PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 52 Fasc. 4 – 1995

LES ESPACES $\mathcal{H}(\Omega)$ ET LE CALCUL SYMBOLIQUE DE SEBASTIÃO E SILVA

Fernando Manuel Sequeira

Abstract: Ce travail est une continuation d'un autre, du même auteur, intitulé "Les algèbres $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et le calcul symbolique de Sebastião e Silva", publié dans la revue "Portugaliae Mathematica". Dans ce second travail on décrit quelques propriétés des espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe. Nous avons démontré: que leurs duals sont des espaces de Silva parfaits; qu'il y a (quand même ∞ n'appartient pas à Ω) une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues de ces duals dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet $\mathbf{E}$ et certaines classes de fonctions holomorphes dans Ω et à valeurs dans $\mathbf{E}$; qu'on peut définir une topologie dans l'espace de ces classes de fonctions le rendant isomorphe de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega)', \mathbf{E}]$ si celui-ci est muni de la topologie de la convergeance uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)'$. Nous avons déduit encore quelques propriétés des applications linéaires continues des $\mathcal{H}(\Omega)$ dans un espace dénombrablement normé complet.

On présente ensuite des exemples d'application de ces résultats et du calcul symbolique de Sebastião e Silva. En particulier on déduit un théorème d'echantillonage qu'on peut considérer une généralisation du théorème de Shannon et on établit une correspondance entre les systèmes analogiques et les systèmes discrets (utilisés dans la théorie des systèmes physiques).

Introduction

Au chapitre I nous commençons par définir les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe compactifié $\widetilde{\mathbb{C}}$. Chacun de ces espaces étant la limite projective d'une suite d'espaces de Banach pour une famille d'injections compactes (I.2.1), il est aussi un espace parfait au sens de Guelfand [1] et son dual est un espace de Silva parfait [2]. Ce dual peut encore être identifié à un espace de fonctions holomorphes (I.3.2 et I.3.3) que nous avons désigné par $\mathcal{G}(\Omega^c)$, et qui est un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ [I.2.4 dans [2]] lorsque $\infty \in \Omega$.

Received: May 26, 1994.

En outre, nous démontrons que, même si l'infini n'appartient pas à Ω, il y a encore une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues de $\mathcal{G}(\Omega^c)$ dans un espace localement convexe, séparé et semi-complet $\mathbf{E}$ et certaines classes de fonctions holomorphes dans Ω et à valeurs dans $\mathbf{E}$ (I.3.4.2). L'espace $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ de ces fonctions est muni d'une topologie le rendant isomorphe de $\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$ lorsque celui-ci est à son tour muni de la topologie de la convergeance uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{G}(\Omega^c)$ (I.3.5.2).

Nous établissons ensuite une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans un espace dénombrablement normé et complet $\mathbf{E}$ et certaines classes de fonctions holomorphes que nous dénommons indicatrices de ces applications (I.4.2.10).

Au chapitre II nous présentons quelques applications des résultats obtenus. Nous mentionnons en particulier quelques exemples d'espaces de Silva parfaits, importants par leurs applications:

- $\mathbf{U}_c$ des ultradistributions à support compact dans $\mathbb{R}$, dont le dual est $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (II.1.1);
- $\mathbf{F}$ des fonctions définies dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et à "ultrabande" bornée, dont les images de Fourier (ou de Laplace) sont les éléments de $\mathbf{U}_c$ (II.1.2);
- Λ_τ des distributions de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \delta(\widehat{t} - k\tau)$ où $\limsup \sqrt[k]{|\alpha_k|} < \infty$ (II.1.3).

Et entre ces espaces nous référons quelques applications linéaires continues:

- l'opérateur échantillonnage S_τ (de période $\tau > 0$) qui à tout fonction $f \in \mathbf{F}$ fait correspondre la distribution $S_\tau(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\tau) \, \delta(\widehat{t} - k\tau)$ qui est un élément de Λ_τ; cette application est surjective (II.1.6);
- l'isomorphisme Q entre $\mathbf{F}$ et Λ_τ, qui à la dérivation dans $\mathbf{F}$ fait correspondre la translation dans Λ_τ, permettant de transformer les équations différentielles dans $\mathbf{F}$ en équations de convolution dans Λ_τ (II.1.7).

En outre, en considérant le sous-espace $\mathbf{F}_\rho$ de $\mathbf{F}$ formé par les fonctions dont l'ultrabande est contenue dans le cercle $\mathbf{V}_\rho = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \rho\}$, ρ étant un réel ≥ 0, on vérifie que si $\rho\,\tau < \pi$, l'opérateur échantillonnage S_τ est injectif. Ce résultat peu être consideré une généralisation du théorème de Shannon (II.1.9.7). Nous developpons encore le calcul symbolique de l'opérateur derivation D dans ces espaces $\mathbf{F}_\rho$ ($\rho \geq 0$), et de la même façon, le calcul symbolique de l'opérateur T défini dans $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$ (lorsque $\rho\tau < \pi$) par la relation

$$T\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \delta(\widehat{t} - k\tau)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} \, \delta(\widehat{t} - k\tau) \; .$$

Les opérateurs $\widehat{\phi}(D)$ et $\widehat{\phi}(T)$ définis vérifient les relations

$$S_\tau \circ \widehat{\phi}(e^{\tau D}) = \widehat{\phi}(T) \circ S_\tau$$

quelle que soit la fonction $\widehat{\phi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$. Ces égalités permettent d'établir une correspondance biunivoque entre les systèmes analogiques et les systèmes discrets [7].

Finalement, en considérant l'opérateur $R_{\widehat{\gamma}} : \mathbf{U}_c \to \mathbf{U}_c$ obtenu par la multiplication par une ultradistribution $\widehat{\gamma} \in \mathbf{U}_c$ (au sens de Silva Oliveira) nous définissons l'opérateur $\widehat{\Psi}(R_{\widehat{\gamma}})$ quelle que soit la fonction $\widehat{\Psi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages du zero (dans $\mathbb{C}$).

I – Les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$

1. Nous commençons par introduire une classe d'espaces vectoriels topologiques que nous dénommons *espaces* $\mathcal{H}(\Omega)$. Chacun de ces espaces $\mathcal{H}(\Omega)$, où Ω désigne un ouvert dans le plain compactifié $\widetilde{\mathbb{C}}$, est muni d'une topologie par rapport à laquelle il devient un espace M^* [3], et encore un espace parfait au sens de Guelfand [1]. Son dual est un espace de Silva, et parfois un espace $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ [2].

1.1. À ce sujet, considérons un ouvert Ω dans $\widetilde{\mathbb{C}}$. Il existe toujours une suite $(\mathbf{C}_k)$ de sous-ensembles compacts dans $\widetilde{\mathbb{C}}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

1.1.1. $\Omega = \bigcup_k \mathbf{C}_k$;

1.1.2. *Tout sous-ensemble compacte de* Ω *est contenu dans un* $\mathbf{C}_k$;

1.1.3. *Quel que soit* $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{C}_k$ *est contenu dans* $\mathbf{C}_{k+1}$;

1.1.4. *Quel que soit* $k \in \mathbb{N}$, *toute composante connexe de* $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ *contient une composante connexe de* $\widetilde{\mathbb{C}} - \Omega$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous désignons encore par $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ l'espace de Banach suivant:

1.1.5. Il est formé par les fonctions $u(\widehat{\lambda})$, complexes, définies et continues sur $\mathbf{C}_k$, holomorphes à l'inérieur de cet ensemble et telles que $u(\infty) = 0$, si $\infty \in \mathbf{C}_k$;

Note: Si $\infty \in \Omega$, sans perdre la géneralité, nous supposons que le point ∞ est intérieur à tous les $\mathbf{C}_k$.

1.1.6. Il est muni de la norme $\|\cdot\|_k$ donnée par $\|u\|_k = \sup_{\lambda \in \mathbf{C}_k} |u(\lambda)|$, $\forall\, u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$.

1.2. Les espaces $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ vérifient les propriétés suivantes:

1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un cycle Γ_k contenu dans $\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{C}_k$ tel que

$$u(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{u(\xi)}{\xi - \widehat{\lambda}} \, d\xi \ ,$$

quel que soit $u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_{k+1})$; cette formule définit l'inclusion de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_{k+1})$ dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$. L'indice $n(\Gamma_k; \lambda)$ de Γ_k par rapport à λ satisfait les propriétés suivantes: il est nul pour tout $\lambda \in \mathbf{C}_k$ et égal à -1 pour tout $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}$ si $\infty \in \Omega$; il est égal à 1 pour tout $\lambda \in C_k$ et égal à zéro pour tout $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}$ si $\infty \in \widetilde{\mathbb{C}} - \Omega = \Omega^c$.

1.2.2. Les parties bornées de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_{k+1})$ sont relativement compactes dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

1.2.3. La limite projective pour les inclusions de la suite $(\mathcal{H}(\mathbf{C}_k))$ est un espace parfait [1, p. 55]. Il est indépendent de la suite $(\mathbf{C}_k)$ considérée vérifiant les propriétés 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4.

Par la suite, nous désignons par $\mathcal{H}(\Omega)$ cette limite projective. Ses éléments peuvent être identifiés aux fonctions $u(\widehat{\lambda})$, définies et holomorphes dans Ω, et telles que $u(\infty) = 0$ si $\infty \in \Omega$. La topologie de $\mathcal{H}(\Omega)$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de Ω, et elle peut être définie par la suite $(\|\cdot\|_k)$ de normes concordantes (données par 1.1.6).

L'integrale

1.2.4. $$u(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{u(\xi)}{\xi - \widehat{\lambda}} \, d\xi \ ,$$

quel que soit $k \in \mathbb{N}$ définit maintenant l'inclusion de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ si nous considérons que $\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}$ est definie dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ et à valeurs dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$.

2. Nous supposons maintenant que $\infty \in \Omega$. Les éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont des fonctions $u(\widehat{\lambda})$, définies et holomorphes dans Ω et telles que $u(\infty) = 0$. En outre, les ensembles $\overline{\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k}$, $k = 1, 2, ...$, forment une base du filtre des voisinages de $\Omega^c = \widetilde{\mathbb{C}} - \Omega$, et vérifient les propriétés II.1.1.1 et II.1.1.2 (la proriété II.1.1.3 n'est pas nécéssaire dans ce cas) référées dans [2].

2.1. Alors, si nous pouvons démontrer que tout élément $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ est une fonction à décroissance presque rapide sur tout ensemble $\mathbf{C}_k$, et que les normes p_k (II.6.6.1 dans [2]) et $\|\cdot\|_k$ (1.1.6) données par

2.1.1. $$p_k(u) = \sup_{\lambda \in \mathbf{C}_k} \left| (\lambda - \alpha)^{k+1} \, u_k(\lambda) \right|, \quad \forall \, u \in \mathcal{H}(\Omega) \ ,$$

et

$$\textbf{2.1.2.} \qquad \|u\|_k = \sup_{\lambda\in\mathbf{C}_k} |u(\lambda)|\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,$$

sont équivalentes (α est un point arbitraire de $\mathbf{C}_1$ et u_k le reste d'ordre k relatif à α) il en résulte que $\mathcal{H}(\Omega)$ est le dual fort de l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente sur le filtre des voisinages de Ω^c, donc un espace M^* [4].

Pour démontrer que tout élément $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ est à décroissance presque rapide sur les ensembles $\mathbf{C}_k$, il suffit de vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\textbf{2.1.3.} \qquad \begin{aligned} u(\lambda) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(\lambda-\alpha)^j}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(\xi-\alpha)^{j-1}\,u(\xi)\,d\xi\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\lambda-\alpha)^k}\int_{\Gamma_k}\frac{(\xi-\alpha)^k\,u(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi\,, \qquad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}_k\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u(\lambda) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\mu_j}{(\lambda-\alpha)^j} + u_k(\lambda)$$

où les

$$\mu_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(\xi-\alpha)^{j-1}\,u(\xi)\,d\xi$$

sont les coefficients assymptotiques de u par rapport à α, et

$$u_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\lambda-\alpha)^k}\int_{\Gamma_k}\frac{(\xi-\alpha)^k\,u(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi$$

est le reste d'ordre k relatif à α [4].

Pour vérifier que les normes p_k et $\|\cdot\|_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, sont équivalentes, il suffit de constater que

$$\textbf{2.1.4.} \qquad u_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(\lambda-\alpha)^k}\int_{\Gamma_k}\frac{(\xi-\alpha)^k\,u(\xi)}{\xi-\lambda}\,d\xi\,, \qquad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}_k\ ,$$

et que

$$\textbf{2.1.5.} \qquad u(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{u_k(\xi)}{\xi-\alpha}\,d\xi\,, \qquad \forall\,\lambda\in\mathbf{C}_k\ .$$

3. Supposons maintenant que $\infty \in \Omega^c$, et considérons le dual $\mathcal{H}(\Omega)'$ de $\mathcal{H}(\Omega)$. Étant donné $F \in \mathcal{H}(\Omega)'$, on sait qu'il vérifie la propriété suivante [1, p. 33]: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathbf{V} = \{u \in \mathcal{H}(\Omega) :\ \|u\|_k < |\gamma|\}$ (où $k \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$) du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$ tel que $|F(u)| < \varepsilon$, $\forall\, u \in \mathbf{V}$. Alors, $\mathcal{H}(\Omega)$ étant dense dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ pour la norme $\|\cdot\|_k$ de cet espace, nous pouvons prolonger F par continuité à toute le $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$. Nous représentons ce prolongement par F^k.

3.1. Soit donc $F \in \mathcal{H}(\Omega)'$, et F^k un prolongement possible de F à l'espace $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$. De l'égalité (1.2.4) on obtient

3.1.1. $$F(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} u(\xi)\, F^k\Big(\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}\Big) d\xi\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)\ .$$

Et il est aisé de voir que $F^k(\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}})$ est une fonction de ξ, définie dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$, par conséquent dans un voisinage de Ω^c, qui est nulle au point ∞.

En outre, si F admet les deux prolongements F^k et F^j aux espaces $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{C}_j)$ respectivement, les prolongements coincident dans l'intersection de leurs domaines, en ayant

3.1.2. $$F^k\Big(\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}\Big) = F^j\Big(\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}\Big)\,, \qquad \forall\, \xi \in \widetilde{\mathbb{C}} - (\mathbf{C}_k \cup \mathbf{C}_j)\ .$$

3.2. Désignons maintenant par $\mathcal{G}(\Omega^c)$ l'espace vectoriel obtenu de cette façon:

3.2.1. On considère les fonctions complexes $\psi(\widehat{\lambda})$, définies et holomorphes dans un voisinage de Ω^c et telles que $\psi(\infty) = 0$;

3.2.2. On identifie deux de ces fonctions lorsqu'elles coincident dans un voisinage de Ω^c;

3.2.3. On munit l'ensemble de ces classes de fonctions de la structure vectorielle usuelle.

Il est aisé de voir que, étant donné un élément $\widehat{\psi} \in \mathcal{G}(\Omega^c)$, les intégrales de la forme

3.2.4. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} u(\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,$$

où k est un nombre naturel tel que $\widehat{\psi}$ admet un représentant ψ défini et holomorphe dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ sont indépendentes du représentant de $\widehat{\psi}$ et du cycle Γ_k. Elles définissent une application linéaire continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, un élément de $\mathcal{H}(\Omega)'$.

En outre, étant donnée une application linéaire continue F de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ et un prolongement F^k possible de cette application à un espace $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$, la fonction $\psi(\widehat{\xi})$ donnée par

3.2.5. $$\psi(\xi) = F^k\Big(\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}\Big)\,, \qquad \forall\, \xi \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k\ ,$$

est un représentant d'un élément de $\mathcal{G}(\Omega^c)$, qui est indépendent du prolongement F^k considéré. C'est-à-dire, les formules réciproques 3.2.4 et 3.2.5 définissent une application bijective, et naturellement un isomorphisme entre les structures vectorielles de $\mathcal{H}(\Omega)'$ et de $\mathcal{G}(\Omega^c)$.

3.3. $\mathcal{H}(\Omega)'$ étant le dual d'un espace dénombrablement normé, tout son sous-ensemble faiblement borné est uniformément borné sur un certain voisinage du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$ (il est donc fortement borné) [3, p. 48]. C'est-à-dire, si $\mathbf{B} \subset \mathcal{H}(\Omega)'$ est faible ou fortement borné, il existe un $\varepsilon > 0$ et un voisinage $\mathbf{V} = \{u \in \mathcal{H}(\Omega) \colon \|u\|_k < \delta\}$ ($k \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$) tels que $|F(u)| < \varepsilon$ quels que soient $F \in \mathbf{B}$ et $u \in \mathbf{V}$. Tout élément $F \in \mathbf{B}$ admet donc un prolongement F^k par continuité à $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$, qui vérifie $|F^k(u)| \leq \varepsilon$ quel que soit $u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dont la norme $\|u\|_k < \delta$. En particulier, si $\|\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}}\|_k < d$ pour tout $\xi \in \widetilde{C} - \mathbf{C}_{k+1}$ (où d désigne la distance de la frontière de $\mathbf{C}_k$ à $\mathbf{C}_{k+1}$), on a encore $|F^k(\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}})| \leq \frac{\varepsilon}{d\,\delta}$. Les images données par 3.2.5 des prolongements F^k des éléments $F \in \mathbf{B}$, constituent donc un ensemble de fonctions $\psi(\widehat{\xi})$ uniformément bornées sur $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}$.

Réciproquement, on peut aisément démontrer que si les fonctions images, données par 3.2.5 des prolongements F^k des éléments F d'un certain $\mathbf{B} \subset \mathcal{H}(\Omega)'$, sont uniformément bornées sur un ensemble $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$, alors $\mathbf{B}$ est uniformément borné sur le voisinage $\mathbf{V} = \{u \in \mathcal{H}(\Omega) \colon \|u\|_{k+1} < \delta\}$ du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$. En effet, si $|F^k(\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}})| < M$, $\forall\, \xi \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ et $\forall\, F \in \mathbf{B}$, on a

$$\mathbf{3.3.1.}\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} F^k\Big(\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}}\Big)u(\xi)\,d\xi\right| \leq \frac{M\,\delta|\Gamma_k|}{2\,\pi}\,, \qquad \forall\, u \in \mathbf{V} \text{ et } \forall\, F \in \mathbf{B}\,.$$

On peut donc énoncer la proposition

3.3.2 Proposition. *Une partie $\mathbf{B} \subset \mathcal{H}(\Omega)'$ est faible ou fortement bornée, si — et seulement si — les images dans $\mathcal{G}(\Omega^c)$ donées par 3.2.5 de ses éléments admettent des représentants qui forment un ensemble de fonctions uniformément bornées sur un des ensembles $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$.*

3.4. Dans tout ce qui va suivre nous supposons que $\mathcal{H}(\Omega)'$ est muni de la topologie forte, c'est-à-dire, de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$. Son dual est $\mathcal{H}(\Omega)$, dont la topologie forte coincide avec la topologie initiale (muni de cette topologie c'est un espace dénombrablement normé complet) [1, p. 51].

Celà posé, pour les éléments de $\mathcal{G}(\Omega^c)$, comme on l'a fait pour les éléments des espaces $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ [2], on peut aussi trouver une représentation canonique en fonction des éléments $\frac{1}{\widehat{z-\xi}} \in \mathcal{G}(\Omega^c)$, $\xi \in \Omega$, en termes de la structure vectorielle topologique de $\mathcal{G}(\Omega^c)$. En effet, étant donné $\widehat{\psi} \in \mathcal{G}(\Omega^c)$, s'il admet un représentant ψ qui est holomorphe dans un certain $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$, on peut écrire

3.4.1. $$\widehat{\psi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{z} - \xi}\, d\xi \ .$$

Cette expression et les résultats antérieurs nous permettent donc d'énoncer la proposition

3.4.2 Proposition. *Considérant un espace localement convexe* $\mathbf{E}$*, séparé et semi-complet, il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues* F *de* $\mathcal{G}(\Omega^c)$ *dans* $\mathbf{E}$ *et les fonctions* $u(\widehat{\lambda})$*, à valeurs dans* $\mathbf{E}$*, définies et holomorphes dans* Ω*. La correspondance est donnée par les formules réciproques*

3.4.3. $$u(\lambda) = F\Big(\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}\Big), \quad \forall\, \lambda \in \Omega \ ,$$

et

3.4.4. $$F(\widehat{\psi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \psi(\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,, \quad \forall\, \widehat{\psi} \in \mathcal{G}(\Omega^c) \ ,$$

où k *est un nombre naturel tel que* $\widehat{\psi}$ *admet un représentant* ψ *qui est une fonction définie et holomorphe dans* $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$*.*

Ces résultats sont tout à fait semblables aux résultats énoncés dans I.2.8.2 de [2]. Il est donc naturel de dénommer chacune de ces fonctions $u(\widehat{\lambda})$ donnée par 3.4.3, l'indicatrice de l'application $F \in \mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$. L'ensemble des indicatrices $u(\widehat{\lambda})$ muni de la structure vectorielle usuelle est donc un espace vectoriel isomorphe de $\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$. Nous le représentons par $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$. L'application 3.4.3 définit un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$ et $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ que nous désignons encore par J. Si $\mathbf{E} \equiv \mathbb{C}$, alors $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ coincide avec $\mathcal{H}(\Omega)$.

3.5. Pour définir une topologie sur $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$, nous considérons une base $\mathcal{B}$ des semi-normes continues pour la topologie de $\mathbf{E}$, et pour tout $p \in \mathcal{B}$, nous représentons par p_k, $k = 1, 2, ...$, les semi-normes données sur $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ par

3.5.1. $$p_k(u) = \sup_{\lambda \in \mathbf{C}_k} p[u(\lambda)]\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E}) \ .$$

Ces semi-normes définissent une topologie localement convexe et séparée sur $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$, que nous désignons par τ. À son sujet on peut énoncer la proposition

3.5.2 Proposition. *L'isomorphisme* $J\colon \mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}] \to \mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ *(donné par 3.4.3) est bicontinu si l'on suppose que ces espaces sont munis respectivement de* *la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{G}(\Omega^c)$ et de la topologie τ.*

Démonstration: Pour tout $p \in \mathcal{B}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, désignons par $\mathbf{U}_k^p$ l'ensemble

$$\mathbf{U}_k^p = \Big\{ u \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})\colon\ p_k(u) \le 1 \Big\}\ .$$

Celà posé, considérons un voisinage $\gamma \mathbf{U}_k^p$ ($\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, $p \in \mathcal{B}$ et $k \in \mathbb{N}$) du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$. Alors, étant donnés l'ensemble $\mathbf{B} = \{\widehat{\frac{1}{z-\lambda}} \in \mathcal{G}(\Omega^c)\colon\ \lambda \in \mathbf{C}_k\}$, borné dans $\mathcal{G}(\Omega^c)$, et le voisinage $\mathbf{U} = \{v \in \mathbf{E}:\ p(v) \le |\gamma|\}$ du zéro dans $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathbf{V} = \{F \in \mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]:\ F(\mathbf{B}) \subset \mathbf{U}\}$ est aussi un voisinage du zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$.

Supposons maintenant que $F \in \mathbf{B}$. Ceci veut dire que $F(\mathbf{B}) = \{F(\widehat{\frac{1}{z-\lambda}}):\ \lambda \in \mathbf{C}_k\} = \{u(\lambda)\colon \lambda \in \mathbf{C}_k\}$, où $u = J(F)$, est contenu dans $\mathbf{U}$, et par conséquent

$$p[u(\lambda)] \le |\gamma|\,, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbf{C}_k\ .$$

C'est-à-dire, $p_k(u) \le |\gamma|$ et $u \in \gamma\, \mathbf{U}_k^p$. J est continu.

Réciproquement, considérons un voisinage du zéro dans $\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]$ donné par $\mathbf{V} = \{F \in \mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c), \mathbf{E}]:\ F(\mathbf{B}) \subset \mathbf{U}\}$ où $\mathbf{B}$ est une partie bornée de $\mathcal{G}(\Omega^c)$ et $\mathbf{U} = \{v \in \mathbf{E}\colon\ p(v) \le |\gamma|\}$, $p \in \mathcal{B}$, $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$ est un voisinage du zéro dans $\mathbf{E}$. Étant donné que $\mathbf{B}$ est borné dans $\mathcal{G}(\Omega^c)$, les représentants de ses éléments sont des fonctions uniformément bornées sur un certain ensemble (3.3.2) $\overline{\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$|\psi(\lambda)| \le M\,, \qquad \forall\, \lambda \in \overline{\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k} \ \text{ et }\ \forall\, \widehat{\psi} \in \mathbf{B}\ ,$$

où M est un réel positif et ψ désigne un représentant de $\widehat{\psi}$ pour tout $\widehat{\psi}$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ et tout $\widehat{\psi} \in \mathbf{B}$, on vérifie

$$p\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \psi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\bigg) \le \frac{1}{2\pi}\, M\, p_k(u)\, |\Gamma_k|\ ,$$

où $|\Gamma_k|$ désigne la longueur de Γ_k. Il en résulte donc que si $p_k(u) \le \frac{2\pi|\gamma|}{M|\Gamma_k|}$, on a $p[F(u)] \le |\gamma|$ où $F = J^{-1}(u)$. C'est-à-dire, si $|\beta| < \frac{2\pi|\gamma|}{M|\Gamma_k|}$ on a $J^{-1}[\beta\, \mathbf{U}_k^p] \subset \mathbf{V}$. J^{-1} est donc continu. ∎

4. Nous démontrons maintenant quelques propriétés de l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\Omega)$ (où Ω est encore un ouvert dans $\widetilde{\mathbb{C}}$) dans un espace vectoriel topologique (e.v.t.) $\mathbf{E}$ que nous supposons *dénombrablement normé complet* [1]. À cet effet, désignons par $(\|\cdot\|_r)$ une suite non décroissante de normes concordantes qui définit la topologie de $\mathbf{E}$, et par $\mathbf{E}_r$, $r \in \mathbb{N}$, le complété de $\mathbf{E}$ pour la norme $\|\cdot\|_r$ [1, p. 55].

4.1. Par la suite, en représentant par $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ l'espace referé ci-dessus des applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathbf{E}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$, nous énonçons d'abord quelques propriétés des parties bornées de cet espace:

4.1.1 Proposition. *Si $\mathbf{A} \subset \mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ est une partie bornée, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage $\mathbf{U}$ du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$ tel que $\mathbf{A}$ est uniformément borné sur $\mathbf{U}$ pour la norme $\|\cdot\|_r$.*

Démonstration: À cet effet considérons un système fondamental $\mathbf{U}_1 \supset \mathbf{U}_2 \supset \ldots$ de voisinages du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$. Si la proposition n'est pas vraie pour un certain $s \in \mathbb{N}$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ il éxiste un élément $u^r \in \mathbf{U}_r$ et une application $F_r \in \mathbf{A}$ tels que $\|F_r(u^r)\|_s > r$. Mais la suite (u^r) étant bornée, l'ensemble $\{\|F_r(u^r)\|_s : r \in \mathbb{N}\}$ est uassi borné, ce qui contredit les inégalités antérieures. ∎

Mais étant donné que les ensembles $\{u \in \mathcal{H}(\Omega) \colon p_k(u) < \delta\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, forment un système fondamental de voisinages du zéro dans $\mathcal{H}(\Omega)$, si $\mathbf{A}$ est une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, pour toute la norme $\|\cdot\|_r$ il existe un $k \in \mathbb{N}$ et un réel $\delta > 0$, tels que $\mathbf{A}$ est uniformément bornée sur $\{u \in \mathcal{H}(\Omega) \colon p_k(u) < \delta\}$ pour la norme $\|\cdot\|_r$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe donc un $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ tel que toute application $F \in \mathbf{A}$ admet un prolongement F^{kr} qui est une application linéaire continue de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans $\mathbf{E}_r$ au sens de la norme usuelle de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$. On peut donc énoncer la proposition:

4.1.2 Proposition. *Pour qu'une partie $\mathbf{A} \subset \mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ soit bornée il faut — et il suffit — que pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe un $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ tel que tous les éléments $F \in \mathbf{A}$ admettent des prolongements F^{kr} à $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ qui sont des applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans $\mathbf{E}_r$ ces prolongements formant une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$ pour la norme de cet espace.*

En ce qui concerne les limites des suites, on peut aussi énoncer:

4.1.3 Proposition. *Une suite (F_ν) converge vers F dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, si — et seulement si — pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que: $F_1^{kr}, F_2^{kr}, \ldots$ et F^{kr} sont des prolongements possibles de respectivement $F_1, F_2, \ldots$ et F à $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ comme applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans $\mathbf{E}_r$ ces prolongements constituant une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$ (pour la norme de cet espace); quel que soit $u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$, on a $\lim_{\nu\to\infty} \|F_\nu^{kr}(u) - F^{kr}(u)\|_r = 0$.*

Démonstration: Si la suite (F_ν) converge vers F dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, elle est bornée et en conséquence de la proposition antérieure il découle que pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que les prolongements $F_1^{kr}, F_2^{kr}, \ldots$ et F^{kr} sont possibles et constituent une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$. Supposons maintenant que pour un de ces couples (k,r), il y avait un $u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ tel que on n'ait pas $\lim_{\nu\to\infty} \|F_\nu^{kr}(u) - F^{kr}(u)\|_r = 0$ (u ne peut pas appartenir à $\mathcal{H}(\Omega)$). Alors, il y aurait une sous-suite $(F_{\nu_j}^{kr})$ et un réel positif δ tels que $\|F_{\nu_j}^{kr}(u) - F^{kr}(u)\|_r > \delta$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$. Considérons maintenant une suite (u^l) dans $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que $p_k(u^l - u) < \frac{1}{4lM}$, où M désigne un majorant des normes dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$ des applications considérées. En outre, pour tout $l \in \mathbb{N}$, considérons un ordre ν_{j_l} tel que $\|F_{\nu_j}^{kr}(u^l) - F^{kr}(u^l)\|_r < \frac{1}{2lM}$, $\forall\, j \geq j_l$. Il en résulte donc que

$$\|F_{\nu_{j_l}}^{kr}(u) - F^{kr}(u)\|_r \leq \|(F_{\nu_{j_l}}^{kr} - F^{kr})(u^l)\|_r + \|(F_{\nu_{j_l}}^{kr} - F^{kr})(u - u^l)\|_r \leq \frac{1}{l}\ ,$$

quel que soit $l \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse $\|F_{\nu_j}^{kr}(u) - F^{kr}(u)\|_r > \delta$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer la proposition réciproque, il suffit de constater que, si pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés énoncées, la suite (F_v) converge vers F, d'acord avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties finies de $\mathcal{H}(\Omega)$; et donc, cet espace étant parfait (1.2.3), d'acord avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de cet espace (théorème de Banach–Steinhaus). ∎

4.1.4 Proposition. *Pour qu'une suite (F_ν) soit convergeante dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ pour F, il faut et il suffit que pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que: les applications $F_1, F_2, \ldots$ et F admettent des prolongements $F_1^{kr}, F_2^{kr}, \ldots$ et F^{kr} qui sont des applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans $\mathbf{E}_r$; la suite (F_ν^{kr}) converge vers F^{kr} au sens de la norme usuelle de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$.*

Démonstration: Nous démontrons d'abord la condition nécéssaire.

Si la suite (F_ν) converge vers F dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, elle est bornée. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe donc (4.1.2) un $k \in \mathbb{N}$ tel que les prolongements $F_1^{kr}, F_2^{kr}, \ldots$ et F^{kr} des applications $F_1, F_2, \ldots$ et F forment un ensemble borné. Voyons que la suite (F_ν^{kr}) converge vers F^{kr} uniformément sur la boule unité de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_{k+1})$ au sens de la norme $\|\cdot\|_r$ et de même pour la suite $(F_\nu^{k+1,r})$ qui converge vers $F^{k+1,r}$.

En effet, si ce n'était pas vrai, il y aurait un réel $\delta > 0$, une suite (u^s) d'éléments de la boule referée ci-dessus de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_{k+1})$ et une sous-suite $(F_{\nu_s}^{kr})$ tels que

$$\|F_{\nu_s}^{kr}(u^s) - F^{kr}(u^s)\|_r > \delta\,, \qquad \forall\, s \in \mathbb{N}\ .$$

Mais l'ensemble des u^s étant relativement compact dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ il admet un point limite $u \in \mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ d'acord avec la topologie de cet espace. Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que $(u^s) \to u$ dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$. Alors, considérant

$$\begin{aligned}\|F^{kr}_{\nu_s}(u^s) - F^{kr}(u^s)\|_r \leq \|F^{kr}_{\nu_s}(u^s) - F^{kr}_{\nu_s}(u)\|_r + \|F^{kr}_{\nu_s}(u) - F^{kr}(u)\|_r \\ + \|F^{kr}(u) - F^{kr}(u^s)\|_r\end{aligned}$$

de la proposition antérieure il découle que

$$\lim_{s\to\infty} \|F^{kr}_{\nu_s}(u^s) - F^{kr}(u^s)\|_r = 0$$

ce qui contredit l'hypothèse antérieure et démontre la proposition.

Pour démontrer la condition suffisante, c'est assez de remarquer que, si pour tout $r \in \mathbb{N}$, la suite (F^{kr}_ν) des prolongements converge vers F^{kr}, la suite (F_ν) converge vers F au sens de la topologie de la convergence uniforme sur les parties finies de $\mathcal{H}(\Omega)$; et donc, cet espace étant parfait (1.2.3), au sens de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}(\Omega)$ (théorème de Banach–Steinhaus). ∎

4.2. En représentant encore par Ω^c le complémentaire de Ω dans $\widetilde{\mathbb{C}}$, en supposant que $\mathbf{E}$ est un espace dénombrablement normé complet dont la topologie est définie par la suite $(\|\cdot\|_r)$ non décroissante de normes concordantes et en désignant par $\mathbf{E}_r$ le complété de $\mathbf{E}$ pour la norme $\|\cdot\|_r$ (pour tout $r \in \mathbb{N}$), nous définissons l'espace vectoriel complexe $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$ de la façon suivante:

4.2.1. On considère l'ensemble des fonctions $\phi(\widehat{\lambda})$ définies dans un voisinage de Ω^c, à valeurs dans un des espaces $\mathbf{E}_r$ qui vérifient la propriété suivante: Pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c tel que la restriction de ϕ à ce voisinage est une fonction à valeurs dans $\mathbf{E}_r$, holomorphe dans cet ensemble (au sens de la topologie de $\mathbf{E}_r$); si $\infty \in \Omega^c$, elle satisfait encore la relation $\phi(\infty) = 0$;

4.2.2. On identifie deux de ces fonctions lorsque leurs restrictions coincident sur un voisinage de Ω^c;

4.2.3. On munit de la structure vectorielle usuelle l'ensemble des classes de fonctions obtenues de cette façon.

Dans ce qui va suivre nous désignerons par $\widehat{\phi}$ la classe de la fonction ϕ.

À son sujet, on peut énoncer les propriétés suivantes:

4.2.4 Proposition. *Étant donné un représentant ϕ d'un élément $\widehat{\phi}$ de $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$ défini dans un $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ et à valeurs dans un $\mathbf{E}_r$, r et k appartenant à $\mathbb{N}$, pour tout $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, la valeur de l'integrale*

4.2.5. $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda$$

est un élément de $\mathbf{E}$*, le même pour tous les représentants de* $\widehat{\phi}$ *et indépendant de l'espace* $\mathbf{E}_r$ *considéré.*

Démonstration: $\phi(\widehat{\lambda})$ étant définie et continue pour la topologie de $\mathbf{E}_r$, la fonction integrande de 4.2.5 pour tout $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ est aussi continue; l'integrale existe donc et c'est un élément de $\mathbf{E}_r$.

Étant donné un autre $\mathbf{E}_s$, $s \in \mathbb{N}$, d'accord avec 4.2.1 il existe un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_j$ de Ω^c contenu dans l'antérieur et tel que la restriction de ϕ à ce voisinage-là est une fonction à valeurs dans $\mathbf{E}_s$ et holomorphe. Le cycle Γ_j est contenu dans ce voisinage et la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda$$

est évidemment la même, calculée dans $\mathbf{E}_r$ ou dans $\mathbf{E}_s$. En outre, de 1.2.1 il résulte que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\ .$$

Et cete égalité étant vraie quel que soit l'espace $\mathbf{E}_s$, on peut conclure que la valeur commune de ces intégrales appartient à tous les $\mathbf{E}_s$, étant par conséquent un élément de $\mathbf{E}$.

En considérant maintenant un autre représentant ψ du même élément $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$, il existe un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_l$ de Ω^c contenu dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ tel que sur ce voisinage-là on a $\phi(\lambda) = \psi(\lambda)$ (propriété 4.2.2). Alors on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} \psi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_l} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\ ,$$

c'est-à-dire, la valeur de l'intégrale 4.2.5 est indépendante du représentant ϕ et du cycle Γ_k utilisés. ∎

4.2.6 Proposition. *ϕ étant un représentant d'un élément $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$ défini dans un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c, l'application F de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans $\mathbf{E}$ donnée par*

4.2.7. $$F(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)$$

est linéaire et continue, c'est-à-dire, elle est un élément de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$.

La démonstration de cette proposition est immédiate.

4.2.7 Proposition. *F étant une application linéaire continue de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans* $\mathbf{E}$*, et $\{F^{kr}\}$ un ensemble de prolongements linéaires continus possibles de F*

(proposition 4.1.1), les fonctions ϕ_{kr} données dans les voisinages de Ω^c par les égalités

4.2.8. $$\phi_{kr}(\lambda) = F^{kr}\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right)$$

sont des représentants d'un même élément $\widehat{\phi}$ de $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$.

Note: *Pour tout k et tout $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$, $\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}$ est un élément de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$.*

Démonstration: En effet, si $\infty \in \Omega^c$, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} F^{kr}\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right) = 0$$

quels que soient k et r.

En outre, si F^{kr} et F^{js} sont deux des prolongements possibles de F, ils coincident dans l'intersection de leurs domaines, ce qui entraîne $F^{kr}(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}) = F^{js}(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda})$ pour tout λ tel que $\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}$ appartient à cette intersction-là. ∎

4.2.9 Proposition. *ϕ et ψ étant des représentants de deux éléments distincts de $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$, il y a au moins un élément $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda \neq \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \psi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\ ,$$

où Γ_k et Γ_j sont les cycles référés dans 1.2.1 et contenus dans les domaines de définition de ϕ et de ψ respectivement.

Démonstration: Il suffit de considérer dans chaque composante connexe Ω_i^c de Ω^c un point $\alpha_i \in \Omega_i^c$, et les éléments $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ de la forme

$$u(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-\alpha_i)^n}\ ,$$

où $n \in \mathbb{N}$. ∎

4.2.10 Proposition. *Il y a une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow \widehat{\phi}$ entre les applications linéaires continues $F \in \mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ et les éléments $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$, cette correspondance étant donnée par les formules réciproques*

4.2.11. $$\phi(\lambda) = F^{kr}\left(\frac{1}{\widehat{z}-\lambda}\right), \quad \forall\, \lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k\ ,$$

et

4.2.12. $$F(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,$$

où: F^{kr} est un prolongement quelconque possible de F, comme application linéaire continue d'un espace $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans un espace $\mathbf{E}_r$; ϕ est un représentant de $\widehat{\phi}$ défini dans un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c.

Pour démontrer cette proposition il suffit maintenant de vérifier que les formules 4.2.11 et 4.2.12 sont réciproques. L'application $F \to \widehat{\phi}$ donnée par 4.2.11 est évidemment un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ et $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$; dans ce qui va suivre nous la représenterons par J. L'image $J(F)$ donnée par J d'une application F, nous l'appelons encore *l'indicatrice de l'application F*.

4.2.13 Proposition. *Une partie $\mathbf{B}'$ de $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$ est l'image $J(\mathbf{B})$ d'une partie bornée $\mathbf{B}$ de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ si et seulement si elle vérifie la propriété suivante: pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c tel que les éléments $\widehat{\phi} \in \mathbf{B}'$ admettent des représentants ϕ qui constituent un ensemble de fonctions uniformément bornées pour la norme $\|\cdot\|_r$ sur $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$.*

Démonstration: Nous démontrons d'abord que si $\mathbf{B}' \subset \mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})$ vérifie la propriété énoncée dans la proposition, son image $J^{-1}(\mathbf{B}')$ est bornée dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, c'est-à-dire, elle est uniformément bornée sur toute la partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$; par conséquent, quels que soient $r \in \mathbb{N}$ et la partie bornée $\mathbf{A}$ de $\mathcal{H}(\Omega)$, l'ensemble $\{\|F(u)\|_r \colon F \in J^{-1}(\mathbf{B}');\ u \in \mathbf{A}\}$ est borné.

En effet, $\mathbf{A}$ étant une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ et étant donnés $r \in \mathbb{N}$ et le voisinage correspondant $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c référés dans la proposition, il y a deux réels positifs M_k et A_r tels que

$$|u(\lambda)| < M_k \quad \text{quels que soient} \;\; u \in \mathbf{A} \;\; \text{et} \;\; \lambda \in \mathbf{C}_{k+1}$$

et

$$\|\phi(\lambda)\|_r < A_r \quad \text{quels que soient} \;\; \widehat{\phi} \in \mathbf{B}' \;\; \text{et} \;\; \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k \ ,$$

où ϕ, pour tout $\widehat{\phi}$, désigne le représentant correspondant. Mais ceci entraîne que, pour tout $F = J^{-1}(\widehat{\phi})$, $\widehat{\phi} \in \mathbf{B}'$, et tout $u \in \mathbf{A}$, on a

$$\|F(u)\|_r = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \phi(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda \right\|_r \leq \frac{|\Gamma_k|}{2\pi} M_k\, A_r$$

comme on voulait le démontrer.

Pour démontrer la proposition réciproque considérons une partie bornée $\mathbf{B}$ de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$. Nous savons donc que pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble des prolongements F^{kr} des éléments $F \in \mathbf{B}$, comme applications linéaires continues de $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ dans $\mathbf{E}_r$, est borné dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_r]$. Mais l'ensemble $\{\frac{1}{\widehat{z-\lambda}} :\ \lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}\}$ étant borné dans $\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$, il en découle que

$\{F^{kr}(\frac{1}{z-\lambda})\colon F \in \mathbf{B}; \lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}\}$ est borné dans $\mathbf{E}_r$. C'est-à-dire, les indicatrices des éléments F de $\mathbf{B}$ admettent des représentants $F^{kr}(\frac{1}{z-\lambda})$ qui constituent un ensemble de fonctions uniformément bornées pour la norme $\|\cdot\|_r$ sur $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_{k+1}$, comme on voulait le démontrer. ∎

De la même façon on peut encore démontrer la proposition:

4.2.14 Proposition. *Une suite (F_n) converge vers F dans $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$, si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe un voisinage $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{C}_k$ de Ω^c et des représentants $\phi_1, \phi_2, \ldots\ \phi$ des indicatrices de $F_1, F_2, \ldots\ F$ respectivement, tels que la suite (ϕ_n) converge uniformément vers ϕ sur ce voisinage-là au sens de la norme $\|\cdot\|_r$.*

En particulier, si $\mathbf{E}$ coincide avec le plan complexe, $\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbb{C})$ est isomorphe au dual de $\mathcal{H}(\Omega)$. Il est donc un espace de Silva parfait.

II – Quelques applications au calcul symbolique

1. Nous présentons ensuite quelques applications des résultats obtenus.

1.1. Considérons d'abord l'espace $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire, l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ où Ω coincide avec $\mathbb{C}$ et $\Omega^c = \{\infty\}$. Muni de la topologie définie par la suite $(\|\cdot\|_k)$ de normes concordantes données par I.2.1.2, il devient un espace dénombrablement normé complet et parfait au sens de Guelfand. Son dual fort, qui peut être identifié à $\mathcal{G}(\{\infty\})$, est à son tour, un espace de Silva parfait (II.1.2.1 de [2]). Les éléments de ce dual sont les classes (I.3.2) de fonctions $\psi(\lambda)$ définies dans un voisinage de ∞ (et telles que $\psi(\infty) = 0$) qui résultent d'identifier deux de ces fonctions lorsqu'elles coincident dans un voisinage de ∞. Il peut être aussi identifié au quotient $\mathcal{U}(\mathcal{V}_\infty)/\mathcal{P}$ où $\mathcal{V}_\infty$ désigne le filtre des voisinages de ∞ (le point ∞ étant exclu dans chaque voisinage), et $\mathcal{P}$ le sous-espace des polynômes, et par conséquent identifié à l'espace $\mathbf{U}_c$ des ultradistributions à support compact [5, p. 83].

1.2. Nous avons dit que $\mathbf{U}_c$ peut être identifié à l'espace $\mathcal{G}(\{\infty\})$. De la proposition I.3.4.2 il résulte donc que l'espace des applications linéaires continues de $\mathbf{U}_c$ dans un espace $\mathbf{E}$ localement convexe séparé et semi-complet, est isomorphe à $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$, cet isomorphisme étant bicontinu si cet espace est muni d la topologie définie par les semi-normes données par I.3.5.1. C'est-à-dire, les éléments de $\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbf{E})$ sont les indicatrices des applications linéaires continues de $\mathbf{U}_c$ dans $\mathbf{E}$ [5, p. 84].

En particulier, si $\mathbf{E} \equiv \mathbf{U}_c$, les fonctions $u(\widehat{\lambda}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbf{U}_c)$ données par

1.2.1. $$u(\lambda) = \frac{e^{i\theta}}{\widehat{z} - e^{i\theta}\,\lambda}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

(où θ est un réel quelconque) sont les indicatrices des rotations dans $\mathbf{U}_c$. Elles constituent un groupe, comme on peut aisément le vérifier.

En outre, si $\mathbf{E}$ coincide avec l'espace $\mathbf{F}$ des fonctions à "ultrabande" bornée, la fonction $u(\widehat{\lambda}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbf{F})$ donnée par

1.2.2. $$u(\lambda) = \frac{1}{i}\,e^{-i\lambda t}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

est l'indicatrice de l'inverse $\mathbb{F}^{-1}$ de la transformation de Fourier. Et de la même façon la fonction donnée par

1.2.3. $$u(\lambda) = e^{\lambda t}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

est l'indicatrice de l'inverse de la transformation de Laplace. Ces deux applications définissent des isomorphismes bicontinus entre $\mathbf{U}_c$ et l'espace $\mathbf{F}$.

Note: On dit qu'une fonction $f(\widehat{t})$ définie dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est à "ultrabande" bornée lorsqu'il y a un prolongement $f(\widehat{z})$ de cette fonction au plan complexe, comme fonction holomorphe, qui vérifie la propriété suivante: il existe un réel positif α tel que $f(z)/e^{\alpha|z|}$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Elle est evidemment un élément de Λ (espace des distributions de type exponentiel dans $\mathbb{R}$). Les images de Fourier ou de Laplace de ces fonctions sont exactement les ultradistributions à support compact. Par la suite nous supposons que l'espace $\mathbf{F}$ de ces fonctions est muni de l'image donnée par $\mathbb{F}^{-1}$ de la topologie de $\mathbf{U}_c$.

1.3. Il est aisé de vérifier que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(t-k\tau)}{\lambda^{k+1}}$ (où τ est un réel positif) converge dans l'espace vectoriel topologique Λ_0^+ (des distributions définies dans $\mathbb{R}$, nulles à gauche de zéro et du type exponentiel à droite) quel que soit le complexe $\lambda \neq 0$. L'égalité

1.3.1. $$u(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(t-k\tau)}{\lambda^{k+1}}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\ ,$$

définit donc une fonction à valeurs dans Λ_0^+.

En considérant que

1.3.2. $$\mathbb{L}[u(\lambda)] = \frac{1}{e^z - \lambda}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\ ,$$

il en résulte que $u(\widehat{\lambda})$ est une fonction holomorphe dans son domaine de définition et à décroissance presque rapide dans le complémentaire des voisinages du zéro dans $\mathbb{C}$. C'est-à-dire, elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue H de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ dans Λ_0^+ (où $\mathcal{V}_0$ désigne le filtre des voisinages de zéro dans $\mathbb{C}$). Cette application H, comme on peut aisément le démontrer, à $\widehat{\psi} \equiv 1 \in \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ fait correspondre la distribution de Dirac $\delta(t)$ et à $\widehat{\psi} \equiv \widehat{\lambda}$, la distribution $\delta(t-\tau)$. En outre, étant donné un élément $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$, on a

1.3.3. $$H(\widehat{\psi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, \psi^{(k)}(0)\, \delta(t-k\tau) \ ,$$

où ψ est un représentant de $\widehat{\psi}$.

De ces résultats on obtient encore que

1.3.4. $$\mathbb{L}[H(\widehat{\psi})] = \widehat{\psi}(e^{-\widehat{z}}) \ ,$$

ce qui va nous permettre d'affirmer que H est injective.

Dans ce qui va suivre, nous représenterons par Λ_τ l'image donnée par H de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$. Elle est un sous-espace de Λ_0^+, et nous la supposons munie de l'image de la topologie de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$. C'est-à-dire, Λ_τ est un espace de Silva parfait.

1.4. Considérons maintenant la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1}\, \delta(t-k\tau)$, qui converge dans Λ_0^+ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si nous définissons $u(\widehat{\lambda})$ par l'égalité

1.4.1. $$u(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1}\, \delta(t-k\tau)\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

il en résulte que

1.4.2. $$\mathbb{L}[u(\lambda)] = \frac{\lambda}{\lambda\, e^{-z} - 1}\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ .$$

$u(\widehat{\lambda})$ étant donc une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans Λ_0^+, elle est alors l'indicatrice d'une application $\widetilde{H}$ linéaire continue de $\mathbf{U}_c \equiv \mathcal{G}(\{\infty\})$ dans Λ_0^+ (proposition I.3.4.2). Cette application, à $\frac{1}{\widehat{\lambda}^k} \in G(\{\infty\})$ fait correspondre $\delta(t-k\tau)$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

Alors, étant donné que $\mathcal{U}(\mathcal{V}_\infty) = \mathcal{G}(\{\infty\}) \oplus \mathcal{P}$, *on peut prolonger l'application $\widetilde{H}$ à cet espace, en faisant $\widetilde{H}(1) = \delta(t)$ et $\widetilde{H}(\widehat{\lambda}^k) = \delta(t+k\tau)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$*. On obtient une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_\infty)$ dans Λ^+, c'est-à-dire, dans l'espace des distributions (dans $\mathbb{R}$) du type exponentiel à support borné à gauche.

1.5. De même, la fonction $u(\widehat{\lambda})$ donnée par

1.5.1. $$u(\lambda) = \frac{1}{1 - \widehat{z}\, e^{\tau\lambda}}\,, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C} \ ,$$

est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$. Elle définit donc une application linéaire continue G de $\mathbf{U}_c$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ (proposition I.3.4.2).

Cette application n'est pas injective. En effet, on a

1.5.2. $$G\Big(\frac{1}{\widehat{\lambda}-i\frac{\pi}{\tau}}-\frac{1}{\widehat{\lambda}+i\frac{\pi}{\tau}}\Big)=0\ .$$

En outre, elle est surjective. En effet, étant donné $\widehat{\psi}\in\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$, considérons un représentant ψ de cet élément et une circonférence Γ contenue dans le domaine de ψ, centrée sur l'origine de $\mathbb{C}$ et orientée positivement. Alors la fonction ϕ, définie dans un voisinage de ∞ par l'intégrale

1.5.3. $$\phi(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\frac{1}{\xi}}{\lambda+\frac{1}{\tau}\log\xi}\,\psi(\xi)\,d\xi\ ,$$

est un représentant d'un élément $\widehat{\phi}\in\mathcal{G}(\{\infty\})$ (la fonction log est la fonction donnée par $\log\xi=\log|\xi|+i\,\theta$ où $-\pi\le\theta=\arg\xi<\pi$).

Il est aisé maintenant de vérifier que $G(\widehat{\phi})=\widehat{\psi}$, c'est-à-dire qu'étant donné $\widehat{\psi}\in\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ il existe $\widehat{\phi}\in\mathcal{G}(\{\infty\})$ tel que $G(\widehat{\phi})=\widehat{\psi}$. En effet on obtient ce résultat de

1.5.4. $$G\Big(\frac{\frac{1}{\xi}}{\lambda+\frac{1}{\tau}\log\xi}\Big)=\frac{1}{\xi-\widehat{z}}$$

et de 1.5.3.

1.6. La composition des applications linéaires continues $\mathbb{L}:\ \mathbf{F}\to\mathcal{G}(\{\infty\})$, $G:\ \mathcal{G}(\{\infty\})\to\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ et $H:\ \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)\to L_0^+$, permet maintenant de définir une application linéaire continue S_τ de $\mathbf{F}$ (l'espace des fonctions à ultrabande bornée) dans Λ_0^+. Cette application, que nous appelons *échantillonage de periode τ dans* $\mathbf{F}$, à tout $f\in\mathbf{F}$ fait correspondre

1.6.1. $$S_\tau(f)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k\,\tau)\,\delta(t-k\,\tau)$$

(cette série convergeant dans Λ_0^+) ce qui justifie son nom.

Pour vérifier ceci, en désignant par $\widehat{\phi}$ l'image de Laplace d'une fonction $f\in\mathbf{F}$, on obtient

1.6.2. $$\begin{aligned}G[\mathbb{L}(f)]&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\phi(\lambda)}{1-\widehat{z}\,e^{\tau\lambda}}\,d\lambda\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{z}^k\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\phi(\lambda)\,e^{k\tau\lambda}\,d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}f(k\,\tau)\,\widehat{z}^k\ ,\end{aligned}$$

où: ϕ est un représentant de $\widehat{\phi}$; Γ est une circonférence centrée sur l'origine de $\mathbb{C}$, contenue dans le domaine de ϕ et orientée positivement; la série converge dans $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$. Et, H étant continu si on le considere comme application de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ dans Λ_0^+, il en résulte que la série 1.6.1 est convergeant dans cet espace.

En outre, les applications $\mathbb{L} : \mathbf{F} \to \mathcal{G}(\{\infty\})$, $G : \mathcal{G}(\{\infty\}) \to \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ et $H : \mathcal{U}(\mathcal{V}_0) \to \Lambda_\tau$ étant surjectives, il en résulte que $S_\tau = H \circ G \circ \mathbb{L}$ est une application surjective de $\mathbf{F}$ dans Λ_τ, ce qui signifie que: *étant donnée une suite* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$ *de complexes telle que* $\limsup \sqrt[k]{|\alpha_k|} < \infty$, *il y a au moins une fonction* f *dans* $\mathbf{F}$ *telle que*

1.6.3. $$f(k\,\tau) = \alpha_k$$

quel que soit k.

1.7. Étant donné un élément $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\{\infty\})$, il est aisé de voir que la fonction $u(\widehat{\lambda})$, à valeurs dans $\mathcal{G}(\{\infty\})$ et définie dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \{0\}$ par l'égalité

1.7.1. $$u(\lambda) = \widehat{\phi}(\lambda\, z)\ ,$$

est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ dans $\mathcal{G}(\{\infty\})$.

Et de même, étant donné un élément $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$, la fonction $v(\widehat{\lambda})$, à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ et donnée dans $\mathbb{C}$ par

1.7.2. $$v(\lambda) = \widehat{\psi}(\lambda\,\widehat{z})$$

est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{G}(\{\infty\})$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$.

Les cas où les éléments $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\psi}$ sont representés par la fonction $\frac{1}{1-\widehat{z}}$, définie respectivement dans un voisinage de l'infini et du zéro de $\widetilde{\mathbb{C}}$, sont des exemples de ce type. Les fonctions $u(\widehat{\lambda})$ et $v(\widehat{\lambda})$ données par

1.7.3. $$u(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda\,\widehat{z}}\,, \qquad \forall\,\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - \{0\}\ ,$$

et

1.7.4. $$v(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda\,\widehat{z}}\,, \qquad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

sont maintenant les indicatrices de deux applications réciproques. Elles sont des isomorphismes bicontinus entre les espaces $\mathcal{G}(\{\infty\})$ et $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$. Nous les représentons par P et P^{-1} respectivement.

Si on effectue maintenant les produits $H \circ P \circ \mathbb{L} = Q$ et $\mathbb{L}^{-1} \circ P^{-1} \circ H^{-1} = Q^{-1}$, on obtient évidemment deux isomorphismes (réciproques) entre les espaces $\mathbf{F}$ et Λ_τ, bicontinus si Λ_τ est muni de l'image donnée par H de la topologie de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$.

Pour tout $f \in \mathbf{F}$, l'application Q vérifie les égalités

1.7.5. $$Q(f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\,\delta(t - k\,\tau)$$

et

1.7.6. $$Q(Df) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k+1)}(0)\,\delta(t - k\,\tau)\ .$$

En outre on a

1.7.7. $$Q\Big[\int_0^t f(\xi)\,g(t-\xi)\,d\xi\Big] = \delta(t-\xi) * Q(f) * Q(g)\ ,$$

quels que soient f et g appartenant à $\mathbf{F}$.

Ces résultats permettent de *transformer quelques équations differentielles dans* $\mathbf{F}$ *en équations de convolution dans* Λ_τ.

1.8. Étant donné un réel $\rho \geq 0$, nous désignons par $\mathbf{F}_\rho$ l'espace des fonctions complexes $f(\widehat{t})$ définies dans $\mathbb{R}$ et qui admettent des prolongements analytiques $f(\widehat{z})$ au plan complexe, vérifiant la propriété suivante: $f(z)/e^{\alpha|z|}$ *est bornée sur* $\mathbb{C}$, *quel que soit le réel* $\alpha > \rho$.

Ces prolongements permettent d'introduire dans $\mathbf{F}_\rho$ la suite $(\|\cdot\|_r)$ de normes données par

1.8.1. $$\|f\|_r = \sup_{z\in\mathbb{C}} \Big| f(z)/e^{(\rho+\frac{1}{r})|z|}\Big|\,, \qquad \forall\, f \in \mathbf{F}_\rho\ .$$

Ces normes sont concordantes, et $\mathbf{F}_\rho$, muni de la topologie définie par elles, devient un espace dénombrablement normé complet.

Concernant ces espaces on peut énoncer les propositions:

1.8.2 Proposition. *La transformation de Laplace définit un isomorphisme bicontinu entre* $\mathbf{F}_\rho$ *et* $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ *(où* $\mathbf{V}_\rho = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| \leq \rho\}$*).*

Démonstration: Nous démontrons d'abord que les images inverses $\mathbb{L}^{-1}(u)$ des éléments $u \in \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ appartiennent à $\mathbf{F}_\rho$.

En effet, si $u \in \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ et

$$f(t) = \mathbb{L}^{-1}(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\lambda)\,e^{\lambda t}\,d\lambda$$

(où Γ est une circonférence quelconque, centrée sur l'origine de $\mathbb{C}$, orientée positivement et contenue dans $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho$) la fonction $f(\widehat{z})$, donnée par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u(\lambda)\,e^{\lambda z}\,d\lambda\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\ ,$$

est évidemment un prolongement analytique de $f(\widehat{t})$; et ce prolongement est tel que $|f(z)/e^{\alpha|z|}|$ est borné sur $\mathbb{C}$ quel que soit le réel $\alpha > \rho$.

En outre, la fonction $e^{\lambda t}$ étant un élément de $\mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho, \mathbf{F}_\rho)$, il en découle qu'elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ dans $\mathbf{F}_\rho$.

Réciproquement, si $f \in \mathbf{F}_\rho$ elle admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \, z^n \ .$$

Mais, étant donné que pour tout $\alpha > \rho$ il existe un réel $A(\alpha) > 0$ tel que $|f(z)/e^{\alpha|z|}| < A(\alpha)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, on peut conclure que pour tout réel $r > 0$, on a

$$|\mu_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \frac{A(\alpha)\, e^{\alpha r}}{r^n} \ , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

En particulier, pour $r = \frac{n}{\alpha}$ on a

$$|\mu_n| \leq \frac{A(\alpha)}{(\frac{n}{\alpha})^n} \, e^n \ .$$

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \, \frac{\mu_n}{\lambda^{n+1}}$$

converge donc quel que soit $|\lambda| > \alpha$. Et α étant un réel quelconque plus grand que ρ, on peut conclure que cette série converge quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \rho$; elle converge uniformément sur tout le compact de $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho$, et par conséquent dans $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ vers un certain élément $u(\widehat{\lambda})$ de cet espace. Finalement, $\mathbb{L}^{-1}$ étant continue, on peut obtenir

$$\mathbb{L}^{-1}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \, \mathbb{L}^{-1}\Big(\frac{n!}{\lambda^{n+1}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \, t^n = f(t) \ .$$

Et de même la proposition

1.8.3 Proposition. *La transformation de Fourier définit un isomorphisme bicontinu entre $\mathbf{F}_\rho$ et $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$.*

1.9. Considérons maintenant deux espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et $\mathcal{H}(\Delta)$ où Ω et Δ sont des ensembles ouverts dans $\widetilde{\mathbb{C}}$ tels que $\Omega^c = \widetilde{\mathbb{C}} - \Omega$ et $\Delta^c = \widetilde{\mathbb{C}} - \Delta$ sont connexes et bornés dans $\mathbb{C}$. Au sujet de ces espaces on peut énoncer:

1.9.1 Proposition. *S'il existe une application conforme injective $\gamma(\widehat{\lambda})$ d'un voisinage de Ω^c sur un voisinage de Δ^c, telle que $\gamma(\Omega^c) = \Delta^c$, alors les espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et $\mathcal{H}(\Delta)$ sont isomorphes.*

Démonstration: Pour le démontrer il suffit de vérifier que les applications $F\colon \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Delta)$ et $F^*\colon \mathcal{H}(\Delta) \to \mathcal{H}(\Omega)$, dont les indicatrices sont respectivement $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\Omega^c, \mathcal{H}(\Delta))$ et $\widehat{\psi} \in \mathcal{G}(\Delta^c, \mathcal{H}(\Omega))$ données par

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\widehat{\lambda} - \gamma(\xi)} \qquad \text{(sur un voisinage de } \Omega^c)$$

et

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\widehat{\lambda} - \gamma^{-1}(\xi)} \qquad \text{(sur un voisinage de } \Delta^c)$$

étant linéaires et continues, sont aussi réciproques; c'est-à-dire, les indicatrices des compositions $F^*\circ$ et $F \circ F^*$ sont les fonctions données par $\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}$ sur les voisinages de respectivement Ω^c et Δ^c. ∎

1.9.2 Proposition. *Dans les conditions de la proposition antérieure, si* 0 *n'appartient pas à Δ^c, les applications F et F^* dont les indicatrices sont respectivement $\widehat{\phi} \in \mathcal{G}(\Omega^c, \mathcal{H}(\Delta))$ et $\widehat{\psi} \in \mathcal{G}(\Delta^c, \mathcal{H}(\Omega))$, données à leur tour par*

1.9.3. $$\phi(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{\gamma(\xi) - \widehat{\lambda}} \qquad \textit{(sur un voisinage de } \Omega^c\textit{)}$$

et

1.9.4. $$\psi(\xi) = -\frac{1}{\xi}\,\frac{1}{\widehat{\lambda} - \gamma^{-1}(\xi)} \qquad \textit{(sur un voisinage de } \Omega^c\textit{)}$$

sont des applications réciproques et, par conséquence, des isomorphismes bicontinus.

Démonstration: Pour le démontrer il suffit de vérifier que les indicatrices des compositions $F^* \circ F$ et $F \circ F^*$ sont les fonctions données par $\frac{1}{\xi - \widehat{\lambda}}$ sur les voisinages de Ω^c et Δ^c respectivement. ∎

Une application de ces résultats découle de faire $\Omega^c = \mathbf{V}_\rho = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| \leq \rho\}$ (ρ étant un réel non négatif), $\gamma(\lambda) = e^{-\tau\lambda}$ (où τ est un réel positif tel que $\rho\tau < \pi$). En ce cas les éléments $\widehat{\phi}$ et $\widehat{\psi}$ de $\mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho, \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}))$, donnés par

1.9.5. $$\phi(\xi) = \frac{1}{\widehat{\lambda} - e^{-\tau\xi}}$$

et

1.9.6. $$\psi(\xi) = \frac{1}{1 - \widehat{\lambda}\, e^{\tau\xi}}$$

sur un voisinage de $\mathbf{V}_\rho$, sont les indicatrices d'isomorphismes bicontinus entre $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ et $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$. Dans ce qui va suivre nous désignons par G l'application définie par 1.9.6.

Alors, étant donné qu'on peut identifier $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ au sous-espace de $\mathcal{G}(\{\infty\})$ des ultradistributions à support dans $[-\rho, \rho]$ et que tout élément de $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$, est à son tour une fonction holomorphe dans un voisinage de zéro (et nous pouvons donc l'identifier à un élément de $\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$) il en résulte que l'application G donnée par 1.9.6, peut être considerée comme la restriction à $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ de l'application donnée par 1.5.1. Et de même, nous pouvons considérer la restriction à $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$ de l'application H donnée par 1.3.3.

Alors les applications $\mathbb{L}\colon \mathbf{F}_\rho \to \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$, $G\colon \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho) \to \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$ et $H\colon \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}) \to \Lambda_\tau$ étant injectives, il en résulte que $S_\tau = H \circ G \circ \mathbb{L}$ est aussi une application injective de $\mathbf{F}_\rho$ dans Λ_τ. Cette application est évidemment la restriction à $\mathbf{F}_\rho$ de l'opérateur échantillonnage de periode τ défini dans 1.6.1.

Si maintenant nous considérons le sous-espace $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$ de Λ_τ muni de l'image de la topologie de $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$ donnée par H, il en résulte que S_τ est un isomorphisme bicontinu.

1.9.7 Proposition. *Si $\rho\tau < \pi$ et $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$ est muni de la topologie définie ci-dessus, l'opérateur échantillonnage S_τ définit un isomorphisme bicontinu entre $\mathbf{F}_\rho$ et $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$.*

Ce résultat peut être considéré une généralisation du théorème de Shannon [6].

2. Nous pouvons maintennt appliquer les résultats obtenus pour établir le calcul symbolique relatif à l'opérateur dérivation D dans les espaces $\mathbf{F}_\rho$ (des fonctions à "ultrabande" contenue dans $\mathbf{V}_\rho$) $\rho \geq 0$, et de même, à l'opérateur T défini dans les espaces $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$ par

$$T\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, \delta(\hat{t} - k\,\tau)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} \, \delta(\hat{t} - k\,\tau)$$

lorsque $\rho\tau < \pi$. Ces résltats vont nous permettre d'établir une correspondance biunivoque entre les systèmes analogiques et les systèmes discrets.

2.1. Nous considérons d'abord l'opérateur dérivation D dans un espace $\mathbf{F}_\rho$ ($\rho \geq 0$). Étant donné que la transformation de Laplace $\mathbb{L}$ définit un isomorphisme bicontinu entre $\mathbf{F}_\rho$ et $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ (1.8.2), il est aisé de vérifier qu'à l'opérateur dérivation dans $\mathbf{F}_\rho$ la transformation $\mathbb{L}$ fait correspondre l'opérateur dans

$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)$ dont l'indicatrice (I.4.2.10) est $\widehat{\phi}\in\mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho,\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho))$ donnée par

2.1.1.
$$\phi(\xi)=\frac{\xi}{\xi-\widehat{\lambda}}$$

cete fonction étant définie dans un voisinage de $\mathbf{V}_\rho$.

De même, à l'opérateur $\frac{1}{D-\alpha}$ (où α est un complexe quelconque appartenant à $\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho$), $\mathbb{L}$ fait correspondre l'opérateur dans $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)$ dont l'indicatrice $\widehat{\psi}_\alpha\in\mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho,\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho))$ est donnée par

2.1.2.
$$\psi_\alpha(\xi)=\frac{1}{\xi-\alpha}\,\frac{1}{\xi-\widehat{\lambda}}\ .$$

Considérons maintenant la famille de normes concordantes $\{\|\cdot\|_r\}$ données par

2.1.3.
$$\|u\|_r=\sup_{|\lambda|\geq\rho+\frac{1}{r}}|u(\lambda)|\,,\qquad\forall\,u\in\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)\ .$$

Cette famille définit évidemment la topologie de $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)$ (I.2.1.2).

Considérons alors l'ensemble de fonctions

2.1.4.
$$\Big\{\psi_\alpha(\widehat{\xi})\colon\ \alpha\in\mathbb{C};\ |\alpha|\geq\rho'\Big\}\ ,$$

où ρ' est un réel positif arbitraire plus grand que ρ. Pour tout $r\in\mathbb{N}$, il existe un voisinage $\{\lambda\in\mathbb{C}\colon\ |\lambda|<\rho+\frac{1}{k}\}$, $k\in\mathbb{N}$, tels que les fonctions $\psi_\alpha(\widehat{\xi})$ constituent un ensemble uniformément borné pour la norme $\|\cdot\|_r$ sur ce voisinage-là. Mais ceci veut dire (prop. I.4.2.13) que les opérateurs dans $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)$ correspondants aux indicatrices $\widehat{\psi}_\alpha$, $|\alpha|\geq\rho'$, constituent une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}}-\mathbf{V}_\rho)]$, et donc, que les opérateurs $\frac{1}{D-\alpha}$ correspondants forment aussi une partie bornée de $\mathcal{L}[\mathbf{F}_\rho]$. Tout voisinage de $\mathbf{V}_\rho$ est donc un ensemble spectral de D.

Alors, étant donné que le filtre spectal de D est plus fin que le filtre $\mathbf{V}_\rho$ des voisnages de $\mathbf{V}_\rho$, pour tout $\widehat{\phi}\in\mathcal{U}(\mathcal{V}_\rho)$ nous pouvons écrire

2.1.5.
$$\widehat{\phi}(D)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\phi(\lambda)\,\frac{1}{D-\lambda}\,d\lambda\ ,$$

où ϕ est un représentant quelconque de $\widehat{\phi}$, et Γ est une circonférence centrée à l'origine de $\mathbb{C}$, contenue dans le domaine de ϕ et orientée négativement.

Pour tout $f\in\mathbf{F}_\rho$, on obtient donc

2.1.6.
$$\widehat{\phi}(D)\cdot f=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\phi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,e^{\lambda t}\,d\lambda\ ,$$

où $\psi = \mathbb{L}(f)$ et Γ est maintenant la même circonférence orientée positivement.

2.2. Le cas où $\widehat{\phi}(\lambda) = e^{\tau\lambda}$, τ étant un réel positif tel que $\rho\tau < \pi$, est particulièrement important. On a alors, de 3.1.6

2.2.1. $$e^{\tau D} \cdot f = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(\tau+t)\lambda}\, \psi(\lambda)\, d\lambda = f(\widehat{t} + \tau)\,, \quad \forall f \in \mathbf{F}_\rho\ .$$

C'est-à-dire, cet opérateur est une translation dans $\mathbf{F}_\rho$.

Et de même, quel que soit $\alpha \in \widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$, on a

2.2.2. $$\frac{1}{e^{\tau D} - \alpha} \cdot f = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{e^{\tau\lambda} - \alpha}\, \psi(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda\,, \quad \forall f \in \mathbf{F}_\rho\ ,$$

où Γ est une circonférence orientée positivement et telle que qu'il n'y a aucun zéro de $e^{\tau\lambda} - \alpha$ à son intérieur, et $\psi = \mathbb{L}(f)$.

À cet opérateur dans $\mathbf{F}_\rho$, la transformation de Laplace $\mathbb{L}$ fait correspondre dans $\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ l'opérateur dont l'indicatrice est la fonction $\widehat{\psi}_\alpha \in \mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho, \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho))$ donnée par

2.2.3. $$\psi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{e^{\tau\lambda} - \alpha}\, \frac{1}{\widehat{z} - \lambda}$$

sur un voisinage de $\mathbf{V}_\rho$.

Alors, de la même façon que pour D dans $\mathbf{F}_\rho$, au numéro antérieur, nous pouvons conclure que tout voisinage de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$ est un ensemble spectral de $e^{\tau D}$. Pour toute fonction $\widehat{\phi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$, nous pouvons écrire

2.2.4. $$\widehat{\phi}(e^{\tau D}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \phi(\lambda)\, \frac{1}{e^{\tau D} - \lambda}\, d\lambda\ ,$$

où ϕ est un représentant de $\widehat{\phi}$, et Γ est l'image donnée par $e^{-\tau\lambda}$, orientée negativement et contenue dans le domaine de ϕ, d'une circonférence $|\lambda| = \rho'$, $\rho' > \rho$. Quel que soit $f \in \mathbf{F}_\rho$, de 2.2.2 et 2.2.4 il en résulte que

2.2.5. $$\widehat{\phi}(e^{\tau D}) \cdot f = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \phi(e^{\tau\lambda})\, \psi(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda\ ,$$

où $\psi = \mathbb{L}(f)$ et Γ est maintenant une circonférence centrée à l'origine de $\mathbb{C}$, de rayon plus grand que ρ, contenue dans le domaine de $\phi(e^{\tau\lambda})$ et orientée positivement. C'est-à-dire, si $\gamma(\lambda) = \phi(e^{\tau\lambda})$, on a

2.2.6. $$\widehat{\gamma}(D) = \widehat{\phi}(e^{\tau D})\ .$$

2.3. Nous avons dit (proposition 1.9.7) que, si $\rho\,\tau < \pi$, l'opérateur échantillonnage S_τ définit un isomorphsime bicontinu entre $\mathbf{F}_\rho$ et $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$. Dans 2.2.1 nous avons aussi constaté que $e^{\tau D}$ est une translation.

Alors, étant donné que

2.3.1. $$T(S_\tau \cdot f(\widehat{t})) = S_\tau \cdot f(\widehat{t} + \tau)\,, \qquad \forall\, f \in \mathbf{F}_\rho\ ,$$

nous pouvons écrire

2.3.2. $$T \circ S_\tau = S_\tau \circ e^{\tau D}\ .$$

C'est-à-dire, à l'opérateur $e^{\tau D}$ dans $\mathbf{F}_\rho$, l'isomorphisme S_τ fait correspondre T dans $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$. Tout voisinage de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$ sera donc un ensemble spectral de T, et pour toute fonction $\widehat{\phi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$ nous pouvons écrire

2.3.3. $$\widehat{\phi}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \phi(\lambda)\,\frac{1}{T-\lambda}\,d\lambda\ ,$$

où ϕ est un représentant de $\widehat{\phi}$, et Γ est l'image donnée par $e^{\tau\lambda}$, orientée négativement et contenue dans le domaine de ϕ, d'une circonférence $|\lambda| = \rho'$, $\rho' > \rho$.

En outre, étant donné que

2.3.4. $$S_\tau \circ \frac{1}{e^{\tau D}-\lambda} = \frac{1}{T-\lambda} \circ S_\tau\,, \qquad \forall\, \lambda \in \widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}\ ,$$

de 2.2.4 et 2.3.3 nous pouvons écrire

2.3.5. $$S_\tau \circ \widehat{\phi}(e^{\tau D}) = \widehat{\phi}(T) \circ S_\tau\ ,$$

quelle que soit la fonction $\widehat{\phi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages de $e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}$.

L'égalité 2.3.5 permet donc d'établir une correspondance biunivoque entre les systèmes analogiques et les systèmes discrets. À une équation différentielle dans un espace $\mathbf{F}_\rho$ du type

2.3.6. $$\widehat{\phi}(e^{\tau D}) \cdot f = g\,, \qquad f, g \in \mathbf{F}_\rho\ ,$$

elle ait correspondre l'équation

2.3.7. $$\widehat{\phi}(T) \cdot S_\tau(f) = S_\tau(g)$$

dans $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$ et réciproquement, si $\rho\,\tau < \pi$. C'est-à-dire, dans ces conditions, $\rho\tau < \pi$ et g étant une fonction de $\mathbf{F}_\rho$, si $f \in \mathbf{F}_\rho$ est une solution de 2.3.6, $S_\tau(f)$ est une solution de 2.3.7 dans $S_\tau(\mathbf{F}_\rho)$, et réciproquement. Et ces résulstats se vérifient quelle que soit la fonction $\widehat{\phi}$ holomorphe sur le filtre des voisinages de $e^{-\tau}\mathbf{V}_\rho$.

3. En considérnt encore le produit multiplicatif dans $\mathbf{U}_c$ défini par Silva Oliveira [8, p. 944], on peut aussi developper le calcul symbolique relatif à un quelconque de ces multiplicateurs.

3.1. En effet, étant donné un élément $\widehat{\gamma} \in \mathbf{U}_c$, considérons l'application $R_\gamma\colon \mathbf{U}_c \to \mathbf{U}_c$ obtenue par la multiplication par $\widehat{\gamma}$ (au sens de Silva Oliveira) [5, p. 994] dans $\mathbf{U}_c$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ considérons encore l'application linéaire continue dont l'indicatrice est la fnction $u(\widehat{\lambda})$ à valeurs dans $\mathbf{U}_c$, donnée par

3.1.1.
$$u(\lambda) = \frac{1}{\gamma(\widehat{z}) - \alpha}\,\frac{1}{\widehat{z} - \lambda}\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\ ,$$

où $\gamma(\widehat{z})$ est un répresentant de $\widehat{\gamma}$.

Cette application est évidemment l'inverse de $R_\gamma - \alpha$, et pour tout $\widehat{\phi} \in \mathbf{U}_c$ on peut écrire

3.1.2.
$$\frac{1}{R_\gamma - \alpha}\,\widehat{\phi} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u(\lambda)\,\phi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\gamma(\widehat{z}) - \alpha}\cdot\phi(\widehat{z})\ ,$$

où ϕ est un représentant de $\widehat{\phi}$ et Γ une circonférence centrée à l'origine de $\mathbb{C}$, orientée positivement et contenue dans le domaine de ϕ.

Il est alors aisé de voir que tout voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$, est un ensemble spectral de R_γ. À ce sujet, il suffit de vérifier que $u(\widehat{\lambda})$ est borné dans le complémentaire de tout voisinage de zéro. Pour tout $\widehat{\psi} \in \mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ on peut donc écrire

3.1.3.
$$\widehat{\psi}(R_\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \psi(\lambda)\,\frac{d\lambda}{R_\gamma - \lambda}\ ,$$

où ψ est un répresentant de $\widehat{\psi}$ et Γ' est maintenant une circonférence centrée à l'origine de $\mathbb{C}$, orientée positivement et contenue dans le domaine de ψ. Et pour tout $\widehat{\phi} \in \mathbf{U}_c$ on a

3.1.4.
$$\widehat{\psi}(R_\gamma)\cdot\widehat{\phi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \psi(\lambda)\,\frac{\phi(\widehat{z})}{\gamma(\widehat{z}) - \lambda}\,d\lambda = \psi(\gamma(\widehat{z}))\cdot\phi(\widehat{z})\ ,$$

c'est-à-dire, l'opérateur $\widehat{\psi}(R_\gamma)$ coincide avec la multiplication par $\psi(\gamma(\widehat{z}))$ dans $\mathbf{U}_c$.

REMERCIEMENT – La traduction de ce travail a été revisée et perfectionnée par Jorge R. Leal. Je l'en remercie très vivement.

NOTATIONS

$[\cdot]$ — numéro de référence bibliographique;

$[\cdot, p.\ \cdot]$ — référence bibliographique suivie du numéro de la page;

I.1.1.1 — référence au paragraphe 1.1.1 précédée du numéro du chapitre I en notation romaine;

1.1.1 — référence au paragraphe localisé dans le même chapitre;

$\mathcal{U}(\mathcal{F})$ — I.1.1 dans [2];

$\mathcal{U}(\mathcal{V}_0)$ — II.1.3;

$\mathcal{U}(\mathcal{V}_\infty)$ — II.1.1;

$\mathbb{C}$ — plan complexe;

$\widetilde{\mathbb{C}}$ — plan complexe muni du point infini;

D — opérateur dérivation;

$\delta(\widehat{t})$ — distribution de Dirac;

$\mathbb{F}$ — Transformation de Fourier, II.7.5;

$\mathbf{F}$ — espace des fonctions à ultrabande borné, II.1.2;

$\mathbf{F}_\rho$ — II.1.8;

G — II.1.5, II.1.9.6;

$\mathcal{G}(\Omega^c)$ — I.3.2;

$\mathcal{G}(\{\infty\})$ — II.1.1;

$\mathcal{G}(\Omega^c, E)$ — II.4.2;

$\mathcal{G}(\mathbf{V}_\rho, \mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho}))$ — II.1.9;

H — II.1.3;

$\widetilde{H}$ — II.1.4;

$\mathcal{H}(\Omega)$ — I.1;

$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ — II.1.1;

$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbf{V}_\rho)$ — II.1.8.2;

$\mathcal{H}(\widetilde{\mathbb{C}} - e^{-\tau \mathbf{V}_\rho})$ — II.1.9;

$\mathcal{H}(\Omega, \mathbf{E})$ — I.3.4;

$\mathcal{H}(\Omega)'$ — dual de $\mathcal{H}(\Omega)$, I.3;

$\mathcal{H}(\mathbf{C}_k)$ — I.1.1;

$\mathbb{L}$ — Transformation de Laplace;

$\mathcal{L}[\mathbf{E}, \mathbf{G}]$ — espace des applications linéaires continues de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$;
$\mathcal{L}[\mathcal{H}(\mathbf{C}_k), \mathbf{E}_\tau]$ — I.4.1;
$\mathcal{L}[\mathcal{H}(\Omega), \mathbf{E}]$ — I.4.1;
$\mathcal{L}[\mathcal{G}(\Omega^c, \mathbf{E})]$ — I.3.4;
$\mathcal{L}[\mathbf{U}]$ — algèbre des opérateurs linéaires continus dans $\mathbf{U}$;
Λ — espace des distributions sur $\mathbb{R}$ du type exponentiel;
Λ_0^+ — II.1.3;
Λ^+ — II.1.4;
Λ_τ — II.1.3;
Ω — I.1;
$\Omega^c = \widetilde{\mathbb{C}} - \Omega$ — I.1.2.1;
$\mathcal{P}$ — II.1.1;
Q — II.1.7;
S_τ — I.1.6;
$\mathbf{U}_c$ — II.1.1;
$\mathbf{V}_\rho$ — II.1.8.2;
$\mathcal{V}_0$ — II.1.3;
$\mathcal{V}_\infty$ — II.1.1;
$\mathcal{V}_\rho$ — filtre des voisinages de $\mathbf{V}_\rho$.

Errata de l'article antérieur publié (Vol. 52, Fasc. 3 – 1995) sous le nom “Les algébres $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et le calcul symbolique de Sebastião e Silva”:

page	ligne	où est	on doit lire
272	derniére	$\mathbb{L}[\mathbf{U}]$	$\mathcal{L}[\mathbf{U}]$
275	3	”	”
275	14	”	”
275	15	”	”
276	15	”	”
277	21	$\mathcal{L}[\boldsymbol{U}]$	$\mathcal{L}[\mathbf{U}]$
277	21	$\boldsymbol{U}$	$\mathbf{U}$
277	derniére	$\boldsymbol{U}$	$\mathbf{U}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Guelfand, I.M. and Chilov, G.E. – *Les Distributions*, tome 2, Dunod, Paris, 1964.

[2] Sequeira, F.M. – Les algèbres $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ et le calcul symbolique de Sebastião e Silva, *Portugaliae Math.,* 52(3) (1995), 251–278.

[3] Sebastião e Silva, J. – Su certe classi di spazi localment convessi importanti per le applicazioni, *Rendiconti di Matematica e delle Applicazione, Série V,* XIV(1–2) (1955), Roma.

[4] Sebastião e Silva, J. – Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non borné, *Ann. Mat. Pura Appl.,* LVIII(IV) (1962), 219–276.

[5] Sebastião e Silva, J. – Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel, *Math. Ann.,* 136 (1958), 58–96.

[6] Koopmans, L.H. – *The spectral analysis of time series*, 1974.

[7] Schwarz, R.J. and Friedland, B. – *Sistemas lineares*, Editora da Universidade de S. Paulo, 1972.

[8] Silva Oliveira, J. – Sur un produit multiplicatif de ultradistributions, *Bulletino UMI,* 6(1-B) (1982), 943–955.

Fernando Manuel Sequeira,
Urbanização da Portela, Lt. 52 – 10º Dto.,
Portela, Loures – PORTUGAL