

Bondad de ajuste empleando la función generadora de momentos

Goodness-of-Fit Employing the Moment Generating Function

LUIS ALFONSO MUÑOZ^{1,a}, JORGE HUMBERTO MAYORGA^{2,b}

¹CIENCIAS NATURALES, INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO SAN JUAN BAUTISTA, NARIÑO, COLOMBIA

²DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

Resumen

Proponemos una estadística para evaluar la bondad de ajuste, donde se emplearon las funciones generatrices de momentos muestral y poblacional; a partir de la información considerada se encontró que la estadística G_n tuvo un comportamiento diferente de acuerdo con el modelo usado para el ajuste. Su desempeño fue superior o igual a la estadística de Pearson, pero fue superada por la estadística de K-S; además, para la estadística evaluada no fue influyente el tamaño de la muestra.

Palabras clave: bondad de ajuste, función generadora de momentos, simulación.

Abstract

We propose a statistic to evaluate the goodness-of-fit where we used the empirical moment generating function and the moment generating function, from the considered information it found that the G_n statistic was different behavior according to the used model for the fitting. Its behavior was great or similar to the Pearson statistics, but it was exceeded for the K-S statistic, also for the evaluated statistic was not influential to the sample size.

Key words: Goodness-of-fit, Moment generating function, Simulation.

^aProfesor. E-mail: lamunozbe@unal.edu.co

^bProfesor asociado. E-mail: jhmayorgaa@unal.edu.co

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es proponer una estadística para evaluar la bondad de ajuste desde la perspectiva del cotejo de las funciones generatrices de momentos (fgm) muestral y poblacional. Específicamente se orienta a comparar vía simulación el desempeño en la evaluación del ajuste de la estadística propuesta a un modelo probabilístico de tipo continuo, frente a la evaluación del ajuste con las estadísticas de Pearson y Kolmogorov-Smirnov mediante el uso de un test que se desarrolló para dicho propósito.

2. Función generadora de momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X es una función con valores reales $M_X(t) = E(e^{tX})$, siempre que el valor esperado exista para todo $t \in (-h, h)$, $h > 0$; específicamente, $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} P_X(x_j)$ si X es discreta o $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$ si X es continua, siendo $P_X(x_j)$ y $f_X(x)$ la función de probabilidad y la función de densidad, respectivamente. A $M_X(t)$ se le denomina fgm porque los momentos ordinarios de X pueden obtenerse derivando esta función y evaluando la derivada en $t = 0$ (Mood et al. 1974).

3. Función generadora de momentos de la muestra

Siendo X_1, X_2, \dots, X_n , una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de una población cuya fgm es $M_X(t)$, la función $M_n(t)$ se denomina función generadora de momentos de la muestra y se define según Collander & Chalfant (1985) así: $M_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(tX_j)$. La función $M_n(t)$, como estadística, es un estimador insesgado, consistente simple y consistente en media cuadrática para $M_X(t)$.

Quand & Ramsey (1978) fueron los primeros en sugerir la función generadora de momentos de la muestra para la estimación de los parámetros de una mezcla de dos distribuciones normales; la función característica de la muestra, una función con facultades análogas a la fgm, ha sido usada por varios autores para modelar distribuciones desconocidas: Feuerverger & Mureika (1977), Heathcote (1977), Koutrouvelis (1980), Koutrouvelis & Kellermeier (1981), Csörgo (1981), Epps & Pulley (1985), Csörgo (1986) y Csörgo & Heathcote (1987). Trabajos más recientes que emplean la fgm para probar distribuciones específicas son los presentados por Cabaña & Quiroz (2005) y Meintanis (2007).

4. Estructura de la estadística propuesta

Siendo X una variable aleatoria cuya fgm $M_X(t) = E(e^{tX})$ existe, $t \in (-h, h)$ para algún $h > 0$, se define una nueva variable aleatoria $Y = e^{tX}$, entonces $E[Y] = M_X(t)$ y $V[Y] = M_X(2t) - M_X^2(t)$. Considerando una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n , de una población descrita por la variable aleatoria X , donde

$M_X(t)$ es la fgm poblacional y al ser $M_n(t)$ la fgm muestral, el teorema del límite central permite garantizar que: $T_n(t) = \frac{\sqrt{n}(M_n(t) - M_X(t))}{\sqrt{M_X(2t) - M_X^2(t)}} \xrightarrow{d} Z \approx N(0, 1)$, para un valor t fijo.

Dada una partición particular del intervalo $(-h', h')$, excluyendo a 0 como punto de subdivisión, se tiene t_1, t_2, \dots, t_r , con $t_1 = -h'$, $t_j = t_{j-1} + \delta$, $j = 1, 2, \dots, \frac{r}{2}$; $t_r = h'$, $t_{j-1} = t_j - \delta$, $j = \frac{r}{2} + 1, \dots, r$; donde δ es la amplitud de cada subintervalo, $T_n(t_j) = \frac{\sqrt{n}(M_n(t_j) - M_X(t_j))}{\sqrt{M_X(2t_j) - M_X^2(t_j)}}$ $j = 1, 2, \dots, r$.

La estadística que este trabajo propone pretende ser un instrumento para determinar la bondad de ajuste y su expresión corresponde a:

$$G_n = \sum_{j=1}^r \frac{n(M_n(t_j) - M_X(t_j))^2}{M_X(2t_j) - M_X^2(t_j)}$$

Intuitivamente G_n tenderá a presentar valores pequeños cuando $M_X(t)$ y $M_n(t)$ sean muy similares; por el contrario, tenderá a producir valores grandes cuando las dos funciones difieran ampliamente. La estadística G_n tiene una forma particular de acuerdo con el modelo probabilístico elegido para el ajuste.

4.1. Distribución de la estadística

El hecho de que $T_n(t) \xrightarrow{d} Z \approx N(0, 1)$ sugiere que $T_n^2(t) \xrightarrow{d} \chi_{(1)}^2$ y por tanto podría pensarse que la estadística G_n , por su estructura, tendría también distribución asintóticamente ji-cuadrada. Si $T_n^2(t_j)$ y $T_n^2(t_i)$ $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ fueran dos variables aleatorias estadísticamente independientes, $M_{G_n(t_j)} = \prod_{j=1}^r M_{T_n^2(t_j)}(t)$ y por tanto la distribución de G_n podría estudiarse analíticamente por medio de esta consecuencia.

Dejando de lado el examen de la independencia anteriormente señalada, para dar paso a la exploración del comportamiento de la estadística propuesta y así tener evidencias iniciales para abordar la manera de proceder, se simuló G_n para el modelo gaussiano y para el modelo uniforme.

4.2. Simulación de la estadística

La distribución de G_n bajo H_0 se simuló empleando el programa IML del paquete estadístico SAS para muestras de tamaño $n = 20, 70, 120, 170$ y 220 , con parámetros $\mu = 50, 150, 250$ y 350 ; además $\sigma^2 = 1, 256$ y 961 , en el caso normal. Cuando se emplearon muestras provenientes de la distribución uniforme $(0, 1)$, los tamaños de muestra fueron los mismos que para el caso de la distribución normal (véase Muñoz 1998, p. 10).

Particularmente con el objeto de indagar el efecto de la escogencia de la partición alrededor de cero en el desempeño de la estadística, se simularon valores de ella con base en la partición del intervalo $(-0.1, 0.1)$ con $\delta = 0.001$ y por tanto $r = 20$, la cual se denominó estadística $G_n(20)$; los valores de las estadísticas

$G_n(100)$ y $G_n(500)$ fueron simulados con $\delta = 0.0002$, $r = 100$ y $\delta = 0.00004$, $r = 500$, respectivamente.

La simulación sugirió que la distribución de G_n tendría un valor esperado cercano al número de puntos de la subdivisión del intervalo $(-h', h')$, porque persistentemente mostró promedios alrededor de r , y varianzas que oscilaron cerca de $2r^2$, lo que indujo a considerar no plausible la conjetura de un comportamiento χ^2 de la estadística (tablas 1 y 2).

4.3. Distribución aproximada de la estadística

Los valores simulados se agruparon en histogramas que mostraron siempre sesgo positivo y unimodalidad. Este hecho sugirió que la estadística propuesta tenía las mismas características ya sea usando el modelo normal o el uniforme. Intuitivamente se puede elegir a la familia gamma como modelo de aproximación del comportamiento de G_n , no lejano de la presunción inicial de una distribución χ^2 ; la función de densidad, valor esperado y varianza de una variable aleatoria X con distribución gamma son respectivamente: $f_X(x) = \frac{1}{\alpha^s \Gamma(s)} x^{s-1} e^{-\frac{1}{\alpha}x} I_{(0,\infty)}(X)$, $E[X] = \alpha s$ y $V[X] = s\alpha^2$.

En las tablas 1 y 2 se ratifican los valores de los parámetros de la distribución aproximada donde el valor esperado es igual a r . Así entonces $r = \alpha s$; por otra parte, el punto de oscilación $2r^2$ sugiere el valor aproximado de la varianza, con lo cual $s\alpha^2 = 2r^2$ y $r\alpha = 2r^2$, de donde $\alpha = 2r$, en consecuencia $2rs = r$ y en síntesis $s = \frac{1}{2}$.

En las tablas 1 y 2 se puede observar la semejanza entre los valores esperados y varianza simuladas con valores esperados y varianzas del modelo gamma, lo cual permite afirmar que la distribución de G_n puede aproximarse por medio de una distribución gamma con parámetros $s = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 2r$.

TABLA 1: Media, varianza y percentiles obtenidos por simulación para la estadística G_n con base en 10000 muestras provenientes de la distribución normal.

ESTADÍSTICA	media	varianza	PERCENTILES						
			0.1	0.25	0.5	0.75	0.90	0.95	0.99
$G_n(20)$	20.02	785.48	0.46	2.18	9.23	26.46	53.94	76.37	131.46
percentiles	0.32	2.03	9.10	26.47	54.11	76.83	132.70		
dist. gamma ^a									
$G_n(100)$	100.11	19666.02	2.28	10.85	46.12	132.33	269.85	381.67	657.35
percentiles	1.58	10.15	45.49	132.33	270.55	384.15	663.49		
dist. gamma ^a									
$G_n(500)$	500.73	492477.59	11.31	54.21	230.64	661.69	1350.22	1911.67	3292.77
percentiles	7.90	50.77	227.47	661.65	1352.77	1920.73	3317.45		
dist. gamma ^a									

^a con parámetros $s = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 2r$.

Como consecuencia del examen del comportamiento de los valores simulados de G_n , de sus promedios, varianzas y de sus percentiles que presentan gran similitud con respecto a la distribución gamma, este trabajo propone el siguiente test para evaluar la bondad de ajuste a las distribuciones normal y uniforme, en los siguientes términos:

TABLA 2: Media, varianza y percentiles obtenidos por simulación para la estadística G_n con base en 10000 muestras provenientes de la distribución uniforme.

ESTADÍSTICA	media	varianza	PERCENTILES						
			0.1	0.25	0.5	0.75	0.90	0.95	0.99
$G_n(20)$	19.93	792.48	0.30	1.94	9.00	26.32	54.25	77.62	130.12
percentiles	0.32	2.03	9.10	26.47	54.11	76.83	132.70		
dist. gamma ^a									
$G_n(100)$	99.67	19812.24	1.50	9.74	45.02	131.60	271.24	388.10	650.66
percentiles	1.58	10.15	45.49	132.33	270.55	384.15	663.49		
dist. gamma ^a									
$G_n(500)$	498.41	495354.30	7.51	48.74	225.16	658.03	1356.20	1940.60	3253.40
percentiles	7.90	50.77	227.47	661.65	1352.77	1920.73	3317.45		
dist. gamma ^a									

^a con parámetros $s = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 2r$.

“Rechazar la hipótesis de ajuste al modelo en consideración si $G_n > G_{n,1-\alpha}$ ”. $G_{n,1-\alpha}$ es el percentil $100(1 - \alpha)\%$ de una variable con distribución gamma con parámetros $s = \frac{1}{2}$ y $\alpha = 2r$.

5. Exploración del ajuste con la estadística propuesta

Para identificar peculiaridades de la estadística propuesta, frente a las estadísticas con las cuales se coteja, se dispuso de cuatro regiones que representaran cercanías o alejamientos entre el promedio de la muestra y el promedio poblacional e igualmente entre la varianza de la muestra y la varianza poblacional. Para ello se utilizó el primer cuadrante del plano cartesiano, tomando como eje de las abscisas la diferencia en valor absoluto entre los promedios y como eje de las ordenadas la diferencia en valor absoluto entre las varianzas. El cuadrante así obtenido se divide en las cuatro regiones como se muestra en la figura 1.

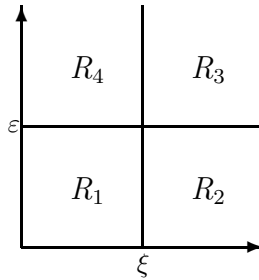


FIGURA 1: Regiones propuestas para la exploración.

Las cotas ξ y ϵ , que definen las regiones, se determinaron aplicando la desigualdad de Chebyshev como se describe posteriormente. La región R_1 representa las situaciones donde las diferencias de los promedios y de las varianzas son relativamente pequeñas. La región R_2 representa las ocasiones en las cuales las diferencias entre promedios son grandes y las diferencias entre las varianzas son pequeñas,

la región R_3 representa los casos en los cuales las diferencias entre promedios y varianzas son relativamente grandes y la región R_4 representa los eventos en que las diferencias entre promedios son pequeñas y las diferencias entre varianzas son grandes.

5.1. Juzgamiento del ajuste a la distribución normal

La unidad de exploración consistió en un conjunto de 1000 muestras aleatorias particulares provenientes de una distribución normal con los mismos parámetros empleados en la sección 4.2.

Con las muestras simuladas se evaluó la bondad del ajuste empleando las estadísticas de Pearson, K-S y la estadística propuesta G_n . La respuesta se cuantificó por medio de la tasa de rechazo de la hipótesis de normalidad, definiéndose como tasa total de rechazos (TRR), tasa de rechazos región uno (TRR₁), tasa de rechazos región dos (TRR₂), tasa de rechazos región tres (TRR₃) y tasa de rechazos región cuatro (TRR₄); las cuatro regiones se definieron como

$$\begin{aligned} R_1 : & \text{Si } |\bar{X}_n - \mu| < \xi \quad \text{y} \quad \left| \frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1 \right| < \varepsilon \\ R_2 : & \text{Si } |\bar{X}_n - \mu| \geq \xi \quad \text{y} \quad \left| \frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1 \right| < \varepsilon \\ R_3 : & \text{Si } |\bar{X}_n - \mu| \geq \xi \quad \text{y} \quad \left| \frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1 \right| \geq \varepsilon \\ R_4 : & \text{Si } |\bar{X}_n - \mu| < \xi \quad \text{y} \quad \left| \frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1 \right| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

La cota ξ para la diferencia de medias se determinó teniendo en cuenta que $E[\bar{X}_n] = \mu$ y $V[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$; luego, utilizando la desigualdad de Chebyshev $P[|\bar{X}_n - \mu_x| < r\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$ para $r > 0$ y utilizando el remplazo $\xi = r \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se tiene $P[|\bar{X}_n - \mu_x| < \xi] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\xi^2}$ eligiendo $1 - \frac{\sigma^2}{n\xi^2} = 0.05$, entonces $\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{n*0.95}}$.

La cota ε para la diferencia de varianzas se determinó denotando $X = \frac{S_n^2}{\sigma^2}$. De esta manera $E[X] = 1$ y $V[X] = \frac{1}{\sigma^4} V[S_n^2]$.

Como $V[S_n^2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4)$, $n > 1$ con $\mu_4 = \frac{4! \sigma^4}{2!2!} = 3\sigma^4$, entonces $V[S_n^2] = \frac{1}{n} \left(3\sigma^4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4 \right)$ y $V[X] = \frac{1}{n} \left(3 - \frac{n-3}{n-1} \right)$, $n > 1$; empleando la desigualdad de Chebyshev $P[|X - \mu_x| < r\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$ para cada $r > 0$, y remplazando $\varepsilon = r \sqrt{\frac{1}{n} \left(3 - \frac{n-3}{n-1} \right)}$, se tiene que $P\left[\left| \frac{S_n^2}{\sigma^2} - 1 \right| < \varepsilon \right] \geq 1 - \frac{\left(3 - \frac{n-3}{n-1} \right)}{n\varepsilon^2}$.
Eligiendo $1 - \frac{\left(3 - \frac{n-3}{n-1} \right)}{n\varepsilon^2} = 0.05$ entonces $\varepsilon = \sqrt{\frac{\left(3 - \frac{n-3}{n-1} \right)}{n*0.95}}$.

Para realizar el ajuste con la estadística de Pearson al modelo normal con valor esperado μ y varianza σ^2 totalmente especificados, se determinó una partición de la recta real de seis subintervalos disjuntos desde $(-\infty, \mu - 2\sigma]$ hasta $(\mu + 2\sigma, \infty]$ y

para efecto de decisión se utilizó el percentil 0.95 de una distribución χ^2 con cinco grados de libertad.

Con el ajuste que empleó la estadística de K-S se utilizó el percentil 0.95 de D_n , calculado con la expresión $1.36/(n + \sqrt{n/10})^{1/2}$ (Conover 1999).

El ajuste a la distribución normal de parámetros específicos mediante la estadística propuesta tuvo en cuenta los percentiles 0.95 que se muestran en las tablas 1 y 2.

5.2. Juzgamiento del ajuste a la distribución uniforme

La unidad de exploración también fueron 1000 muestras aleatorias particulares provenientes de una distribución uniforme de tamaño $n = 20, 70, 120, 170$ y 220 ; con las muestras simuladas se procedió a realizar la prueba de bondad de ajuste y se cuantificó la tasa de rechazo de igual forma que la descrita en la sección anterior; las regiones para este caso fueron

$$\begin{aligned}
 R_1 &: \text{Si } |\bar{X}_n - 0.5| < \xi \quad \text{y} \quad |S_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon \\
 R_2 &: \text{Si } |\bar{X}_n - 0.5| \geq \xi \quad \text{y} \quad |S_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon \\
 R_3 &: \text{Si } |\bar{X}_n - 0.5| \geq \xi \quad \text{y} \quad |S_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon \\
 R_4 &: \text{Si } |\bar{X}_n - 0.5| < \xi \quad \text{y} \quad |S_n^2 - \sigma^2| \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $E[\bar{X}_n] = 0.5$ y $V[\bar{X}_n] = \frac{1}{12*n}$, $P[|\bar{X}_n - 0.5| < r\sqrt{\frac{1}{12*n}}] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$ para $r > 0$, utilizando el remplazo $\xi = r\sqrt{\frac{1}{12*n}}$, se tiene que $P[|\bar{X}_n - 0.5| < \xi] \geq 1 - \frac{1}{12*n\xi^2}$ y eligiendo $1 - \frac{1}{12*n\xi^2} = 0.05$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{0.95*12*n}}$.

Por otra parte, como $E[S_n^2] = \sigma^2$ y $V[S_n^2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4)$, $n > 1$, $V[S_n^2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}(\frac{1}{144}))$, y $\mu_4 = \frac{1}{5*2^4} = \frac{1}{80}$. Así $V[S_n^2] = \frac{1}{n}((\frac{1}{180})\frac{n-3}{n-1})$, $n > 1$ con base en la desigualdad de Chebyshev, $P[|X - \mu_x| < r\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$ para cada $r > 0$ y remplazando $\varepsilon = r\sqrt{\frac{1}{n}((\frac{1}{180})\frac{n-3}{n-1})}$, se tiene que $P[|S_n^2 - \sigma^2| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{((\frac{1}{80})\frac{n-3}{n-1})}{n\varepsilon^2}$, eligiendo $1 - \frac{((\frac{1}{80})\frac{n-3}{n-1})}{n\varepsilon^2} = 0.05$ entonces $\varepsilon = \sqrt{\frac{((\frac{1}{80})\frac{n-3}{n-1})}{n*0.95}}$.

En la evaluación del ajuste de la estadística de Pearson al modelo uniforme en el intervalo $(0, 1)$, se estableció una partición de cinco intervalos de una amplitud de 0.2. Para efecto de decisión se utilizó el percentil 0.95 de una distribución χ^2 con cuatro grados de libertad.

El procedimiento para el ajuste con la estadística de K-S y la estadística G_n fue similar al empleado en el juzgamiento de la distribución normal.

6. Resultados de la exploración con base en la distribución normal

El análisis de los resultados de la exploración se llevó a cabo de manera análoga al análisis de los resultados de un diseño experimental con arreglo factorial de efectos fijos. En este contexto los elementos del análisis fueron:

Respuesta: tasa de rechazo de la hipótesis nula.

Factores:

- Valor esperado μ . Cuatro niveles: 50, 150, 250 y 350.
- Varianza σ^2 . Tres niveles: 1, 256 y 961.
- Tamaño de muestra n . Cinco niveles: 20, 70, 120, 170 y 220.
- Para el análisis conjunto, Estadísticas. Cinco niveles: Pearson, K-S, $G_n(20)$, $G_n(100)$ y $G_n(500)$.

Unidad de exploración: 1000 muestras de igual tamaño y generadas con los mismos parámetros.

Réplicas: seis.

6.1. Análisis conjunto

Los resultados de la exploración se examinaron mediante el análisis de varianza para la tasa total de rechazo y la tasa de rechazo en cada una de las regiones. De las tablas de los cinco análisis de varianza se compilaron resultados parciales (véase tabla 3).

TABLA 3: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones.

C de V	gl	CUADRADOS MEDIOS				
		TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
Estadística	4	0.00911823 **	0.00357893 **	0.02928230 **	0.00017162 **	0.01331699 **
μ	3	0.00010199	0.00000069	0.00003909	0.00009976 **	0.00000456
n	4	0.00016816 **	0.00002949 **	0.00009993 **	0.00001706	0.00001728 **
σ^2	2	0.00012652	0.00000208	0.00001031	0.00005176 *	0.00000035
Estadística * μ	2	0.00001374	0.00000115	0.00000632	0.00001433	0.00000160
Estadística * n	6	0.00041797 **	0.00001996 **	0.00013184 **	0.00007314 **	0.00003017 **
Estadística * σ^2	8	0.00003572	0.00000202	0.00003649	0.00000608	0.00000262
$\mu * n$	12	0.00009158 *	0.00000206	0.00004961 *	0.00004758 **	0.00000425
$\mu * \sigma^2$	6	0.00010781 *	0.00000130	0.00013801 **	0.00000613	0.00000226
$n * \sigma^2$	8	0.00005493	0.00000195	0.00004491	0.00007442 **	0.00000498
Error	1719	0.00004300	0.00000164	0.00002485	0.00001557	0.00000284
Total	1799					

* Diferencias estadísticas significativas al 5 %.

** Diferencias estadísticas significativas al 1 %.

Con base en el contenido de la anterior tabla, se puede afirmar que la simulación sugiere que las tasas medias de rechazo son estadísticamente distintas de acuerdo con el tipo de estadística que se utilice, tanto de manera general como vistas las tasas en cada una de las regiones establecidas. Este resultado se confirma en el análisis específico por cada estadística (tabla 4).

TABLA 4: Prueba de comparación de medias de Scheffé al 95 % para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones, teniendo en cuenta la estadística.

Estadística	TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
Pearson	0.0514444 A	0.00721389 A	0.0144278 C	0.0159667 A	0.0138361 A
Kolmogorov-Smirnov	0.0387139 C	0.00084444 B	0.0228667 B	0.0140139 C	0.0009889 B
$G_n(20)$	0.0491444 B	0.00000000 C	0.0341417 A	0.0149750 B	0.0000000 C
$G_n(100)$	0.0492056 B	0.00000000 C	0.0342028 A	0.0149750 B	0.0000000 C
$G_n(500)$	0.0492194 B	0.00000000 C	0.0342139 A	0.0149778 B	0.0000000 C
Diferencia mínima significativa	0.0015	0.0003	0.0011	0.0009	0.0003

Valores con la misma letra no presentan diferencias estadísticas significativas.

El ordenamiento presentado en la tabla 4, producto de la prueba de Scheffé permite concluir que en términos generales la estadística propuesta ocuparía un puesto intermedio entre las estadísticas de Pearson y K-S; igualmente las tres particiones elegidas para la estadística producen resultados muy similares.

Especialmente por región, la estadística propuesta mostró en la simulación su superioridad tanto en la región R₁ como en la región R₄, frente a las dos estadísticas que se comparó; en la región R₃, la estadística tiene el mismo comportamiento que cuando se la analiza de manera global. La debilidad de la estadística propuesta se manifiesta en la región R₂, en la cual es superada por las estadísticas de Pearson y K-S, al presentar las mayores tasas de rechazo.

También se deduce de la tabla 3 que la simulación sugiere que el tamaño de la muestra es un factor que interviene de manera importante en la tasa de rechazo tanto individualmente como de manera colectiva con cada uno de los otros factores. La significancia de la interacción particular con el factor estadística, es la razón que motiva al análisis específico.

Finalmente, de la información acopiada en la tabla 4, se deduce el efecto del valor del parámetro μ y el valor del parámetro σ^2 en la tasa de rechazo en la región R₃, como era lo esperado, puesto que corresponde a la región que bajo normalidad presenta mayor discrepancia entre el promedio de la muestra y el promedio poblacional y entre la varianza de la muestra y la varianza poblacional.

6.2. Análisis específico

Los resultados de la exploración se examinaron mediante el análisis de varianza para la tasa total de rechazo y para la tasa de rechazo en cada una de las regiones, teniendo en cuenta el tipo de estadística empleada para el ajuste. De las tablas de los cinco análisis de varianza se compilaron resultados parciales (véase las tablas 5 a 9).

En las tablas 5 y 6 se pone de manifiesto el efecto que tiene el tamaño de la muestra en la evaluación de la tasa de rechazo en el caso que para el ajuste se emplearon las estadísticas de Pearson y de K-S.

En las tablas 7 a 9 se puede apreciar que la estadística propuesta no depende del tamaño de la muestra ni del tamaño de los parámetros μ y σ^2 .

TABLA 5: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones empleando para el ajuste la estadística de Pearson.

CUADRADOS MEDIOS						
C de V	gl	TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
n	4	0.00029378 **	0.00010506 **	0.00002100	0.00014290 **	0.00013304 **
μ	3	0.00004367	0.00000448	0.00000553	0.00003558	0.00000837
σ^2	2	0.00006738	0.00000882	0.00002712	0.00001383	0.00000914
$n * \mu$	12	0.00008359	0.00000856	0.00002277	0.00000847	0.00002230 *
$n * \sigma^2$	8	0.00002797	0.00000796	0.00001159	0.00000544	0.00001580
$\mu * \sigma^2$	6	0.00000466	0.00000706	0.00001162	0.00001945	0.00000377
Error	319	0.00005029	0.00000721	0.00001377	0.00001645	0.00001197
Total	359					

* Diferencias estadísticas significativas al 5%.

** Diferencias estadísticas significativas al 1%.

TABLA 6: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones empleando para el ajuste la estadística de K-S.

CUADRADOS MEDIOS						
C de V	gl	TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
n	4	0.00147881 **	0.00000429 **	0.00052488 **	0.00014165 **	0.00000408 *
μ	3	0.00000394	0.00000081	0.00002627	0.00001424	0.00000176
σ^2	2	0.00001059	0.00000135	0.00004157	0.00002788	0.00000084
$n * \mu$	12	0.00003926	0.00000089	0.00002072	0.00001893	0.00000161
$n * \sigma^2$	8	0.00003075	0.00000118	0.00002075	0.00003500 *	0.00000129
$\mu * \sigma^2$	6	0.00001383	0.00000056	0.00001963	0.00000738	0.00000181
Error	319	0.00003705	0.00000092	0.00002352	0.00001625	0.00000123
Total	359					

* Diferencias estadísticas significativas al 5%.

** Diferencias estadísticas significativas al 1%.

TABLA 7: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones empleando para el ajuste la estadística $G_n(20)$.

CUADRADOS MEDIOS						
C de V	gl	TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
n	4	0.00002307	0.0	0.00002694	0.00000836	0.0
μ	3	0.00003724	0.0	0.00001124	0.00003603	0.0
σ^2	2	0.00006984	0.0	0.00003370	0.00001186	0.0
$n * \mu$	12	0.00002902	0.0	0.00001889	0.00001675	0.0
$n * \sigma^2$	8	0.00002474	0.0	0.00002464	0.00002343	0.0
$\mu * \sigma^2$	6	0.00005346	0.0	0.00004731	0.00000175	0.0
Error	319	0.00004528	0.0	0.00003095	0.00001610	0.0
Total	359					

TABLA 8: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones empleando para el ajuste la estadística $G_n(100)$.

C de V	gl	CUADRADOS MEDIOS				
		TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
n	4	0.00002211	0.0	0.00002691	0.00000836	0.0
μ	3	0.00003587	0.0	0.00001034	0.00003594	0.0
σ^2	2	0.00006180	0.0	0.00002762	0.00001143	0.0
$n * \mu$	12	0.00002948	0.0	0.00001901	0.00001685	0.0
$n * \sigma^2$	8	0.00002266	0.0	0.00002381	0.00002345	0.0
$\mu * \sigma^2$	6	0.00005367	0.0	0.00004635	0.00000186	0.0
Error	319	0.00004501	0.0	0.00003069	0.00001612	0.0
Total	359					

TABLA 9: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones empleando para el ajuste la estadística $G_n(500)$.

C de V	gl	CUADRADOS MEDIOS				
		TTR	TRR ₁	TRR ₂	TRR ₃	TRR ₄
n	4	0.00002225	0.0	0.00002755	0.00000835	0.0
μ	3	0.00003622	0.0	0.00001100	0.00003531	0.0
σ^2	2	0.00005979	0.0	0.00002625	0.00001109	0.0
$n * \mu$	12	0.00002994	0.0	0.00001908	0.00001677	0.0
$n * \sigma^2$	8	0.00002308	0.0	0.00002420	0.00002382	0.0
$\mu * \sigma^2$	6	0.00005300	0.0	0.00004566	0.00000184	0.0
Error	319	0.00004502	0.0	0.00003070	0.00001613	0.0
Total	359					

7. Resultados de la exploración con base en la distribución uniforme

Cuando se empleó la distribución uniforme, e independientemente de la estadística usada para el ajuste, solo se presentaron tasas de rechazo en las regiones uno y cuatro descritas anteriormente.

El análisis de los resultados de la exploración se llevó a cabo de manera análoga al análisis de los resultados de un diseño experimental con arreglo factorial de efectos fijos. Los elementos del análisis fueron:

Respuesta: tasa de rechazo de la hipótesis nula.

Factores:

- Estadísticas. Cinco niveles: Pearson, K-S, $G_n(20)$, $G_n(100)$ y $G_n(500)$.
- Tamaño de muestra n . Cinco niveles: 20, 70, 120, 170 y 220.

Unidad de exploración: 1000 muestras de igual tamaño.

Réplicas: seis.

7.1. Análisis de los resultados

Los resultados de la exploración se examinaron mediante el análisis de varianza para la tasa total de rechazo, tasa de rechazo en la región uno y tasa de rechazo en la región cuatro. De las tablas de los tres análisis de varianza se compilaron resultados parciales (tabla 10).

TABLA 10: Cuadrados medios para las variables tasa total de rechazos, tasa de rechazos región uno y tasa de rechazos región cuatro.

C de V	gl	CUADRADOS MEDIOS		
		TTR	TRR ₁	TRR ₄
Estadística	4	0.00074934 **	0.00133998 **	0.00087633 **
n	4	0.00009902 **	0.00029941 **	0.00005594 **
Estadística * n	16	0.00002924	0.00003099 *	0.00002563 *
Error	120	0.00332488	0.00001627	0.00001275
Total	149			

* Diferencias estadísticas significativas al 5 %.
 ** Diferencias estadísticas significativas al 1 %.

Con base en la anterior tabla, se puede afirmar que la simulación sugiere que las tasas medias de rechazo son estadísticamente distintas de acuerdo con el tipo de estadística que se utilice, tanto de manera general como para las regiones uno y cuatro.

El resultado del análisis de varianza se confirma en la tabla 11, donde el ordenamiento presentado producto de la prueba de Scheffé permite concluir que la estadística de Pearson y la estadística propuesta en cuanto a la tasa total de rechazos no presentan diferencias estadísticas entre sí, siendo estas tasas mayores que para la estadística de K-S.

La estadística propuesta en la simulación presenta peor desempeño frente a las dos estadísticas con que se comparó en la región R₁, mientras que en la región R₄ tiene un desempeño similar a la estadística de K-S, ambas estadísticas con menores tasas de rechazo que la estadística de Pearson. Además las tres particiones elegidas para la estadística propuesta producen resultados similares (tabla 11).

TABLA 11: Prueba de comparación de medias de Scheffé al 95 % para las variables tasa total de rechazo, tasa de rechazos región uno y tasa de rechazos región cuatro, teniendo en cuenta la estadística.

Estadística	TTR	TRR ₁	TRR ₄
Pearson	0.049233 A	0.019533 B	0.0297000 A
Kolmogorov-Smirnov	0.038133 B	0.019867 B	0.0182667 B
$G_n(20)$	0.049333 A	0.031900 A	0.0174333 B
$G_n(100)$	0.049333 A	0.031900 A	0.0174333 B
$G_n(500)$	0.049333 A	0.031900 A	0.0174333 B
Diferencia mínima significativa	0.0043	0.0033	0.0029

Valores con la misma letra no presentan diferencias estadísticas significativas.

En la tabla 10 se puede apreciar también que la simulación sugiere que el tamaño de la muestra es un factor que interviene de manera importante en la tasa de rechazo tanto para la tasa total de rechazo como en cada una de las regiones. La interacción de los factores estadística y tamaño de la muestra presenta diferencias estadísticas únicamente para las tasas de rechazo en las regiones uno y cuatro.

En general en la tabla 12 se aprecia la prueba de Scheffé, donde se revela que el efecto del tamaño de la muestra no influye en las estadísticas de Pearson, K-S y la propuesta para la tasa de rechazo en la región R_4 . Las estadísticas de Pearson y la propuesta no tienen influencia del tamaño de muestra en la tasa total de rechazos.

La estadística de K-S presenta influencia del tamaño de la muestra en cuanto a la tasa total de rechazo. Además esta estadística y la propuesta presentan influencia del tamaño de la muestra para la tasa de rechazos en la región R_1 .

TABLA 12: Prueba de comparación de medias de Scheffé al 95 % para las variables tasa total de rechazos y tasa de rechazos por regiones, teniendo en cuenta la estadística y el tamaño de la muestra.

TASA TOTAL DE RECHAZOS						
Tamaño de muestra	Pearson	K-S	$G_n(20)$	$G_n(100)$	$G_n(500)$	
20	0.049833 A	0.030167 B	0.046500 A	0.046500 A	0.046500 A	
70	0.047500 A	0.038000 AB	0.051667 A	0.051667 A	0.051667 A	
120	0.050000 A	0.040667 A	0.048500 A	0.048500 A	0.048500 A	
170	0.051167 A	0.039667 A	0.050167 A	0.050167 A	0.050167 A	
220	0.047667 A	0.042167 A	0.049833 A	0.049833 A	0.049833 A	
Diferencia mínima significativa	0.0133	0.0095	0.0103	0.0103	0.0103	
TASA DE RECHAZOS REGIÓN UNO						
Tamaño de muestra	Pearson	K-S	$G_n(20)$	$G_n(100)$	$G_n(500)$	
20	0.020333 A	0.011833 B	0.025333 B	0.025333 B	0.025333 B	
70	0.022667 A	0.020833 A	0.033667 AB	0.033667 AB	0.033667 AB	
120	0.017333 A	0.021333 A	0.031667 AB	0.031667 AB	0.031667 B	
170	0.019167 A	0.021500 A	0.035000 A	0.035000 A	0.035000 A	
220	0.018167 A	0.023833 A	0.033833 AB	0.033833 AB	0.033833 AB	
Diferencia mínima significativa	0.0081	0.0068	0.0086	0.0086	0.0086	
TASA DE RECHAZOS REGIÓN CUATRO						
Tamaño de muestra	Pearson	K-S	$G_n(20)$	$G_n(100)$	$G_n(500)$	
20	0.029500 A	0.018333 A	0.021167 A	0.021167 A	0.021167 A	
70	0.024833 A	0.017167 A	0.018000 A	0.018000 A	0.018000 A	
120	0.032667 A	0.019333 A	0.016833 A	0.016833 A	0.016833 A	
170	0.032000 A	0.018167 A	0.015167 A	0.015167 A	0.015167 A	
220	0.029500 A	0.018333 A	0.016000 A	0.016000 A	0.016000 A	
Diferencia mínima significativa	0.0112	0.0056	0.0062	0.0062	0.0062	

8. Conclusiones

Este trabajo recurrió a la simulación como medio para explorar el comportamiento de la estadística propuesta. En tal sentido, se derivaron de dicha simulación y por tanto su alcance está limitado a las condiciones particulares elegidas.

Se encontró que la estadística propuesta tuvo un desempeño intermedio para la evaluación del ajuste a la distribución normal, superando a la estadística de Pearson, pero superada por la estadística de K-S.

Al realizar la evaluación del ajuste al modelo normal se encontró que la estadística propuesta no depende del tamaño de la muestra como sí sucede cuando se emplean las estadísticas de Pearson y K-S.

La estadística propuesta y la estadística de Pearson en la evaluación del ajuste al modelo uniforme, presentaron mayor tasa total de rechazos que la estadística de K-S.

En el ajuste a la distribución uniforme al emplear las estadísticas de Pearson y la propuesta, el tamaño de la muestra no influyó en la tasa total de rechazos como sí sucedió con la estadística de K-S.

La estadística propuesta presentó un comportamiento diferente de acuerdo con el modelo empleado para el ajuste. Además en los dos modelos usados las particiones elegidas para la estadística producen resultados similares o iguales.

Finalmente este trabajo propone realizar el estudio teórico de la distribución de la estadística. También realizar la valoración del comportamiento de la estadística cuando la hipótesis de nulidad no se cumple.

[Recibido: febrero de 2009 — Aceptado: mayo de 2010]

Referencias

- Cabaña, A. & Quiroz, J. (2005), 'Using the Empirical Moment Generating Function in Testing for the Weibull and the Type I Extreme Distributions', *Test* **12**(2), 417–431.
- Collander, R. & Chalfant, J. (1985), An alternative Approach to Decisions under Uncertainty: The Empirical Moment Generating Function, Work Paper, University of California, Department of Agricultural and Resources Economics.
- Conover, W. (1999), *Practical Nonparametric Statistics*, third edn, John Wiley, United States of America.
- Csörgö, S. (1981), 'Multivariate Empirical Characteristic Function. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeits-Theorie und Verwandte Gebiete', *Annals of Probability* (55), 203–229.
- Csörgö, S. (1986), 'Testing for Normality in Arbitrary Dimension', *Annals of Statistics* **14**(2), 708–723.

- Csőrgo, S. & Heathcote, C. (1987), 'Testing for Symmetry', *Biometrika* **1**(74), 177–184.
- Epps, T. & Pulley, L. (1985), Two Test of fit Based on the Sample Characteristic Function with Applications to Exponentiality, Paper presented at the annual meeting of the American Statistical Association, Las Vegas, NE.
- Feuerverger, A. & Mureika, A. (1977), 'The Empirical Characteristic Function and its Applications', *Annals of Statistics* (5), 88–97.
- Heathcote, C. (1977), 'The Integrated Squared Error Estimation of Parameters', *Biometrika* **2**(64), 255–264.
- Koutrouvelis, I. (1980), 'A goodness-of-fit Test of Simple Hypotheses Based on the Empirical Characteristic Function', *Biometrika* **1**(67), 238–240.
- Koutrouvelis, I. & Kellermeier, J. (1981), 'A goodness-of-fit Test Based on the Empirical Characteristic Function when Parameters must be Estimated', *Journal of the American Statistical Association* **2**(43), 173–176.
- Meintanis, S. (2007), 'A Kolmogorov-Smirnov Type Test for Skew Normal Distributions Based on the Empirical Moment Generating Function', *Journal of Statistical Planning and Inference* **137**(8), 2681–2688.
- Mood, A., Graybill, F. & Boes, D. (1974), *Introduction to the Theory of Statistics*, third edn, McGraw-Hill, Singapore.
- Muñoz, L. (1998), Bondad de ajuste empleando la función generadora de momentos, Tesis de maestría, Departamento de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Quand, R. & Ramsey, J. (1978), 'Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions', *Journal of the American Statistical Association* (73), 730–741.