. Moyal a montré que le commutateur des opérateurs ne correspond pas au crochet de Poisson, mais à une série en les puissances de la constante de Planck $\nu$ dont le premier terme est ce crochet. Ainsi est née l'idée de formuler la mécanique quantique en substituant le crochet de Poisson aux déformations formelles appropriées, à savoir les $*_\nu$-produits et les $*_\nu$-produits de Vey.

Dans ce travail on montre que deux déformations formelles d'algèbre de Lie, dont la différence des cochaînes est le cobord de Chevalley d'un opérateur différentiel, sont faiblement équivalentes, puis on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $*_\nu$-produit faible soit un $*_\nu$-produit. Enfin on montre que, étant donné un $*_\nu$-produit faible de Vey, il existe un unique $*_\nu$-produit de Vey qui s'en déduit par produit par une constante.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
BP 2390, Marrakech
hmlalaoui@ucam.ac.ma

**Transformation de Poisson sur le groupe de Heisenberg,** HASSAN SAMI

Soit $H_m$ le groupe $m$-dimensionnel de Heisenberg et $\mathscr{L}$ le laplacien de la variété riemannienne $H_m \times \mathbb{R}_+^*$. Nous caractérisons les fonctions propres de $\mathscr{L}$ qui sont transformées de Poisson de fonctions de $L^2(H_m)$.

Faculté des Sciences Ain Chock
Université Hassan II
BP 53366, Casablanca
sami@facsc-achok.ac.ma

## COLLECTION SMF

### Série SÉMINAIRES ET CONGRÈS

7. J. FARAUT, F. ROUVIÈRE, M. VERGNE – *Analyse sur les groupes de Lie et théorie des représentations*
6. Geometry of Toric Varieties, L. BONAVERO et M. BRION, éditeurs
5. Arithmétique des revêtements algébriques (Actes du colloque de Saint-Étienne), B. DESCHAMPS, éditeur
4. Global Analysis and Harmonic Analysis, J.-P. BOURGUIGNON, T. BRANSON et O. HIJAZI, éditeurs
3. Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX$^e$ siecle (Actes du colloque à la mémoire de J. Dieudonné)
2. Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants, J. ALEV et G. CAUCHON, éditeurs
1. ARTHUR L. BESSE – *Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger*

### Série COURS SPÉCIALISÉS

10. C. VOISIN – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*
9. M. KASHIWARA – *Bases cristallines des groupes quantiques (rédigé par C. Cochet)*
8. M. AUDIN – *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*
7. F. BERTELOOT, V. MAYER – *Rudiments de dynamique holomorphe*
6. O. DEBARRE – *Tores et variétés abéliennes complexes*
5. G. ROYER – *Une initiation aux inégalités de Sobolev logarithmiques*
4. Y. COLIN DE VERDIÈRE – *Spectres de graphes*
3. L. MANIVEL – *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*
2. G. TENENBAUM – *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres (en collaboration avec J. WU)*
1. G. TENENBAUM – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*