Séminaires & Congrès
5, 2001, p. 101–117

CORPS DES MODULES ET BONNES PLACES

par

Stéphane Flon

Résumé. — La considération des espaces des modules (espace de Hurwitz des modules grossier, gerbe et variété des modèles) permet ici de prouver un certain nombre de résultats connus : le théorème de Beckmann sur les premiers ramifiés dans le corps des modules, l'existence et l'unicité d'un bon modèle sur l'extension non ramifiée maximale du corps de rationalité du lieu de branchement en une bonne place, la stabilité d'un tel modèle. On exhibe enfin un exemple de descente donnant un *bon* modèle sur le complété du corps des modules en une bonne place.

***Abstract* (Moduli field and good places).** — A close look to moduli spaces (Hurwitz' coarse moduli space, gerbe and variety of models) allows us to prove several known results: Beckmann's theorem on ramified primes in the moduli field, existence and unicity of a good model on the maximal unramified extension at a good place of the rationality field of the branch locus, and stability of such a model. Lastly, one exhibits an example of descent to the completion of the field of moduli at a good place. One also shows the existence of a *good* model on this latter field.

1. Notions préliminaires sur les revêtements algébriques

1.1. Revêtements et G-revêtements. — Dans la suite, K est un corps et K^s désigne une clôture séparable fixée.

Définition 1.1. — Un *revêtement de la droite projective sur* K est un morphisme fini, plat, et génériquement étale $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ sur K, X étant une courbe projective lisse et géométriquement irréductible sur K.

Un *morphisme entre deux revêtements* $f_1 : X \to \mathbb{P}^1_K$ et $f_2 : X' \to \mathbb{P}^1_K$ est un morphisme $\phi : X \to X'$ tel que $f_2 \circ \phi = f_1$ (autrement dit, c'est un $\mathbb{P}^1_K$-morphisme de X vers X').

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14D22, 14E22, 14H30.
Mots clefs. — Corps des modules, espace de Hurwitz des modules grossier, (G-)revêtements, gerbe des modèles.

On sait qu'à un revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ est associée une extension finie régulière $K(X)/K(t)$ (où $K(t)$ est le corps des fractions rationnelles sur K). Cette correspondance fournit en fait une équivalence (contravariante) de catégories entre la catégorie des revêtements de $\mathbb{P}^1_K$ et celle des extensions finies régulières séparables de $K(t)$.

Si L est un corps contenant K, et $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ un revêtement sur K, on obtient un revêtement $f \times_K L$ sur L par extension des scalaires (de K à L).

Définition 1.2. — Soit $t_0 \in \mathbb{P}^1_K$; par *fibre géométrique du revêtement* f on entend l'ensemble $(f \times_K K^s)^{-1}(t_0)$, et on le note $f^{-1}(t_0)$.

Tout automorphisme de f agit sur une telle fibre.

Définition 1.3. — Un revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_K$, est dit *galoisien* si le groupe $\mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1_K)$ des automorphismes de f agit simplement transitivement sur toute fibre géométrique du revêtement. De façon équivalente, f est galoisien si et seulement si l'extension séparable $K(X)/K(t)$ est galoisienne.

Définition 1.4. — Un *G-revêtement de groupe G sur K* est la donnée conjointe d'un revêtement galoisien $f : X \to \mathbb{P}^1_K$ sur K, et d'un isomorphisme $h : G \to \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1_K)$ de G sur le groupe des automorphismes du revêtement.

Un *morphisme entre deux G-revêtements de groupe G*

$$(f_1 : X \to \mathbb{P}^1, h_1 : G \to \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1))$$

$$(f_2 : X' \to \mathbb{P}^1, h_2 : G \to \mathrm{Aut}(X'/\mathbb{P}^1))$$

est un isomorphisme $\phi : X \to X'$ de revêtements induisant un isomorphisme

$$\widetilde{\phi} : \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1) \to \mathrm{Aut}(X'/\mathbb{P}^1)$$

tel que $\widetilde{\phi} \circ h_1 = h_2$.

Définition 1.5. — On se donne un revêtement connexe $f : X \to \mathbb{P}^1_K$. On définit la *clôture galoisienne* $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{P}^1_K$ de f comme le revêtement correspondant à la clôture galoisienne de $K(X)/K(t)$ par l'équivalence précédemment citée.

Notation. — On écrit (G-)revêtement pour désigner indifféremment un revêtement ou un G-revêtement.

1.2. Invariants élémentaires d'un (G-)revêtement. — À un (G-)revêtement de $\mathbb{P}^1_K$ sont associés quatre invariants élémentaires (qui ne dépendent donc que de la classe d'isomorphisme du revêtement) :

– *Le degré du (G-)revêtement*, qui est le degré de l'extension $K(X)/K(t)$.

– *Le groupe de monodromie géométrique du (G-)revêtement*, qui est le groupe des automorphismes de la clôture galoisienne $\widehat{f} : \widehat{X} \to \mathbb{P}^1_{K^s}$ de f_{K_s}, groupe opposé au groupe de Galois de l'extension $K^s(\widehat{X}_{K^s})/K^s(t)$.

– *L'ensemble des points de branchement du (G-)revêtement*, $t_1, \ldots, t_r$, qui sont les points de la droite projective où la fibre géométrique possède moins de points que le degré du revêtement. On appelle le diviseur $(t_1)+\cdots+(t_r)$ le *diviseur de branchement du (G-)revêtement.*

Si x est un point de la fibre au-dessus d'un point de branchement t, les complétés des anneaux locaux de X en x et de $\mathbb{P}^1$ en t donnent une extension d'anneaux de valuation discrète. L'*indice de ramification* e_x de x est l'indice de ramification de cette extension. Le point x est appelé un *point de ramification* si $e_x > 1$ (bien sûr, il existe toujours au moins un point de ramification au-dessus d'un point de branchement). Si cette extension est séparable et que la caractéristique du corps résiduel ne divise pas l'ordre du groupe de monodromie, on dit que la ramification est *modérée* en x. Sinon, on dit que la ramification est *sauvage.* Si le revêtement f n'a pas de point de ramification, on dit qu'il est *non ramifié.* Un revêtement non ramifié est étale (un revêtement est plat par définition).

– *L'invariant canonique d'inertie du revêtement* : on fixe une clôture séparable K^s de K, et un système cohérent de racines de l'unité dans K^s, $(S_e)_{(e,p)=1}$, où S_e est une racine primitive e-ème de l'unité (p étant la caractéristique de K). Pour tout e premier à p, l'ensemble des racines e-èmes de l'unité (dans K^s) sera noté Ω_e.

Notons par $\{t_1, \ldots, t_r\}$ l'ensemble des points de ramification de f. On suppose que f est modérément ramifié en un certain point x_i au-dessus de t_i, l'indice de ramification étant noté e_{x_i}.

Le groupe d'inertie G_0 de l'extension correspondante est un groupe cyclique d'ordre e_{x_i}, car la ramification est modérée (*cf.* [**29**]). On note π une uniformisante locale de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$. L'application $G_0 \to \Omega_{e_{x_i}}$, qui à un élément s de G_0 associe l'élément $s(\pi)/\pi$ mod π est en fait un isomorphisme de groupes, indépendant du choix de π (*loc. cit.*). L'antécédent de $S_{e_{x_i}}$ par cet isomorphisme est le *générateur distingué de l'inertie en* t_i (qui dépend du système cohérent $(S_e)_{(e,p)=1}$ choisi).

On définit alors C_i comme la classe de conjugaison des générateurs d'inertie distingués au-dessus de t_i.

L'invariant canonique d'inertie du revêtement est le r-uplet (ordonné ou non selon que les points de ramification le sont ou pas) $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_r)$.

1.3. L'action de Galois sur les (G-)revêtements. — On considère une extension galoisienne L/K. Le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit de façon naturelle sur les (G-)revêtements sur L. En effet, donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_L$, et σ un élément du groupe de Galois de L sur K. Le *revêtement* f^σ résultant de l'action de σ sur f est défini par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} X^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "f^\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{P}^1_K \times_K L \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1_K} \times \sigma"'] & \mathbb{P}^1_K \times_K L \end{tikzcd}$$

On note G_K le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^s/K)$. Un élément σ de G_K agit sur tout (G-)revêtement f défini sur K^s. Les invariants de f^σ se déduisent de ceux de f : le groupe de monodromie de f^σ est le même que celui de f ; le diviseur de branchement de f est inchangé par l'action de σ dans le cas où il est défini sur K. Dans ce dernier cas, l'invariant canonique de l'inertie de f^σ se déduit de celui de f par action du caractère cyclotomique.

2. Corps des modules, corps de définition

Dans cette section, on introduit les notions de corps de définition et de corps des modules. On décrit sommairement l'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition.

Donnons-nous un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_{K^s}$ défini sur K^s, de groupe de monodromie G, et de diviseur de branchement défini sur K.

Définition 2.1. — Un sous-corps k de K^s est un *corps de définition* du revêtement (resp. du G-revêtement) f s'il existe un revêtement (resp. un G-revêtement) $f' : X' \to \mathbb{P}^1_k$ tel que f et $f' \times_k K^s$ soient deux revêtements (resp. G-revêtements) isomorphes ; un tel (G-)revêtement sera appelé un *modèle de f sur k*.

On considère une extension galoisienne L/K, ainsi qu'un (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1_L$, de lieu de branchement défini sur K. On a vu qu'un élément σ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ induit un (G-)revêtement $f^\sigma : X^\sigma \to \mathbb{P}^1_L$.

Soit $G(f) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid f^\sigma \simeq f\}$ où $f^\sigma \simeq f$ signifie que f^σ et f sont isomorphes *sur* L en tant que revêtements (resp. G-revêtements).

Définition 2.2. — Le *corps des modules du revêtement (resp. du G-revêtement) f relativement à l'extension L/K* est le corps $L^{G(f)}$; on le notera M (resp. M_G). On appellera *corps des modules d'un (G-)revêtement f relativement à K* le corps des modules relativement à K^s/K.

Le corps des modules de f relativement à K est une extension finie de K contenue dans chaque corps de définition de f contenant K. Le corps des modules d'un revêtement est donc d'une certaine façon le plus petit corps de définition possible pour le revêtement considéré. Ce n'est cependant pas toujours un corps de définition. On peut se référer à ce sujet aux articles [**4**], [**5**], [**6**], qui présentent des exemples de (G-)revêtements de corps des modules $\mathbb{Q}$, ne pouvant se définir sur $\mathbb{R}$, car ne possédant pas de données de descente de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

L'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition est assez bien connue ; dans le cas des G-revêtements, elle peut s'exprimer en termes de cohomologie abélienne (dans un H^2). On pourra consulter les articles [**7**] et [**8**] de P. Dèbes sur le sujet. P. Dèbes et J-C. Douai ont décrit dans [**9**] l'obstruction dans le cas des revêtements, qui se traduit cette fois en termes de cohomologie non abélienne, et fait intervenir toute une famille d'éléments d'un H^2 non abélien.

Ces résultats prouvent entre autres que l'obstruction est levée (*i.e.* le (G-)revêtement admet un modèle sur son corps des modules) dans le cas où G_K est un groupe projectif profini. Il en sera en particulier ainsi si K est de dimension cohomologique $\leqslant 1$ (par exemple lorsque K est fini).

3. Espace de Hurwitz sur un anneau, lien avec le corps des modules

3.1. Espaces des modules fins, espaces des modules grossiers. — On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles.

Définition 3.1. — Pour tout objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$, on note $\widehat{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ le foncteur contravariant qui à un objet Y de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(Y, X)$.

Définition 3.2. — Soit F un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$. On dit que F est *représentable* s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F et $\widehat{X}$ soient isomorphes. On dit alors que F est *représenté* par X.

Tout morphisme $\beta : X \to X'$ induit un morphisme $\widehat{X} \to \widehat{X'}$, que l'on note β_*.

Le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$, qui à un objet X de $\mathcal{C}$ associe $\widehat{X}$ est pleinement fidèle, et par conséquent, si $\omega : \widehat{X} \to \widehat{X'}$ est un isomorphisme, il existe un unique isomorphisme $\beta : X \to X'$ tel que $\beta_* = \omega$. De plus, ce foncteur fournit une équivalence de catégories entre $\mathcal{C}$ et la sous-catégorie de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}ns)$ constituée des foncteurs représentables.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie *fibrée* au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}ch$ des schémas, on obtient un foncteur $\phi_{\mathcal{C}} : \mathcal{S}ch \to \mathcal{E}ns$ en associant à un objet S de $\mathcal{S}ch$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de S. Pour une définition précise d'une catégorie fibrée, voir les articles [**14**] et [**18**] dans le présent volume, ou [**26**].

Définition 3.3. — Tout schéma représentant le foncteur $\phi_{\mathcal{C}}$ est appelé un *espace des modules fin pour la catégorie* $\mathcal{C}$.

Remarque 3.4. — Un tel schéma est unique, à isomorphisme unique près.

Définition 3.5. — $\phi_{\mathcal{C}}$ est dit *faiblement représentable* s'il existe un schéma H et un morphisme de foncteurs $\alpha : \phi_{\mathcal{C}} \to \widehat{H}$ tels que :

– Pour tout objet H' de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme $\alpha' : \phi_{\mathcal{C}} \to \widehat{H'}$, il existe un unique morphisme $\theta : H \to H'$ tel que $\alpha' = \theta_* \circ \alpha$,

– Si k est algébriquement clos, $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, alors α_S est une bijection (entre $\phi_{\mathcal{C}}\,(S)$ et $\mathrm{Hom}\,(S, H)$)

La deuxième condition peut se formuler ainsi : il y a bijection entre les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$ définis sur k et les points k-rationnels de H.

On dit que H est un *espace des modules grossier* pour la catégorie fibrée $\mathcal{C}$.

3.2. Espaces de Hurwitz. — Les espaces de Hurwitz sont des espaces de modules grossiers pour les revêtements de $\mathbb{P}^1$: ainsi les points géométriques d'un espace de Hurwitz sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de revêtements de $\mathbb{P}^1$ de la catégorie considérée définis sur un corps algébriquement clos.

Historiquement, l'article fondateur de cette théorie est celui de A. Hurwitz, [**25**]. Dans cet article, Hurwitz construit une variété complexe dont chaque point représente un revêtement *simple* de degré d *(i.e.* chaque fibre possède au moins $d-1$ éléments).

Fulton, afin de montrer l'irréductibilité des espaces de modules de courbes de genre g, a montré dans [**21**] qu'il existe un espace paramétrant les revêtements simples sur $\mathbb{Z}$.

Fried a généralisé la notion (dans [**19**]) sur un corps de caractéristique nulle afin de traiter le problème de Galois inverse, problème qui consiste à réaliser tout groupe fini comme groupe de Galois sur un corps donné.

S. Wewers a généralisé la construction de Fulton pour prouver que les espaces de M. Fried peuvent se définir sur $\mathbb{Z}$ (il construit dans [**32**] des schémas lisses sur $\mathbb{Z}$ dont la fibre générique sur $\mathbb{Q}$ donne les espaces construits par Fried).

Pour les besoins de ce qui suit, nous devons introduire la notion de revêtement de la droite projective sur un schéma quelconque S (et non plus seulement sur un corps), modérément ramifié le long d'un diviseur de Cartier relatif lisse D. Pour une définition précise, on pourra se référer à celle donnée dans [**23**] 2.2.2. On retiendra que pour un tel revêtement $X \to \mathbb{P}^1_S$, X est une courbe projective lisse relative au-dessus de S dont les fibres sont géométriquement irréductibles.

Si on fixe le degré du diviseur D, $\deg(D) = r$, la catégorie des droites projectives $\mathbb{P}^1_S$ munies de D comme ci-dessus admet un espace des modules grossier, *l'espace de configuration de r points U_r* :

Définition 3.6. — On définit d'abord *l'espace de configuration de r points ordonnés* $U^r := (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}})^r - \Delta_r$, où Δ_r est la diagonale grasse (on rappelle que la diagonale grasse Δ_r est l'ensemble des r-uplets de $\mathbb{P}^1$ où deux coordonnées au moins coïncident). On pose alors $U_r := U^r/S_r$, quotient de U^r par l'action du groupe symétrique à r éléments.

Considérons la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$ (resp. $\mathcal{H}^G_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$) des revêtements (resp. G-revêtements) de $\mathbb{P}^1$ de degré d, modérément ramifiés le long d'un diviseur de Cartier relatif lisse de degré r, de monodromie $G \to S_d$ et d'inertie $\boldsymbol{C}$.

Il existe un plus petit corps de nombres L pour lequel $\boldsymbol{C}$ est invariant (à l'ordre des classes de conjugaison près) par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$. Soit $\mathcal{O}_L$ l'anneau des entiers de L.

S. Wewers a prouvé dans [**32**] le résultat suivant :

Théorème 3.7. — *Il existe un espace des modules grossier $H_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$ (resp. $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$) pour la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$ (resp. $\mathcal{H}^G_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$) ; cet espace est défini sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L)$*.*

De plus, on a un revêtement fini étale naturel $\pi : H^{\mathrm{ab}} \to U_r$ (resp. $\pi : H^{\mathrm{in}} \to U_r$) sur $\mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_L[\frac{1}{|G|}]\right)$*, qui à une classe d'équivalence de revêtements associe leur ensemble de points de branchements.*

Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note H^{ab} pour $H_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$, et H^{in} pour $H_G^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{C})$. On notera aussi $\mathcal{H}$ pour désigner $\mathcal{H}_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$ ou $\mathcal{H}^G_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$.

Définition 3.8. — H^{ab} (resp. H^{in}) est appelé *espace de Hurwitz pour les revêtements (resp. G-revêtements) de $\mathbb{P}^1$ de degré d, à r de points de branchement, de monodromie $G \hookrightarrow S_d$ et d'inertie $\boldsymbol{C}$.*

Il existe aussi des espaces de Hurwitz pour les (G-)revêtements à points de ramification ordonnés. On considère dans cet article la situation des points de ramification non ordonnés, car c'est la plus naturelle.

Dans la suite, par souci de légèreté, on ne traitera que le cas des revêtements (en utilisant H^{ab}, donc), celui des G-revêtements (avec H^{in}) étant similaire.

3.3. Le revêtement $H^{\mathrm{ab}} \to U_r$. — L'objet de ce paragraphe est de décrire le revêtement induit du revêtement $H^{\mathrm{ab}} \to U_r$ sur les fibres génériques géométriques, en termes d'action du groupe fondamental de U_r sur une fibre non ramifiée.

Soit $\boldsymbol{x} := \{1, \ldots, r\} \in U_r$. Le groupe fondamental $B_r := \pi_1(U_r, \boldsymbol{x})$ admet la présentation suivante, avec pour générateurs $\delta_1, \ldots, \delta_{r-1}$ et relations ([**2**]) :
- $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ pour $i, j \in \{1, \ldots, r-1\}$ et $|i-j| > 1$;
- $\delta_i\delta_{i+1}\delta_i = \delta_{i+1}\delta_i\delta_{i+1}$ pour $i \in \{1, \ldots, r-2\}$;
- $\delta_1 \ldots \delta_{r-1}\delta_{r-1} \ldots \delta_1 = 1$.

On appelle ce groupe le *groupe des tresses de Hurwitz.*

On pose :

$$\mathrm{Ni}_G(\boldsymbol{C}) := \{(g_1, \ldots, g_r) \in G^r \mid g_1 \ldots g_r = 1, \langle g_1, \ldots, g_r\rangle = G,\ g_i \in C_i\}$$

($g_i \in C_i$ à l'ordre près) et

$$\mathrm{Ni}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C}) := \mathrm{Ni}_G(\boldsymbol{C}) / \mathrm{Nor}_{S_d}(G)$$

où d'une part on considère G comme sous-groupe de S_d (grâce à l'action de la monodromie sur une fibre non ramifiée identifiée à $\{1, \ldots, d\}$), et d'autre part le normalisateur $\mathrm{Nor}_{S_d}(G)$ de G dans S_d agit composante par composante sur $\mathrm{Ni}_G(\boldsymbol{C})$.

Définition 3.9. — On appelle les éléments de $\mathrm{Ni}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$ les *classes de Nielsen pour les revêtements* de degré d, de monodromie G, d'inertie $\boldsymbol{C}$.

Cet ensemble $\mathrm{Ni}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$ des classes de Nielsen est en bijection avec la fibre générique au-dessus de $\boldsymbol{x}$ dans le revêtement $H^{\mathrm{ab}} \to U_r$, et l'action du groupe des tresses B_r sur cette fibre se traduit de la façon suivante :

Proposition 3.10. — *Le revêtement étale $H_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C}) \to U_r$ induit un revêtement étale des fibres génériques géométriques. Ce dernier revêtement correspond à l'action du groupe des tresses de Hurwitz B_r sur l'ensemble $\mathrm{Ni}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$ donnée par :*

$$(g_1, \ldots, g_r) \cdot \delta_i = (g_1, \ldots, g_i g_{i+1} {g_i}^{-1}, g_i, \ldots, g_r)$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ et tout $(g_1, \ldots, g_r) \in \mathrm{Ni}_G^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{C})$.

Cette description du revêtement induit sur les fibres génériques géométriques $\left(H^{\mathrm{ab}}\right)_\eta \to (U_r)_\eta$ en termes de l'action du groupe des tresses sur l'ensemble des classes de Nielsen correspondantes admet des analogues dans le cas des G-revêtements, et des points de ramification ordonnés (il faut noter que dans ce dernier cas intervient le groupe des tresses *pures* de Hurwitz, qui admet une présentation plus compliquée que le groupe des tresses de Hurwitz).

3.4. Corps des modules et espaces de Hurwitz. — On suppose que le revêtement $H^{\mathrm{ab}} \to U_r$ est défini sur un corps K ; le groupe de Galois absolu G_K agit alors sur toute fibre géométrique au-dessus d'un point de $U_r(K)$. Comme un point de l'espace de Hurwitz est une classe d'isomorphisme de (G-)revêtements, et que l'on connaît l'action de G_K sur ces derniers, il est naturel de chercher un lien entre les deux actions.

Soit $f : X \to \mathbb{P}^1$ un revêtement sur $\overline{K}$. Soit $\sigma \in G_K$ un élément du groupe de Galois absolu. L'automorphisme σ agit sur f, pour donner un revêtement f^σ. Par ailleurs, σ agit sur la fibre du revêtement $H^{\mathrm{ab}} \to U_r$ contenant $[f]$; on note $[f]^\sigma$ le point $\sigma \cdot [f]$ de la fibre.

Proposition 3.11. — $[f]^\sigma = [f^\sigma]$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition d'un espace des modules grossier. L'élément σ de $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ induit un automorphisme de $\mathrm{Spec}\,(L)$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(K)$, noté σ^*.

Au revêtement f est associé un élément de l'ensemble $\phi_{\mathcal{H}}\,(\mathrm{Spec}\,(L))$, à savoir la classe d'isomorphisme de f au-dessus de $\mathrm{Spec}\,(L)$, que l'on note $(C \to \mathrm{Spec}\,(L))$.

L'automorphisme σ^* induit par le foncteur $\phi_{\mathcal{H}}$ une application $\phi_{\mathcal{H}}\,(\sigma^*)$ de l'ensemble $\phi_{\mathcal{H}}\,(\mathrm{Spec}\,(L))$ dans lui-même ; en particulier, $\phi_{\mathcal{H}}\,(\sigma^*)$ envoie $(C \to \mathrm{Spec}\,(L))$ sur une nouvelle classe d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{H}_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}\,(L)$, que l'on note $({}^{\sigma}C \to \operatorname{Spec}(L))$. Par définition de f^{σ}, la classe de f^{σ} est donnée par $({}^{\sigma}C \to \operatorname{Spec}(L))$, et, par conséquent, le point correspondant dans l'espace de Hurwitz (par l'application $\alpha_{\operatorname{Spec}(L)}$) est $[f^{\sigma}]$.

Par ailleurs, l'application $\alpha_{\operatorname{Spec}(L)}$ envoie $(C \to \operatorname{Spec}(L))$ sur un point L-rationnel h de l'espace de Hurwitz H. L'automorphisme σ^* induit par le foncteur $\widehat{H}$ une application $\widehat{H}(\sigma^*)$ de l'ensemble $\widehat{H}(\operatorname{Spec}(L))$ des points L-rationnels de H dans lui-même. L'image de h par cette application est un point $h^{\sigma} : \operatorname{Spec}(L) \to H$, qui est en fait $[f]^{\sigma}$.

Par définition d'un espace des modules grossier, α est un morphisme de foncteurs ; le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\phi_{\mathcal{H}}(\operatorname{Spec}(L)) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{H}}(\sigma^*)"] \arrow[d, dashed, "\alpha_{\operatorname{Spec}(L)}"'] & \phi_{\mathcal{H}}(\operatorname{Spec}(L)) \arrow[d, dashed, "\alpha_{\operatorname{Spec}(L)}"] \\
\widehat{H}(\operatorname{Spec}(L)) \arrow[r, "\widehat{H}(\sigma^*)"'] & \widehat{H}(\operatorname{Spec}(L))
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que $[f]^{\sigma} = [f^{\sigma}]$. $\square$

De cette proposition découle le lien entre espace de Hurwitz et corps des modules.

En effet, soit $f : X \to \mathbb{P}^1$ un revêtement de degré d, avec r points de branchement, de monodromie $G \to S_d$, et d'inertie $\boldsymbol{C}$. Il lui est associé un point h dans l'espace de Hurwitz pour la catégorie $\mathcal{H}_{d,r,G,\boldsymbol{C}}$.

Corollaire 3.12. — *Le corps des modules de f est le corps de rationalité de h dans H^{ab}.*

4. Ramification dans le corps des modules

Soit $f : X \to \mathbb{P}^1$ un (G-)revêtement de la droite projective de points de branchement $a_1, \ldots, a_r$. On suppose que f est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit K le corps de rationalité du diviseur de branchement $(a_1) + \cdots + (a_r)$; on a $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. Soit M le corps des modules de f relativement à $\overline{\mathbb{Q}}/K$.

Définition 4.1. — Une *bonne place* est une place v de K vérifiant les deux conditions :

– $v \nmid |G|$ (où G est le groupe de monodromie du (G-)revêtement),

– le diviseur $(a_1) + \cdots + (a_r)$ s'étend en un diviseur lisse sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v)$ (où $\mathcal{O}_v$ est l'anneau de valuation discrète du complété en v de K).

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque v divise $|G|$ ou que les points branchements coalescent modulo v, v est appelée *mauvaise place*.

Remarque 4.2. — Il n'y a qu'un nombre fini de mauvaises places.

Montrons le résultat de Beckmann :

Théorème 4.3. — *Le corps des modules M ne peut être ramifié qu'en de mauvaises places.*

Démonstration. — La preuve que nous donnons est inspirée de [**3**]. Au (G-)revêtement f sont associés les invariants classiques : degré, lieu de branchement, groupe de monodromie, et invariant d'inertie. On note H l'espace de Hurwitz pour ces invariants.

Notons S_K l'ensemble (fini) des mauvaises places de K. On note $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_M$) l'anneau des entiers de K (resp. M) sur $\mathbb{Z}$. Le localisé de cet anneau se note $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$.

L'ensemble des points de branchement définit un K-point a de U_r ; il s'étend en une section $\underline{a}$ de U_r définie sur $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$. Le point h de H associé à f est rationnel sur M (conséquence du corollaire 3.12) :

$$\mathrm{Spec}\,(M) \xrightarrow{h} H$$

Soit v une bonne place de K, et w une place de M au-dessus de v. On note $\mathcal{O}_{K_v}$ (resp. $\mathcal{O}_{M_w}$) le localisé et complété de $\mathcal{O}_K[S_K^{-1}]$ (resp. $\mathcal{O}_M$) en v (resp. en w). Les corps des fractions sont notés respectivement K_v et M_w. On note $\underline{a}_v$ la restriction de $\underline{a}$ modulo v, et h_w le point M_w-rationnel de H déduit de h.

Le revêtement $H \to U_r$ étant étale, le morphisme

$$\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v})$$

induit par le morphisme $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) \to U_r$ provenant de $\underline{a}$ est aussi étale. Il est fini, car propre. L'anneau $\mathcal{O}_{K_v}$ est hensélien : $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H$ est donc isomorphe à un schéma $\mathrm{Spec}\,(A)$, où $A = \prod_{i\in I} A_i$ est un produit (fini) de $\mathcal{O}_{K_v}$ -algèbres finies A_i.

Comme le morphisme $H \to U_r$ est propre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,(M_w) & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) & \longrightarrow & U_r \end{array}$$

produit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{M_w}) & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) & \longrightarrow & U_r \end{array}$$

Ce dernier diagramme induit un morphisme

$$\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{M_w}) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H \simeq \mathrm{Spec}(A)$$

de variétés affines au-dessus de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{K_v})$. Il lui correspond un morphisme de $\mathcal{O}_{K_v}$ -algèbres finies

$$\prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \mathcal{O}_{M_w}.$$

Ce morphisme est nécessairement nul sur toutes les composantes A_i sauf une, que l'on note A_{i_0}. Le morphisme restreint à A_{i_0} réalise un morphisme injectif $\varphi_0 : A_{i_0} \to \mathcal{O}_{M_w}$. Comme le corps des fractions de A_{i_0} est le corps résiduel de h_w , à savoir M_w, φ_0 est un isomorphisme.

Le morphisme $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H$ est donc une immersion ouverte ; la composition

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{U_r} H \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$$

est donc étale. On en conclut qu'il n'y a pas de ramification en la bonne place v dans l'extension M/K. □

Remarque 4.4. — Il convient de remarquer que cette preuve du théorème de Beckmann, si elle diffère dans son approche de la preuve originale, utilise des résultats puissants concernant les espaces de Hurwitz, lesquels sont eux-mêmes prouvés par des méthodes proches, dans l'esprit, de celle de S. Beckmann. Il faut donc voir cette preuve comme une illustration de la richesse arithmétique des espaces de Hurwitz.

5. Bons modèles et gerbe des modèles

On se place dans le contexte du paragraphe précédent. Après avoir introduit les *gerbes de Hurwitz* et les *gerbe et variété des modèles* associées à un (G-)revêtement donné, on montre l'existence d'un *bon modèle* sur K_v^{nr} (extension maximale non ramifiée de K_v). On montre ensuite que tout bon modèle sur K_v^{nr} est *stable*. On applique enfin ces résultats pour prouver, sous certaines hypothèses, l'existence d'un *bon modèle* sur M_w.

Pour les définitions rigoureuses des notions de champs (algébriques) et de gerbes, on renvoie aux articles [**14**] et [**18**] dans le présent volume, ainsi qu'au livre [**26**].

5.1. Champs et Gerbes de Hurwitz. — Nous avons défini les espaces de Hurwitz comme des espaces de modules grossiers pour des catégories fibrées au-dessus de la catégorie des schémas. La lettre $\mathcal{H}$ désignera ici l'une quelconque de ces catégories. On se donne un schéma de base S dont les degrés résiduels ne divisent pas l'ordre du groupe G. La catégorie $\mathcal{H}$ peut être vue comme un S-*champ*, c'est-à-dire une S-catégorie fibrée en groupoïdes dans laquelle les morphismes se recollent et où toute donnée de descente est effective.

Le champ $\mathcal{H}$ vérifie deux conditions supplémentaires qui en font un champ *algébrique*. Une de ces conditions est que $\mathcal{H}$ admet une *présentation*, c'est-à-dire qu'il existe un S-schéma Z et un 1-morphisme de S-champs $Z \to \mathcal{H}$ surjectif et lisse (*cf.* [**14**] dans ce volume). L'intérêt d'une telle présentation est qu'elle permet de ramener l'étude de certains problèmes sur le champ $\mathcal{H}$ à des problèmes sur le schéma Z.

Si on restreint le champ $\mathcal{H}$ à une composante géométriquement irréductible H de l'espace des modules grossier, le S-champ $\mathcal{H}$ vérifie les deux conditions suivantes, qui en font une S-*gerbe* au-dessus de H : deux objets d'une même fibre sont localement isomorphes, et toute fibre est localement non vide (pour la topologie étale) (*cf.* [**11**]). L'intérêt de cette gerbe est qu'elle mesure l'obstruction à l'existence d'une famille de Hurwitz $\mathcal{F}$ d'espace de paramètre H, *i.e.* un morphisme fini et plat $\mathcal{F} \to H \times_{U_r} \mathbf{P}^1$, où $\mathcal{F}$ est une variété quasi-projective, et pour chaque point $h = [f]$ de H, la fibre $\mathcal{F}_h \to \mathbf{P}^1$ est un représentant de la classe d'isomorphisme $[f]$.

5.2. Gerbe des modèles et variété des modèles du (G-)revêtement f

La variété des modèles d'un (G-)revêtement a été définie dans [**12**].

L'application à cette variété des modèles de théorèmes profonds d'approximation p-adique permet par exemple d'obtenir le théorème suivant (*cf.* [**12**]) :

Théorème 5.1. — *Soit $f : Y \to \mathbb{P}^1$ un (G-)revêtement défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de corps des modules $\mathbb{Q}$, et p un bon premier. Alors le (G-)revêtement a un modèle sur $\mathbb{Q}^{tp}$ (l'extension algébrique maximale de $\mathbb{Q}$ décomposant p).*

Nous nous contenterons ici de retrouver de façon élémentaire (lemme de Hensel), par l'utilisation de la variété des modèles, des résultats démontrés par ailleurs (théorèmes 5.4, 5.6).

Au (G-)revêtement $f : X \to \mathbb{P}^1$ correspond un point h sur une composante irréductible H de l'espace de Hurwitz adéquat, dont le corps de rationalité n'est autre que le corps des modules M. Au-dessus de cet espace H se trouve la gerbe de Hurwitz $\mathcal{H}$ associée. En effectuant le produit fibré de $h : \mathrm{Spec}(M) \to H$ et $\mathcal{H} \to H$ au-dessus de H, on obtient une nouvelle gerbe $\mathcal{G}_h$, dont l'espace des modules grossier est $\mathrm{Spec}(M)$. Cette gerbe $\mathcal{G}_h$ est la *gerbe des modèles du (G-)revêtement f*. Les objets $\mathrm{Spec}(L) \to \mathcal{G}_h$ de la gerbe $\mathcal{G}_h$ définis sur une extension L de M sont les modèles de f sur L.

La gerbe $\mathcal{G}_h$ s'étend en une gerbe sur $\mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_M[S^{-1}]\right)$ (où S désigne l'ensemble des mauvaises places de f), que nous noterons $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, et que nous appellerons encore *gerbe des modèles*. Nous avons vu en effet que pour toute bonne place w de M, le morphisme $h : \mathrm{Spec}\,(M) \to H$ s'étend en un morphisme $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{M_w}) \to H$ (preuve du théorème 4.3). On obtient donc un morphisme

$$\mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_M[S^{-1}]\right) \longrightarrow H$$

La gerbe $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$ est le pullback de la gerbe $\mathcal{H} \to H$ par ce morphisme ; sa fibre générique est bien la gerbe $\mathcal{G}_h$ considérée précédemment (au-dessus de $\mathrm{Spec}\,(M)$).

Comme la gerbe de Hurwitz, la gerbe des modèles du (G-)revêtement f mesure une obstruction : plus précisément, cette gerbe est *neutre* (*i.e.* admet une section) si et seulement si f possède un M-modèle.

La gerbe $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, pullback du champ algébrique $\mathcal{H}$, est aussi un champ algébrique. On peut choisir une présentation par un schéma $Z_{\widetilde{h}} \to \mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, telle que $Z_{\widetilde{h}}$ soit muni d'une action de GL_N au-dessus de $\mathcal{O}_M[S^{-1}]$ et telle que $Z_{\widetilde{h}}$ soit isomorphe à $[Z_{\widetilde{h}}/\mathrm{GL}_N]$ (*cf.* la preuve de « (ii) implique (iii) » du théorème 6.1 p. 48 de [**26**], ou [**12**]).

Cette présentation peut en outre être choisie de façon à vérifier les propriétés suivantes (*cf.* [**12**], [**18**]) :

– Le schéma $Z_{\widetilde{h}}$ est une variété lisse sur $\mathcal{O}_M[S^{-1}]$, de fibre générique géométriquement irréductible sur $M = k(h)$.

– Le schéma $Z_{\widetilde{h}}$ est un objet de $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$, autrement dit il y a une famille de modèles $\chi_{\widetilde{h}} \to Z_{\widetilde{h}}$ sur $Z_{\widetilde{h}}$.

– Tout point de la gerbe des modèles $\mathcal{G}_{\widetilde{h}}$ défini sur un corps se relève en un point de sa présentation $Z_{\widetilde{h}}$.

– Pour l'action de GL_N sur $Z_{\widetilde{h}}$, et pour tout schéma T : deux points z_1 et z_2, T-rationnels de $Z_{\widetilde{h}}$, sont dans une même orbite sous $\mathrm{GL}_{N,T}$ si et seulement si les fibres $z_1^*(\chi_{\widetilde{h}})$ et $z_2^*(\chi_{\widetilde{h}})$ sont isomorphes.

– Pour tout schéma T, et tous points z_1 et $z_2 : T \to Z_{\widetilde{h}}$, le schéma

$$G_{z_1,z_2} := \{g \in \mathrm{GL}_N \mid g \cdot z_1 = z_2\}$$

est fini étale sur T.

La variété $Z_{\widetilde{h}}$ est appelée *variété des modèles* du revêtement f.

Remarque 5.2. — La troisième propriété utilise le résultat suivant (lemme 4.10 p. 124 de [**27**]) :

Lemme 5.3. — *Tout torseur sous* GL_N *sur un corps est trivial.*

En effet, un modèle de f sur une extension L de M correspond à une section $s : \mathrm{Spec}\,(L) \to \mathcal{G}_{\widetilde{h}}$; le pullback $Z_{\widetilde{h}} \times_{\mathcal{G}_{\widetilde{h}}} \mathrm{Spec}\,(L)$ est un torseur sous GL_N sur $\mathrm{Spec}\,(L)$, et est donc trivial. Il existe donc une section

$$\mathrm{Spec}\,(L) \to Z_{\widetilde{h}} \times_{\mathcal{G}_{\widetilde{h}}} \mathrm{Spec}\,(L)$$

qui, composée avec la flèche naturelle $Z_{\widetilde{h}} \times_{\mathcal{G}_{\widetilde{h}}} \mathrm{Spec}\,(L) \to Z_{\widetilde{h}}$, donne un relèvement $\mathrm{Spec}\,(L) \to Z_{\widetilde{h}}$ de s.

5.3. Existence d'un bon modèle sur K_v^{nr}. — Soit $f : X \to \mathbb{P}^1$ un (G-)revêtement défini sur $\overline{K}$, de diviseur de ramification défini sur K, de corps des modules M sur K. Soit v une bonne place de K (*cf.* le paragraphe 4), w une place de M au-dessus de v. Notons K_v^{nr} l'extension maximale non ramifiée du localisé et complété de K en v (qui est égale à M_w^{nr} d'après le théorème de Beckmann). On prouve dans ce paragraphe que f admet un *bon modèle* f_v sur K_v^{nr}, *i.e.* que la réduction modulo v du revêtement déduit de f_v sur l'anneau est lisse et géométriquement irréductible (on dit aussi que le revêtement sur l'anneau a *bonne réduction*). Pour prouver cela, on se place dans la gerbe et la variété des modèles.

Théorème 5.4. — *Le (G-)revêtement f admet un bon modèle f_v sur K_v^{nr}, unique à isomorphisme près défini sur K_v^{nr}.*

Démonstration. — Le (G-)revêtement f fournit un point de $Z_{\widetilde{h}}$:

$$z : \mathrm{Spec}(\overline{K}_v) \longrightarrow Z_{\widetilde{h}}$$

Ce point se spécialise en un point de la fibre spéciale $\overline{z} : \mathrm{Spec}(\overline{k_v}) \to Z_{\widetilde{h}}$, où k_v est le corps résiduel de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_v}$ de K_v.

Notons $\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathcal{O}_{K_v}$. Le lemme de Hensel (*cf.* l'annexe), assure l'existence d'un point $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}) \to Z_{\widetilde{h}}$ de la variété des modèles tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{\widetilde{h}} \\
\mathrm{Spec}(\overline{k_v}) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Un tel diagramme exprime l'existence d'un modèle de f sur l'anneau $\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}$ (ayant bonne réduction) et donc d'un bon modèle sur K_v^{nr}.

Prouvons maintenant l'unicité à isomorphisme près défini sur K_v^{nr} : on se donne z_1 et z_2 deux bons modèles sur $\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}$; les deux modèles $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ obtenus sur $\overline{k_v}$ sont isomorphes. Il existe donc un élément $\overline{g}$ de $\mathrm{GL}_N(\overline{k_v})$ tel que $\overline{z_2} = \overline{g} \cdot \overline{z_1}$.

On a vu que $G_{z_1,z_2} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}})$ est lisse ; le lemme de Hensel permet donc d'étendre $\overline{g}$ en un élément g de $G_{z_1,z_2}(\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}})$. Les deux (bons) modèles z_1 et z_2 sont donc isomorphes sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}})$. □

Remarque 5.5. — Le théorème 4.3 est conséquence de ce théorème.

5.4. Stabilité d'un bon modèle sur K_v^{nr}. — On est passé dans le paragraphe précédent d'un modèle de f sur $\overline{K_v}$ (f lui-même) à un (bon) modèle f_v de f sur K_v^{nr}. Rien ne dit que le corps des modules de f relativement à $\overline{K_v}/K_v$ et le corps des modules de f_v relativement à K_v^{nr}/K_v soient égaux (on sait *a priori* que le second contient le premier). C'est cependant le cas ici ; on dit que le modèle trouvé sur K_v^{nr} est *stable*.

Théorème 5.6. — *Tout bon modèle f_v de f sur K_v^{nr} est stable.*

Démonstration. — Le corps des modules de f_v relativement à K_v^{nr}/K_v est aussi le corps des modules M'_w de f_v relativement à M_w^{nr}/M_w. C'est le sous-corps de M_w^{nr} fixé par

$$G(f_v) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(M_w^{\mathrm{nr}}/M_w) \mid f_v \simeq f_v^\sigma \text{ sur } M_w^{\mathrm{nr}}\}$$

On cherche à prouver que $M'_w = M_w$, *i.e.* que $G(f_v) = \mathrm{Gal}(M_w^{\mathrm{nr}}/M_w)$.

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(M_w^{\mathrm{nr}}/M_w)$; l'action de σ sur f_v fournit un nouveau bon modèle de f, noté f_v^σ. À ces deux modèles correspondent deux points z et z^σ de Z_h définis sur M_w^{nr}.

Les deux modèles f_v et f_v^σ sont isomorphes sur $\overline{M_w}$, ce qui se traduit dans la variété des modèles par l'existence d'un élément $\widetilde{g}$ de $G_{z,z^\sigma}(\overline{M_w})$.

Or $G_{z,z^\sigma} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}})$ est fini étale : à l'élément $\widetilde{g}$ de $G_{z,z^\sigma}(\overline{M_w})$ correspond donc par spécialisation un élément $\overline{g}$ de $G_{z,z^\sigma}(\overline{k_v})$, que le lemme de Hensel permet de relever en un élément de $G_{z,z^\sigma}(M_w^{\mathrm{nr}})$, ce qui prouve que $\sigma \in G(f_v)$. □

5.5. Cas d'existence d'un bon modèle sur M_w. — On suppose dans cette partie que *le (G-)revêtement est défini sur* $\overline{\mathbb{Q}}$, le diviseur de branchement étant défini sur un corps de nombres K. Soit v une bonne place de K et w une place (au-dessus de v) du corps des modules M de f relativement à $\overline{\mathbb{Q}}/K$. Avec les notations précédentes, le groupe $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)$ est de dimension cohomologique $\leqslant 1$, et les résultats cités précédemment concernant l'obstruction sur le corps des modules permettent d'affirmer que f admet un modèle sur le complété M_w en w de M.

On a en fait un résultat plus précis :

Théorème 5.7. — *Le (G-)revêtement f défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admet un* bon *modèle sur le complété M_w du corps des modules en toute bonne place w.*

Démonstration. — On note par k_w le corps résiduel de $\mathcal{O}_{M_w}$.

Le théorème 5.4 donne l'existence d'un bon modèle de f sur $\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}} = \mathcal{O}_{K_v}^{\mathrm{nr}}$, représenté par un point z de $Z_{\widetilde{h}}(\mathcal{O}_{M_w})$, et donc l'existence d'un modèle sur $\overline{k_w}$, représenté par $\overline{z}$.

Soit $\overline{f}$ la réduction de f sur la fibre spéciale. La question de la descente de $\overline{k}_w$ à k_w est gouvernée par le groupe de cohomologie non abélienne $H^2\big(k_w, \mathrm{Aut}\,(\overline{f})\big)$. Le fait que le groupe $\mathrm{Gal}\,\big(\overline{k_w}|k_w\big)$ soit de dimension cohomologique $\leqslant 1$ entraîne que la gerbe des modèles de $\overline{f}$ est neutre (*cf.* Corollaire 1.3 p. 119 de [**11**]). On dispose donc de données de descente de $\overline{k_w}$ à k_w, c'est-à-dire, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k_w}/k_w)$, d'un morphisme $\phi_\sigma : \overline{z} \to \overline{z}^\sigma$, et de relations entre ces morphismes exprimant la descente.

Le morphisme $\phi_\sigma \in G_{\overline{z},\overline{z}^\sigma}(\overline{k_w})$ s'étend de façon unique en un morphisme $f_\sigma \in G_{z,z^\sigma}(\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}})$, car le morphisme $G_{z,z^\sigma} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}})$ est fini étale (*cf.* 5.2).

Ces morphismes f_σ sont des données de descente de $\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}}$ à $\mathcal{O}_{M_w}$ (ils vérifient les mêmes relations que les ϕ_σ), d'où l'existence d'un *bon* modèle sur M_w. □

Remarque 5.8. — Le fait que le morphisme

$$G_{z,z_\sigma} \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_{M_w}^{\mathrm{nr}}\right)$$

soit fini étale recouvre l'équivalence de catégories entre revêtements modérés de $\mathbb{P}^1_{k_w}$ et revêtements modérés de $\mathbb{P}^1_{M_w^{\mathrm{nr}}}$ (*cf.* [**23**]).

Appendice
Lemme de Hensel

On donne ici une version du lemme de Hensel adaptée à nos besoins (preuve du théorème 5.4 en particulier). On peut trouver une version de ce lemme dans le cas où Y est étale sur R dans [**16**], théorème 18.5.11 b).

Lemme de Hensel. — *Soit R un anneau local hensélien, de corps résiduel k, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. On se donne un schéma lisse Y sur R. On suppose qu'il existe un point x défini sur k sur la réduction Y_k :*

$$x : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow Y_k$$

Alors il existe un point y de Y défini sur R de réduction x :

$$\begin{array}{ccc} y : \mathrm{Spec}(R) & \longrightarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ x : \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & Y_k \end{array}$$

Démonstration. — Le point x défini sur k fournit un point y de l'espace topologique Y. Le schéma Y étant lisse sur R, il existe un voisinage affine $V = \mathrm{Spec}(C)$ de y tel que

$$C = R[T_1, \ldots, T_n]/\left(P_1, \ldots, P_m\right)$$

avec $m \leqslant n$, et telle que les mineurs $m \times m$ de la matrice jacobienne $(\partial P_i/\partial T_j)$ engendrent C (proposition 3.24 c) de [**27**]).

Par définition, le point x consiste en la donnée d'un homomorphisme

$$\phi : R[T_1, \ldots, T_n]/\left(P_1, \ldots, P_m\right) \otimes_R k \longrightarrow k$$

ce qui correspond à la donnée d'un n uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de k vérifiant

$$\overline{P_1}\,(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = \overline{P_m}\,(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

où $\overline{P_i}$ désigne la réduction de P_i modulo $\mathfrak{M}$.

La matrice jacobienne $\left(\partial\overline{P_i}/\partial T_j\right)(x)$ est de rang m. On peut donc appliquer le lemme de Hensel tel qu'énoncé dans [**22**] (lemme 5.21) (qui est une légère généralisation du théorème 4.2 d') de [**27**]), pour obtenir un élément de R^n, de réduction x, tel que $P_1(y) = \cdots = P_m(y) = 0$. Le point y est un point de V (et donc de Y), défini sur R, et de réduction x. □

Références

[1] S. Beckmann ; Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves. *J. of Algebra.*, **125** :236-255, 1989.

[2] J. Birman ; Braids, links, and mapping class groups. *Princeton Univ. Press, Annals of Math. studies*, **82**, 1974

[3] A. Chambert-Loir ; Sur le corps de définition de revêtements. *Manuscrit.*

[4] K. Coombes et D. Harbater ; Hurwitz families and arithmetic Galois groups. *Duke Math. J.*, **52** :821-839, 1985.

[5] J-M. Couveignes ; Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0. *Annales de l'Inst. Fourier*, **44(1)** :1-38, 1994.
[6] J-M. Couveignes et L. Granboulan ; Dessins from a geometric point of view. *The Grothendieck theory of Dessins d'Enfants (Leila Schneps ed., Camb. U. Press)* 79-113, 1995.
[7] P. Dèbes ; Groupes de Galois sur $K(T)$. *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 2 :229-243, 1990.
[8] P. Dèbes ; Covers of $\mathbb{P}^1$ over the p-adics. *Contemporary Math.*, **186** :217-238, 1995.
[9] P. Dèbes et J-C. Douai ; Algebraic covers : Field of moduli versus field of definition. *Annales Sci. E.N.S.*, **30** :303-338, 1997.
[10] P. Dèbes et J-C. Douai ; Gerbes and Covers. *Comm. in Algebra*, **27-2** :577-594, 1999.
[11] P. Dèbes, J-C. Douai et M. Emsalem ; Familles de Hurwitz et cohomologie non abélienne. *Ann. de l'Institut Fourier*, **50** :113-149, 2000.
[12] P. Dèbes, J-C. Douai, L. Moret-Bailly ; Descent problems over large fields (preprint).
[13] P. Dèbes, D. Harbater ; Fields of definition of p-adics covers. *J. rein. angew. Math.*, **498** :223-236, 1998.
[14] J-C. Douai ; Descente, champs et gerbes de Hurwitz. Dans ce volume.
[15] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné ; Éléments de géométrie algébrique I. *Springer-Verlag*, 1971.
[16] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné ; Elements de géométrie algébrique IV. *Publications I.H.E.S.*, 1967.
[17] M. Emsalem ; On reduction of covers of arithmetic surfaces. *Cont. Math.*, **245** :117-132, 1999.
[18] M. Emsalem ; Sur les espaces de Hurwitz. Dans ce volume.
[19] M. Fried ; Fields of definition of function fields and Hurwitz families. Groups as Galois groups. *Comm. in Alg.*, **1** :17-82, 1977.
[20] M. Fried et H. Völklein ; The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces. *Math. Ann.*, **290** :771-800, 1991.
[21] W. Fulton ; Hurwitz schemes and the irreducibility of the moduli of algebraic curves. *Math. Ann.*, **90** :542-575, 1969.
[22] M.J. Greenberg ; Lectures on forms in many variables. *W.A. Benjamin*, 1969.
[23] A. Grothendieck, J.P. Murre ; The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme. *LN* **208**, 1971.
[24] R. Hartshorne ; Algebraic geometry. *Springer-Verlag* **52**, 1977.
[25] A. Hurwitz ; Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, **39** :1-61, 1891.
[26] G. Laumon, L. Moret-Bailly ; Champs algébriques. *Springer-Verlag*, 2000.
[27] J.S. Milne ; Etale cohomology. *Princeton University Press*, 1980.
[28] J.P. Murre ; Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group. *Tata institute of fundamental research, Bombay.* 1967.
[29] J-P. Serre ; Corps locaux. *Hermann*, 1962.
[30] M. Raynaud ; Anneaux Locaux Henséliens. *LN* **169**, 1970.
[31] A. Grothendieck ; Séminaire de géométrie algébrique, vol. I. *Springer-Verlag* **224**, 1971.
[32] S. Wewers ; Construction of Hurwitz spaces. Thèse, Université d'Essen, 1998.

S. Flon, Université des sciences et technologies de Lille, UFR de mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq • *E-mail :* `flon@agat.univ-lille1.fr`