PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 40 (54), 1986, 33–48

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ШУБНИКОВСКИЕ ГРУППЫ

Славик Яблан

Резюме. Предлагается новый метод определения числа и частичной каталогизации групп простой и кратной антисимметрии типа M^m. Примением этого метода определены числа N_m групп типа M^m, порождаемых федоровскими группами и указаны возможности их частичнои каталогизации приведением представителей соотвецтвующих классов групп типа M^m.

Проблематика групп простой и кратной антисимметрии, порождаемых федоровскими группами, их каталогизация и определение чисел N_m групп типа M^m подробно рассмотрены в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8] и монографиях [1, 2]. Определение чисел N_m в указанных работах осуществлено выводом и каталогизацией групп простой и кратной антисимметрии типа M^m и применением комбинаторнных методов, использованных для определения чисел $N_q(G)$ групп типа M^q, где q – максимальныйуровень простой или кратной антисимметрии, при котором рассматриваемая группа симиетрии порождает группы простой или кратной антисимметрии младшие всех родов. В некоторых случаях применены и сочетания табличных и комбинаторных методов.

Каталогизация групп типа M^m и тем самым определение чисел $N_m(G)$ и N_m осуществлена относительно шубниковских и обобьенных шубниковских групп типа M^m, для $m = 1$ и $m = 2$. Полученные результаты представлены в виде полного каталога шубниковских групп типа M^1 [1, таб. Ъ] и частичного каталога, с приведением представителей классов обобщенных шубниковских (заморзаевских) групп типа M^2 [2, таб. П5]. Из-за большого объема результатов процесс порождения групп типа M^m для $m \geq 3$ осуществлен лишь частично, следовательно числа $N_3(G)$, $N_4(G)$, $N_5(G)$ не определены для всех обобщенных шубниковских групп типа M^3, M^4, M^5, а преимущественно в случаях, когда речь идет о числах $N_q(G)$, полученных комбинаторным методом. Поскольку группы типа M^6

AMS Subject Classification (1980): Primary 20 H 15.

порождает ичключительно группа симметрии $Pmmm$ ($18\,s$ в обозначениях [1, 2]), то результат $N_q(18s) = N_6(18s) = 419973120$ одновременно являеця числом N_6 всех обобщенных шубниковских групп типа M^6. Для $m > 6$ федоровские группы не порождают групп кратной антисимметрии типа M^m, следовательно для $m > 6$ все числа $N_m = 0$. Полный обзор полученных результатов определения чисел $N_m(G)$ обобщенных шубниковских групп представлен в [1, таб. III_2].

В первой части настоящей статьи изложены основные идеи и теоретические обоснования метода определения чисел $N_m(G)$ групп типа M^m, порождаемых произвольной группой симметрии G, и способ частичной каталогизации групп типа M^m приведением представителей классов групп типа M^m, обладающих антисимметрическими характеристиками AK^m различного типа. Возможности применения указанного метода использованы во второй части статьи при определении чисел $N_3(G)$, $N_4(G)$, $N_5(G)$всех обобщенных шубниковских групп типа M^m. В этой части статьи представлены и возможности частичной каталогозации всех рассматриваемых групп приведением представителей классов групп типа M^m с антисимметрическими характеристиками AK^m различного типа. В последней части статьи полученные результаты представлены в виде полной таблицы чисел $N_m(G)$ групп типа M^m, порождаемых федоровскими группами симметрии.

1. Метод определения чисел групп простой и кратной антисимметрии типа M^m и их частичной каталогизации

Для каждой группы симметрии G, заданной копредставлением, процесс порождения групп простой и кратной антисимметрии типа M^m возможно осуществить согласно предложенному в работе [9] методу, основывающемуся на использовании антисимметрической характериситики группы G.

Определение 1. Пусть задана группа симметрии G со своей (редуцированной) антисимметрической характеристикой $AK(G)$, состоящей из подмножеств преобразований эквивалентных в смысле симметри [9, Опр. 2]. Каждое из указанных подмножеств назовем сегментом $AK(G)$ порядка 1. Каждый сегмент $AK(G)$, состоящий из двух или более сегментов порядка n, назовем сегментом порядка $n+1$ ($n \geq 1$).

В процессе порождения групп типа M^m из группы симметрии G получаюця все различные группы простой и кратной антисимметрии G_i^m типа M^m для фиксированного $m (i \in N)$ и соотвецтвующие антисимметрические характеристики $AK^m(G_i)$. Вместо полных антисимметрическг225 их характеристик $AK^m(G_i)$ на практике достаточно указывать в рамках $AK^m(G_i)$ исключительно произведения соотвецтвующих антитождеств, без приведения антисимметрических преобразований. Сегменты $AK^m(G_i)$ соотвецтвуют сегментам $AK(G)$. Тождество E, антитождества e_j $(1 \leq j \leq m)$ и их конечные произведения, входящие в состав $AK^m(G_i)$, назовем условно сегментами порядка 0.

Определение 2. Пусть задан произвольный сегмент порядка 1 антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$ какой-нибудь группы простой или кратной антисимметрии G_i^m типа M^m. Типом этоо сегмента называем число различных сегментов порядка 1, получаемых из указанного сегмента при переходе с уровня антисимметрии m на уровень антисимметрии $m+1$ в процессе порождения групп типа M^{m+1} из группы G_i. Типом сегмента порядка $n+1$ называем композицию типов сегментов входящих в состав сегмента порядка $n+1$. Типом антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$ называем композицию всех типов сегментов, входящих в ее состав.

Например, сегмент какой-нибудь $AK^1\{e_1, e_1\}$ – типа 3, поскольку при переходе с уровня антисимметрии $m = 1$ на уровень $m = 2$ дает три различных сегмента: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_1e_2\}$, $\{e_1e_2, e_1e_2\}$, а сегмент $\{E, e_1\}$-типа 4, поскольку при таком же переходе дает четыре разлычних сегмента: $\{E, e_1\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{E, e_1e_2\}$, $\{e_1, e_1e_2\}$. Согласно этому, антисимметрические характеристики $AK^1\{e_1\}\{Ee_1\}$, $\{E\}\{E, e_1\}$ будут типа (2) $(4)^{11}$, $\{e_1\}\{E, E\}$, $\{e_1\}\{e_1, e_1\}$–типа (2) $(3)^1$, тогда как напр. антисимметрические характеристики $AK^2\{\{E, E\}, \{e_1, e_1\}, \{E, e_2\}\}$, $\{\{e_1, e_1\}, \{E, e_2\}, \{e_2, e_2\}\}$, $\{\{E, e_2\}, \{e_2, e_2\}, \{e_1e_2, e_1e_2\}\}$, $\{\{E, E\}, \{E, e_2\}, \{e_1e_2, e_1e_2\}\}$, $\{\{E, E\}, \{e_2, e_2\}, \{e_1, e_1e_2\}\}$ будут типа $(3, 3, 4)^2$, а антисимметрические характеристики $\{\{E, E\}, \{E, E\}, \{e_1, e_2\}\}$, $\{\{e_1, e_1\}, \{e_1, e_1\}, \{e_1, e_2\}\}$, $\{\{E, e_1\}, \{e_1e_2, e_1e_2\}, e_1e_2, e_1e_2\}\}$-типа $((3, 3), 4)^2$, причем одинаковость сегментов типа 3 в последней группе примеров обозначена скобками[2].

Теорема 1. *Каждые две группы простой или кратной антисимметрии G_i^m и G_j^m $(i, j \in N)$, порождаемые из одной и той же группы симметрии G и обладающие одинаковым типом антисимметрической характеристики AK^m, порождают одинаковое число групп кратной симметрии типа M^{m+1}. Среди групп кратной антисимметрии типа M^{m+1}, выводимых из групп G_i^m и G_j^m, имееця по одонаковому числу групп с одинаковыми типами антисимметрических характеристик AK^{m+1}. Зная все группы кратной антисимметрии, получаемые обобщенным методом Шубникова-Заморзаева из группы G_i^m при переходе с m на $m+1$, возможно определить все группы кратной антисимметрии типа M^{m+1}, порождаемые группой G_j^m $(1 \leq m \leq q-1)$.*

В процессе порождения групп кратной антисимметрии обобщенным методом Шубникова-Заморзаева группы G_i^m и G_j^m типа M^m порождают по $2^q - 1$ групп кратной антисимметрии, а именно по $2^q - 2^m$ групп типа M^{m+1} каждая (среди которых могут появиться и повторяющиеся груп-

[1]Верхний индекс типа ентисимметрической характериситики AK^m-число m.

[2]При обозначении типов сегментов порядка $n \geq 2$ на практике вместо цифровых обозначений часто более пригодно использовать соотвецтвующее размещение скобок.

пы, т.е. группы с одинаковыми антисимметрическими характеристиками AK^{m+1}) и по $2^m - 1$ групп типа ${}^{m+1}M$ различных видов.[3] Согласно этим соглашениям, обозначим полученные множества групп, выводимых из G_i^m и G_j^m по порядку: $\{G_{i,i'}^{m+1}\}$, $\{G_{j,j'}^{m+1}\}$, $\{{}^{m+1}G_{i,i''}\}$, $\{{}^{m+1}G_{j,j''}\}$. Ввиду того, что группы G_i^m и G_j^m обладают одинаковым типом антисимметрической характериситики AK^m, среди их антисимметрических характеристик AK^m (G_i) и $AK^m(G_j)$ существует взаимно-однозначное соотвецтвие f_0 на уровне сегментов. Согласно соотвецтвии f_0 можно привести в порядок антисимметрическую характеристику $AK^m(G_j)$ так, что $f_0(e_k^m) = e_k^{-m}$, где e_k^m-к-тый сегмент порядка 0 антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$, а e_k^{-m}-к-тый сегмент порядка 0 антисимметрической характеристики AK^m (G_j). Благодаря наличию указанного отображения f_0 множества групп, порождаемых из групп G_i^m и G_j^m применением обобщенного метода Шубникова-Заморзаева, переходом на уровень антисимметрии $m+1$, содержат по одинаковому числу групп с одинаковым типом антисимметрической характеристики AK^{m+1} каждое, причем множества $\{{}^{m+1}G_{i,i''}\}$ и $\{{}^{m+1}G_{j,j''}\}$ состоят из $2^m - 1$ различных групп с различными антисимметрическими характеристиками AK^{m+1} каждое, которые все обладают одним и тем же типом антисимметрической характеристики AK^{m+1}, одинаковым с типом антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$. Следовательно, и множества групп типа M^{m+1} $\{G_{i,i'}^{m+1}\}$ и $\{G_{j,j'}^{m+1}\}$ содержат по одинаковому числу групп с одинаковым типом антисимметрической характеристики AK^{m+1} каждое. Пусть e_k^{m+1}-к-тый сегмент порядка 0 антисимметрической характеристики AK^{m+1} какой-нибудь группы, порождаемой из $G_i^m(e_k^{m+1} = e_k^m$ или $e_k^{m+1} = e_{m+1}e_k^m)$. Определим отображение f как расширение отображения f_0 следующим образом: $f(e_k^{m+1}) = \bar{e}_k^{m+1} f(e_k^m) = \bar{e}_k^m f(e_{m+1}e_k^m) = e_{m+1}\bar{e}_k^m$. Отображение f отображает множество всех антисимметрических характеристик AK^{m+1} групп, порождаемых из G_i^m взаимно-однозначно на множество всех антисимметрических характеристик AK^{m+1} групп, порождаемых из G_j^m с сохранением типа антисимметрической характеристики AK^{m+1} индуцируя так отображение множества всех порождаемых таким образом из G_i^m групп на множество всех групп, порождаемых из G_j^m, причем одинаковые группы (группы с одинаковыми антисимметрическими характеристиками AK^{m+1}) отображаюця в одинаковые группы, а различные группы – в различные группы. При отображении множества всех порождаемых таким образом из G_i^m групп на множество всех групп. порождаемых из G_j^m, при помощи отображения f, имеюця следующие две возможности:

а) f отображает множество $\{AK(G_{i,i'}^{m+1})\}$ на множество $\{AK(G_{j,j'}^{m+1})\}$, т.е. множество $\{G_{i,i'}^{m+1}\}$ на множество $\{G_{j,j'}^{m+1}\}$, а множество $\{AK({}^{m+1}G_{i,i''})\}$

[3] Левый индекс $m+1$ обозначает младшие группы, порождаемые из группы типа M^m, при переходе с уровня антисимметрии m на уровеня $m+1$, которые типа не M^{m+1}. Напр. группы типа M^1 порождают группы типа ${}^2M$: M_{12}, группы типа M^2 порождаюот группы типа ${}^3M$ трех различных видов: M_1M_{23}, M_2M_{13}, $M_{12}M_{13}$ и т.д.

на множество $\{AK({}^{m+1}G_{j,j''})\}$, т.е. множество $\{{}^{m+1}G_{i,i''}\}$ на множество $\{{}^{m+1}G_{j,j''}\}$[4]. Эта возможность осуществляеця в случае когда отображение f_0-взаимно-однозначно не только на уровне сегментов, а и на уровне полных антисимметических характеристик $AK^m(G_i)$ и $AK^m(G_j)$, причем сегмент порядка 0: E отображаеця исключительно в E отображениями f_0 и f_0^{-1}. В этом случае из множества всех различных групп типа M^{m+1}, порождаемых из группы G_j^m, прямо получаем, применением отображения f, множество всех различных групп типа M^{m+1} порождаемых из группы G_j^m, с сохранением типов антисимметрических характеристик AK^{m+1}.

б) f отображает какое-нибудь подмножество K множества $\{G_{i,i'}^{m+1}\}$ на какое-нибудь подмножество $f(K)$ множества $\{{}^{m+1}G_{j,j''}\}$, а множество K' оста льных групп типа M^{m+1}, порождаемых из $G_i^m : K' = \{G_{i,i'}^{m+1}\}\backslash K$ на какое-нибудь подмножество $f(K')$ множества $\{G_{j,j''}^{m+1}\}$. Тогда к множествам K' и $f(K')$ можно применить рассмотрение а). Множество $f(K)$ состоит из различных групп с одинаковым типом антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$. Согласно этому, множество $\{{}^{m+1}G_{i,i''}\}$, состоящее из различных групп с одинаковым типом антисимметрической характеристики AK^{m+1} (одинаковым типу антисимметрической характеристики $AK^m(G_i)$, f отображает на множества $\{{}^{m+1}G_{j,j''}\}\backslash f(K)$ и $\{G_{j,j''}^{m+1}\}\backslash f(K')$. При этом множества K и $\{G_{j,j'}^{m+1}\}\backslash f(K')$ содержат одинаковое число групп с одинаковыми антисимметрическими характеристиками AK^{m+1}, т.е. одинаковое число различных групп типа M^{m+1}. с сохранением типа антисимметрической характеристика AK^{m+1}. Следовательно, если известны все группы краной антисимметрии, порождаемые из группы G_i^m обобщенным методом Шубникова-Заморзаева, при переходе с уровня антисимметрии m на уровень $m+1$, то все группы типа M^{m+1}, выводимые таким же образом из группы G_j^m, обладающей таким же типом антисиметрической характеристики AK^m, как группа G_i^m, получаются с помощью отображения f, расширения отображения f_0. При этом в случае а) они получаются непосредственно из групп типа M^{m+1}, порождаемых группй G_i^m, а в случае б) как все группы типа M^{m+1}, которые получаются применением отображения f на все группы типа M^{m+1} и ${}^{m+1}M$, выводимые из группы G_i^m обобщенным методом Шубникова-Заморзаева. Ясно, что в случае б) при этом получаются и все группы типа ${}^{m+1}M$, выводимые из группы G_j^m.

Указанный метод может служить основанием для частичной каталогизации всех групп типа $M^{m+1}(1 \leq m \leq q-1)$, порождаемых из какойнибудь группы симметрии G, приведением таблиц групп, порождаемых из групп-представителей различных типов антисимметрических характерис-

[4]Строго говоря, различаются отображение f антисимметрических характеристик AK^{m+1} от индуцированного отображения соответствующих групп кратной антисимметрии. Однако, указанное различие не оказывает существенного влияния на рассмотрение анализируемой проблемы и в дальнейшем не будем постоянно подречеркивать это различие.

тик $AK^m(1 \leq m \leq q-1)$.

Согласно указанной теореме метод определения чисел $N_m(G)(1 \leq m \leq q)$ групп простой и краной антисимметрии, порождаемых какой-нибудь группй симметрии G, копредставление и антисимметрическая характеристика $AK(G)$ которой известны, сводится к следующему алгоритмическому методу:

1). порождение групп типа M^1

$2m$. (а) учет всех различных типов антисимметрических характеристик AK^m групп типа M^m, полученных за $2m-1$). и выбор по одной группе типа M^m, как представителя каждого из классов эквивалентности, состоящих из всех групп типа M^m с одинаковым типом антисимметрической характеристики AK^m

$2m+1$). (б) порождение групп типа M^{m+1} из групп-представителей типа M^m, полученных за $2m$).

Указанный алгоритмический метод применяем по порядку $1 \leq m \leq q-1$.

Если, кроме определения чисел $N_m(G)$, нашей целью является и полная каталогизачция групп типа $M^{m+1}(1 \leq m \leq q-1)$, порождаемых группй симметрии G, тогда на стадии $2m+1$. (необходимо определить и все группы типа ${}^{m+1}M$, порождаемые из указанных групп-представителей типа M^m, полученных за $2m$). Потом после каждой стадии $2m+1$). необходимо реализовать и подстадии:

$2m+1$. (а). Определени е всех f_0-отображений антисимметрических характеристик AK^m, существующих между антисимметрической характеристикой группы-представителя определенного типа антисимметрической характеристики AK^m и антисимметрическими характеристиками остальных групп, входящих в состав класса эквивалентности, определенного группой-представителем. Данный метод применяем в рамках каждого из различных классов эквивалентности.

$2m+1$. (б) Порождение всех групп типа M^{m+1} использованием f-отображений (раширений f_0-ото бражений), примененных ко всем группам типа M^{m+1} и ${}^{m+1}M$, порождаемым из группы-представителя на стадии $2m+1$). Данный метод применяем в рамках каждого из различных классов эквивалентности.

2. Определение чисел $N_m(G)$ групп простой и кратной антисиметрии типа M^m, порождаемых федоровскими группами

При порождении указанных групп простой и кратной антисимметрии типа M^m использована символика, предложенная в [1, таб. П 1]. Для каждой федоровской группы симметрии G на первой стадии работы определены условия замены образующих антиобразующими, вытекающие из критерия существования для групп типа M^m [9, Теорема 1], и антисимметрические характеристики $AK(G)$. Ввиду того, что группы симметрии с изоморфными антисимметрическими характеристиками порождают одинаковое число групп типа M^m при каждом фиксированном m, $1 \leq m \leq q$ и ввиду того, что полученные группы типа M^m корреспондирыюг в соответствии с указанным изоморфизмом антисимметрических характеристик, процесс порождения групп простой и кратной антисимметрии типа M^m сводится к выводу групп типа M^m, порождаемых группами симметрии с неизоморфными антисимметрическими характеристиками.

Двести тридцать порождающих федоровских групп симметрии определяют 34 различных классов эквивалентности, согласно соотношению изоморфизма антисимметрических характеристик. Для каждого из 34 классов даем обозначения групп, входящих в состав каждого из классов в системе обозначений [1, таб. П 1], генераторное представление первой в каждом из классов группы симметрии, служащей представителем класса, редуцированную антисимметрическую характеристику группы-представителя и условия замены образующих антиобразующими в группе-представителе. При указании этих условий знак = обозначает обязательство одновременной замены всех связанных знаком = образующих антиобразующими того же антисимметрического типа, а обозначение $g \neq \bar{g}$- запрещение замены образующей g антиобразующей.

1s, $\{a,b,c\}$ $\{a,b,c,ab,ac,bc,abc\}$

2s, $\{a,b,c\}(\tilde{2})$ $\{\tilde{2},\tilde{2}a,\tilde{2}b,\tilde{2}c,\tilde{2}ab,\tilde{2}ac,\tilde{2}bc,\tilde{2}abc\}$

3s, $2a$ $\{a,b,c\}(2)$ $\{c\}\{2,2a,2b,2ab\}$

4s, $26s$, $1h$, $33h$, $3a$, $7a$, $42a$

$$\left\{a,b,\frac{a+c}{2}\right\}(2) \qquad \{2,2b\}\left\{2\frac{a+c}{2},2b\frac{a+c}{2}\right\} \qquad a\neq\bar{a}$$

5s, $\{a,b,c\}(m)$ $\{a,b,ab\}\{m,mc\}$

6s, $16s$, $22s$, $35s$, $55s$, $56s$, $57s$, $47s$, $48s$, $53s$, $54s$, $71s$, $4h$, $7h$, $9h$, $10h$, $15h$, $25h$, $29h$, $30h$, $31h$, $32h$, $34h$, $5a$, $10a$, $11a$, $25a$, $27a$, $33a$, $36a$, $37a$, $38a$, $41a$, $43a$, $44a$, $45a$, $50a$, $52a$, $84a$, $85a$, $103a$

$$\left\{a,b,\frac{a+c}{2}\right\}(m) \qquad \{m\}\left\{\frac{a+c}{2},b\frac{a+c}{2}\right\} \qquad a\neq\bar{a}$$

7s, $\{a,b,c\}(2:m)$ $\{m,mc\}$ $\{2,2a,2b,2ab\}$

8s, $10s$, $32s$, $62a$

$$\left\{a,b,\frac{a+c}{2}\right\}(2:m) \qquad \{m\}\{2,2b\}\left\{\frac{a+c}{2},b\frac{a+c}{2}\right\} \qquad a\neq\bar{a}$$

9s, $\{a,b,c\}(2:2)=\{a,b,c\}(2:2')$[5]

[5] В случаях использования одного и того же символа для обозначения различных преобразований, различие этих преобразований в рамках $AK(G)$ осуществлено введением дополнительного обозначения$'$.

$\{\{c\}\{2,2a,2b,2ab\},\ \{b\}\{2',2'a,2'c,2'ac\},\ \{a\}\{22',22'b,22'c,22'bc\}\}$

$\{\{2,2',22'\},\ \{2a,2'a,22'\},\ \{2',2b,22'b\},\ \{2'a,2ab,22'b\},$

$\{2,2'c,22'c\},\ \{2a,2'ac,22'c\},\ \{2b,2'c,22'bc\},\{2ab,2'ac,22'bc\}\}$

11s, $24h,\ 6a\quad \left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}(2:2)=\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}(2:2')\quad a\neq\bar{a},\ b\neq\bar{b}$

$\left\{\frac{a+b+c}{2}\right\}\{2,2',22'\}$

12s, $\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}(2:2)=\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}(2:2')\qquad a\neq\bar{a}$

$\left\{\left\{2,2\frac{a+b}{2}\right\},\left\{2',2'\frac{a+c}{2}\right\},\left\{22',22'\frac{a+b}{2}\frac{a+c}{2}\right\}\right\}$

13s, $17h\qquad \{a,b,c\}(2m)\qquad \{c\}\{\{m,ma\},\{2m,2mb\}\}\qquad c\neq\bar{c}$

14s, $15s,\ 24s,\ 58s,\ 6h,\ 11h,\ 20h,\ 23h,\ 35h,\ 36h,\ 15a,\ 16a,\ 23a,\ 54a,\ 55a,\ 60a,$ $61a$

$\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}(2m)\qquad \left\{\frac{a+b}{2}\right\}\{c\}\{m,2m\}\qquad a\neq\bar{a}$

17s, $22h,\ 20a\qquad \left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}(2m)$

$\left\{\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2}\frac{a+b}{2}\right\}\{m,2m\}\left\{m\frac{a+c}{2},m\frac{a+c}{2}\frac{a+b}{2}\right\}\qquad a\neq\bar{a}$

18s, $\{a,b,c\}(2m:2)=\{a,b,c\}(2m:2')$

$\{\{m,ma\},\ \{2m,2mb\},\ \{22'm,22'mc\}\}$

19s, $36s,\ 14a\qquad \left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}(2m:2)=\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}(2m:2')$

$\left\{\frac{a+b}{2}\right\}\{m,2m\}\{22'm,22'mc\}\qquad a\neq\bar{a}$

20s, $\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}(2m:2)=\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}(2m:2')$

$\left\{\frac{a+b+c}{2}\right\}\{m,2m,22'm\}\qquad a\neq\bar{a},\ b\neq\bar{b}$

21s, $\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}(2m:2)=\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}(2m:2')$

$\left\{\left\{\frac{a+b}{2}\right\}\{m\},\left\{\frac{a+c}{2}\right\}\{2m\},\left\{\frac{a+b}{2}\frac{a+c}{2}\right\}\{22'm\}\right\}\qquad a\neq\bar{a}$

23s, $40s$, $41s$, $42s$, $49s$, $63s$, $65s$, $66s$, $69s$, $73s$, $27h$, $42h$, $43h$, $44h$, $45h$, $46h$, $47h$, $53h$, $54h$, $12a$, $32a$, $34a$, $35a$, $39a$, $40a$, $48a$, $49a$, $51a$, $53a$, $76a$, $77a$, $79a$, $80a$, $81a$, $82a$, $83a$, $86a$, $96a$, $99a$, $100a$, $101a$, $102a$

$\left\{a, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right\}(4) \qquad \{4\}\left\{\dfrac{a+b+c}{2}\right\} \qquad a \neq \bar{a},\ b \neq \bar{b}$

25s, $29s$, $31s$, $34s$, $50s$, $72s$, $12h$, $13h$, $14h$, $26h$, $28h$, $37h$, $48h$, $13a$, $17a$, $26a$, $28a$, $46a$, $56a$, $57a$, $58a$, $59a$, $63a$, $64a$, $65a$, $66a$, $67a$, $87a$, $88a$

$\left\{a, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right\}(4m) \qquad \left\{\dfrac{a+b+c}{2}\right\}\{4\}\{m\} \qquad a \neq \bar{a},\ b \neq \bar{b}$

27s, $43s$, $44s$, $45s$, $46s$, $51s$, $52s$, $62s$, $68s$, $2h$, $16h$, $49h$, $30a$, $31a$, $70a$, $71a$, $72a$, $73a$, $92a$, $98a$

$\left\{a, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right\}(\tilde{4}) \quad \left\{\tilde{4}, \tilde{4}\dfrac{a+b+c}{2}\right\} \qquad a \neq \bar{a},\ b \neq \bar{b}$

28s, $30s$, $33s$, $18h$, $9a$, $22a$, $24a$, $47a$

$\{a, b, c\}(4:m) \quad \{4, 4a\}\{m, mc\} \quad a = b$

37s, $38h$, $18a$, $19a$ $\left\{a, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right\}(4m:2)$

$\left\{\dfrac{a+b+c}{2}\right\}\{4\}\{2\}\{m\} \qquad a \neq \bar{a},\ b \neq \bar{b}$

38s, $39s$, $59s$, $60s$, $64s$, $67s$, $70s$, $39h$, $40h$, $41h$, $50h$, $51h$, $52h$, $68a$, $69a$, $74a$, $75a$, $78a$, $90a$, $91a$, $93a$, $94a$, $95a$, $97a$

$\{(a, b), c\}(3) \qquad \{c\} \qquad a \neq \bar{a},\ b \neq \bar{b},\ 3 \neq 3$

61s, $89a$ $\left\{a, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+c}{2}\right\}(3/2) \quad 2 \neq \bar{2},\ 3 \neq \bar{3},\ a \neq \bar{a},\ \overline{\dfrac{a+b}{2}} \neq \overline{\dfrac{a+b}{2}},$

$\overline{\dfrac{a+c}{2}} \neq \overline{\dfrac{a+c}{2}}$

3h, $\{a, b, c\}\left(2 : \dfrac{b}{2}m\right) \quad \{2, 2a\}\{2c, 2ac\}\left\{\left\{\dfrac{b}{2}m, \dfrac{b}{2}mc\right\}, \left\{\dfrac{b}{2}ma, \dfrac{b}{2}mac\right\}\right\}$

5h, $4a$ $\quad \{a, b, c\}\left(2\dfrac{c}{2}m\right) \quad \left\{\left\{\dfrac{c}{2}m, \dfrac{c}{2}ma\right\}, \left\{\dfrac{c}{2}m\ 2, \dfrac{c}{2}m\ 2b\right\}\right\} \qquad c \neq \bar{c}$

8h, $\{a, b, c\}\left(2\dfrac{b+c}{2}m_{a/4}\right) \qquad a = b = c$

$\{2, 2a\}\left\{\dfrac{b+c}{2}m_{a/4}, \dfrac{b+c}{2}m_{a/4}a, \dfrac{b+c}{2}m_{a/4}2, \dfrac{b+c}{2}m_{a/4}2a\right\}$

19h, $\{a,b,c\}\left(2\frac{b+c}{2}m_{a/4}:2\right)=\{a,b,c\}\left(2\frac{b+c}{2}m_{a/4}:2'\right)\qquad a=b=c$

$$\left\{\frac{b+c}{2}m_{a/4},\frac{b+c}{2}m_{a/4}a\right\}\ \{\{2\ 2a\},\{2',2'a\},\{22',22'a\}\}$$

21h,[6] $\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}\left(2\frac{b}{2}m:2\right)=\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}\left(2\frac{b}{2}m:2'\right)\qquad a\neq\bar{a}$

$$\left[22'\frac{b}{2}m,2\frac{a+b}{2}\frac{b}{2}m\right]\left[22'\frac{a+b}{2}\frac{b}{2}m,2\frac{b}{2}m\right]$$

$$\left\{\left[\frac{b}{2}m,\frac{a+b}{2}\frac{b}{2}m\right],\left[\frac{b}{2}mc,\frac{a+b}{2}\frac{b}{2}mc\right]\right\}$$

1a, $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\right)\left\{\frac{c}{2}2,\frac{c}{2}2a,2b,\frac{c}{2}2ab\right\}\qquad c\neq\bar{c}$

8a, $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2:\frac{a}{2}2_{b/4}\right)\left\{\frac{c}{2}2,\frac{a}{2}2_{b/4},\frac{c}{2}2\frac{a}{2}2_{b/4}\right\}\qquad a\neq\bar{a},\ b\neq\bar{b},\ c\neq\bar{c}$

21a, $\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}\left(\frac{c}{2}2\frac{b}{2}m:\frac{a}{2}2_{b/4}\right)\qquad a\neq\bar{a},\ b\neq\bar{b}$

$$\left\{\frac{a+b+c}{2}\right\}\left[\frac{c}{2}2,\frac{a}{2}2_{b/4},\frac{c}{2}2\frac{a}{2}2_{b/4}\right]$$

$$\left\{\left[\frac{b}{2}m,\frac{b}{2}m\frac{c}{2}2,\frac{b}{2}m\frac{c}{2}2\frac{a}{2}2_{b/4}\right],\left[\frac{b}{2}m\frac{a+b+c}{2},\frac{b}{2}m\frac{c}{2}2\frac{a+b+c}{2},\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{b}{2}m\frac{c}{2}2\frac{a}{2}2_{b/4}\frac{a+b+c}{2}\right]\right\}$$

29a, $\{a,b,c\}\left(\frac{c}{2}2\frac{b}{2}m:\frac{a}{2}2_{b/4}\right)\qquad a\neq\bar{a},\ b\neq\bar{b},\ c\neq\bar{c}$

$$\left\{\frac{b}{2}m\frac{a}{2}2_{b/4}\right\}\left\{\left[\frac{c}{2}2,\frac{b}{2}m\right],\left[\frac{a}{2}2_{b/4},\frac{b}{2}m\frac{c}{2}2\right],\left[\frac{c}{2}2\frac{a}{2}2_{b/4},\frac{c}{2}2\frac{b}{2}m\frac{a}{2}2_{b/4}\right]\right\}$$

Способ определения чисел $N_m(G)$ групп простой и кратной антисимметрии, порождаемых из группы симметрии $G(1\leq m\leq q)$, и возможности частичной каталогизации этих групп, основывающейся на алгоритмическом методе, предложенном в первой части настоящей статьи, иллюстрирует пример группы:

18s, $\{a,b,c\}(2m:2')\qquad\{\{m,ma\},\{2m,2mb\},\{22'm,22'mc\}\}$

Эта группа симетрии порождает 9 групп антисимметрии типа M^1, приведенные вместе с их антисимметрическими характеристиками AK^1 и типами AK^1:

[6] Применение скобок [ ] обозначает, что коммутация находящихся в них выражений осуществлется одновременно для всех обозначенных таким образом выражений в рамках $AK(G)$.

G_1^1	$\{a,b,c\}(2m_1:2)\{\{e_1,e_1\},\{e_1,e_1\},\{e_1\ e_1\}\}$	$((3,3,3))^1$
G_2^1	$\{a,b,c\}(2m:2_1)\{\{E,E\},\{E,E\},\{e_1,e_1\}\}$	$(3,(3,3))^1$
G_3^1	$\{a_1,b,c\}(2m:2)\{\{E,E\},\{E,E\},\{E,e_1\}\}$	$((3,3),4)^1$
G_4^1	$\{a_1,b,c\}2m:2_1)\{\{E,E\},\{E,e_1\},\{e_1,e_1\}\}$	$(3,3,4)^1$
G_5^1	$\{a_1,b_1,c\}(2m:2)\{\{E,E\},\{E,e_1\},\{E,e_1\}\}$	$(3,(4,4))^1$
G_6^1	$\{a_1,b_1,c_1\}(2m:2)\{\{E,e_1\},\{E,e_1\},\{E,e_1\}\}$	$((4,4,4))^1$
G_7^1	$\{a,b,c\}(2m_1:2_1)\{\{E,E\},\{e_1,e_1\},\{e_1,e_1\}\}$	$(3,(3,3))^{12}$
G_8^1	$\{a_1,b,c\}(2m_1:2)\{\{E,e_1\},\{e_1,e_1\},\{e_1,e_1\}\}$	$((3,3),4)^1$
G_9^1	$\{a_1,b_1,c\}(2m_1:2)\{\{E,e_1\},\{E,e_1\},\{e_1,e_1\}\}$	$(3,(4,4))^1$

Группы $G_i^1 \leq i \leq 6$ с различными типами антисимметрических характеристик применяем в качестве представителей классов эквивалентности групп антисимметрии типа M^1 согласно соотношению одинаковости типа антисимметрической характеристики, для порождения групп кратной антисимметрии типа M^2. Полученные результаты представлены в таблице, в которой дана группа-представитель, число групп типа M^1 в определенном группой-представителем классе эквивалентности, числа групп типа M^2, порождаемых группой-предстабителем и распределение полученных групп типа M^2 по различным типам антисимметрических характеристик AK^2:

G_1^1	**8**	1	$2(3,(4,4))^2+1(3,3,4)^2+2((3,3),4)^2+1(4,4,4)^2+2(3,(3,3))$
G_2^1	**16**	2	$2(3,4,4)^2+1(4,(4,4))^2+5(3,3,4)^2+2(3,3,3)^2+2((3,3),4)^2+$ $+2(3,(3,3))^2+2(3,(4,4))^2$
G_3^1	**22**	2	$8(3,4,4)^2+4(4,(4,4))^2+4(3,3,4)^2+6((3,3),4)^2$
G_4^1	**34**	1	$4(4,4,4)^2+16(3,4,4)^2+14(3,3,4)^2$
G_5^1	**28**	2	$6(4,4,4)^2+12(3,4,4)^2+4(4,(4,4))^2+6(3,(4,4))^2$
G_6^1	**18**	1	$4(4,4,4)^2+12(4,4))^2+2(4,4,4)^2$

Из этого следует: $N_2(18s)=\mathbf{134}+\mathbf{228}+\mathbf{222}+\mathbf{118}+\mathbf{216}+\mathbf{18}=192$

Способ определения групп типа M^{m+1}, порождаемых какой-нибудь группой G_j^m типа M^m, односящейся к классу эквивалентности, согласно соотношению одинаковости типа антисимметрической характеристики AK^m, определенному какой-нибудь группой G_i^m-представителем класса, иллюстрирует пример групп G_2^1 и G_7^1 с одинаковым типом антисимметрической характеристики $AK^1(3,(3,3))^1$. Отображение f_0 их антисимметрических характеристик дано в виде следующей сравнительной таблицы:

G_2^1 $\{\{E,E\},\{E,E\},\{e_1,e_1\}\}$

$G_7^1 \quad \{\{e_1, e_1\}, \{e_1, e_1\}, \{E, E\}\}$

Учитывая то, что E не отображается исключительно в E, речь идет о случае б).[7] В соответствии с этим сравнительный каталог групп типа M^2 и ${}^2M(M_{12})$, порождаемых группой G_2^1 и соответствующих групп, порождаемых группой G_7^1 дан в таблице, в которой по порядку представлены порождаемая из G_2^1 группа, ее тип и антисимметрическая характеристика, а в следующем ряду антисимметрическая характеристика соответствующей группы, полученной отображением f (расширением f_0), соответствующая группа антисимметрии, выводимая из группы G_7^1 и ее тип:

$\{a_{10}, b, c\} \quad (2m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, E\}, \{E, E\}, \{e_1, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1\}, \{e_1, e_1\}, \{E, E\}\} \quad \{a_{10}, b, c\}\ (2m_1 : 2_1) \quad M^2$

$\{a, b, c_{10}\} \quad (2m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{E, E\}, \{E, E\}, \{e_1, e_2, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_1\}, \{e_1, e_1\}, \{e_2, E\}\} \quad \{a, b, c_{10}\}\ (2m_1 : 2_1) \quad M^2$

$\{a, b, c\} \quad (2_{10}m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, e_2\}, \{E, E\}, \{e_1, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1, e_2\}, \{e_1, e\}, \{E, E\}\} \quad \{a, b, c\}\ (2_{10}m_1 : 2_1) \quad M^2$

$\{a, b, c\} \quad (2m_{10} : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, e_2\}, \{e_2, e_2\}, \{e_1, e_2, e_1, e_2\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1, e_2\}, \{e_1, e_2, e_1, e_2\}, \{e_2, e_2\}\} \quad \{a, b, c\}\ (2m_{11} : 2_1) \quad M^2$

$\{a_{10}, b_{10}, c\} \quad (2m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, E\}, \{e_2, E\}, \{e_1, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1\}, \{e_1, e_2, e_1\}, \{E, E\}\} \quad \{a_{10}, b_{10}, c\}\ (2m_1 : 2_1) \quad M^2$

$\{a_{10}, b, c_{10}\} \quad (2m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, E\}, \{E, E\}, \{e_1, e_2, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1\}, \{e_1, e_1\}, \{e_2, E\}\} \quad \{a_{10}, b, c_{10}\}\ (2m_1 : 2_1) \quad M^2$

$\{a_{10}, b, c\} \quad (2_{10}m : 2_1) \quad M^2$

$\{\{e_2, e_2\}, \{e_2, E\}, \{e_1, e_1\}\}$

$\{\{e_1, e_2, e_1, e_2\}, \{e_1, e_2, e_1\}, \{E, E\}\} \quad \{a_{10}, b, c\}\ (2_{10}m_1 : 2_1) \quad M^2$

[7] Для $m = 1$ может появитьтя исключиетльно ситуация а). В качестве примера возможности а) можно рассматривать напр. группы типа $M^2 : \{a_{10}, b_1, c\}(2m : 2)$ и $\{a_{11}, b_1, c\}(2m : 2)$.

$\{a_{10}, b, c\}$ $(2m_{10}:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{e_2,E\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_2,e_1\},\{e_2,e_2\}\}$ $\{a_{10}, b, c\}$ $(2m_{11}:2_1)$ M^2

$\{a_{10}, b, c\}$ $(2m:2_{11})$ M^2

$\{\{e_2,E\},\{E,E\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1\},\{e_1,e_1\},\{e_2,e_2\}\}$ $\{a_{10}, b, c\}$ $(2m_1:2_{11})$ M^2

$\{a, b, c_{10}\}$ $(2_{10}m:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{E,E\},\{e_1,e_2,e_1\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_1\},\{e_2,E\}\}$ $\{a, b, c_{10}\}$ $(2_{10}m_1:2_1)$ M^2

$\{a, b, c_{10}\}$ $(2m_{10}:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{e_2,e_2\},\{e_1,e_2,e_1\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_2,E\}\}$ $\{a, b, c_{10}\}$ $(2m_{11}:2_1)$ M^2

$\{a, b, c\}$ $(2_{10}m_{10}:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{E,E\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_1\},\{e_2,e_2\}\}$ $\{a, b, c\}$ $(2_{10}m_{11}:2_1)$ M^2

$\{a, b, c\}$ $(2m_{10}:2_{11})$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{e_2,e_2\},\{e_1,e_1\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{E,E\}\}$ $\{a, b, c\}$ $(2m_{11}:2_{11})$ ${}^2M(M_1M_2)$

$\{a_{10}, b_{10}, c_{10}\}$ $(2m:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,E\},\{e_2,E\},\{e_1,e_2,e_1\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1\},\{e_1,e_2,e_1\},\{e_2,E\}\}$ $\{a_{10}, b_{10}, c_{10}\}$ $(2m_1:2_1)$

$\{a_{10}, b_{10}, c\}$ $(2m:2_{11})$ M^2

$\{\{e_2,E\},\{e_{22},E\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1\},\{e_1,e_2,e_1\},\{e_2,e_2\}\}$ $\{a_{10}, b_{10}, c\}$ $(2m_{11}:2_1)$ M^2

$\{a_{10}, b, c_{10}\}$ $(2_{10}m:2_1)$ M^2

$\{\{e_2,e_2\},\{e_2,E\},\{e_1,e_2,e_1\}\}$

$\{\{e_1,e_2,e_1,e_2\},\{e_1,e_2,e_1\},\{e_2,E\}\}$ $\{a_{10}, b, c_{10}\}$ $(2_{10}m_1:2_1)$ M^2

$\{a, b, c\}$ $(2m:2_{11})$ $2M(M_{12})$

$\{\{E,E\},\{E,E\},\{e_1,e_2,e_1,e_2\}\}$

$\{\{e_1,e_1\},\{e_1,e_1\},\{e_2,e_2\}\}$ $\{a, b, c\}$ $(2m_1:2_{11})$ M^2

Аналогным методом получаются группы типа M^2, порождаемые группой G_8^1 из групп типа M^2 и ${}^2M$, порождаемых группой G_3^1 и группы типа M^2, порождаемые группой G_9^1 из групп M^2 и ${}^2M$, порождаемых группой G_5^1. Таким образом частичная каталогизация групп типа M^2, порождаемых группой симметрии $18s$ сводится к каталогу из 126 групп типа M^2 и 6 групп типа (порождаемых группами G_i^1, $1 \leq i \leq 6$).

Медот определения сисел $N_m(18s)$, осуществленный для $m = 2,3,4,5$ иллюстрирован табличным обзором, в котором по порядку указываем: тип антисимметрической характеристики AK^m, число групп типа M^{m+1}, получаемых в процессе порождения групп типа M^{m+1} из группы-представителя соответствующего типа AK^m в каждом из классов эквивалентности, определенных соотношением одинаковости типа антисимметрической характеристики AK^m и распределение полученных групп типа M^{m+1}, порождаемых группой-представителем по различным типам AK^{m+1}, $2 \leq m \leq 5$.

За каждой таблицей определены числа $N_{m+1}(18s)$.

$m = 2$

$(4,4,4)^2$	**60**	20	$60(4,4,4)^3$
$(3,4,4)^2$	**44**	60	$16(4,4,4)^3 + 28(3,4,4)^3$
$(4,(4,4))^2$	**36**	30	$24(4,4,4)^3 + 12(4,(4,4))^3$
$(3,3,4)^2$	**32**	33	$4(4,4,4)^3 + 16(3,4,4)^3 + 12(3,3,4)^3$
$(3,(4,4))^2$	**26**	18	$6(4,4,4)^3 + 12(3,4,4)^3 + 4(4,(4,4))^3 + 4(3,(4,4))^3$
$(3,3,3)^2$	**23**	4	$1(4,4,4)^3 + 6(3,4,4)^3 + 12(3,3,4)^3 + 4(3,3,3)^3$
$((3,3),4)^2$	**20**	18	$8(3,4,4)^3 + 4(4,(4,4))^3 + 4(3,3,4)^3 + 4(3,3,4)^3 + 4((3,3),4)^3$
$((4,4,4))^2$	**16**	3	$4(4,4,4)^3 + 12(4,(4,4))^3$
$(3,(3,3))^2$	**14**	6	$2(3,4,4)^3 + 1(4,(4,4))^3 + 5(3,3,4)^3 + 2(3,(4,4))^3 + 2(3,3,3)^3 +$
			$+2((3,3),4)^3$

$$N_3(18s) = 20\mathbf{60} + 60\mathbf{44} + 30\mathbf{36} + 33\mathbf{32} + 18\mathbf{26} + 4\mathbf{23} + 18\mathbf{20} + 3\mathbf{16} + 6\mathbf{14} = 7028$$

$m = 3$

$(4,4,4)^3$	**56**	3136	$56(4,4,4)^4$
$(3,4,4)^3$	**40**	2604	$16(4,4,4)^4 + 24(3,4,4)^4$
$(4,(4,4))^3$	**32**	546	$24(4,4,4)^4 + 8(4,(4,4))^4$
$(3,3,4)^3$	**28**	546	$4(4,4,4)^4 + 16(3,4,4)^4 + 8(3,3,4)^4$
$(3,(4,4))^3$	**22**	84	$6(4,4,4)^4 + 12(3,4,4)^4 + 4(4,(4,4))^4$
$(3,3,3)^3$	**19**	28	$1(4,4,4)^4 + 6(3,4,4)^4 + 12(3,3,4)^4$
$((3,3),4)^3$	**16**	84	$8(3,4,4)^4 + 4(4,(4,4))^4 + 4(3,3,4)^4$

$N_4(18s) = 3136\mathbf{56} + 2604\mathbf{40} + 546\mathbf{28} + 84\mathbf{22} + 28\mathbf{19} + 84\mathbf{16} = 316260$

$m = 4$

$(4,4,4)^4$	**48**	233100	$48(4,4,4)^5$
$(3,4,4)^4$	**32**	73080	$16(4,4,4)^5 + 16(3,4,4)^5$
$(4,(4,4))^4$	**24**	5040	$24(4,4,4)^5$
$(3,3,4)^4$	**20**	5040	$4(4,4,4)^5 + 16(3,4,4)^5$

$N_5(18s) = 233100\mathbf{48} + 73080\mathbf{32} + 5040\mathbf{24} + 5040\mathbf{20} = 13749120$

$m = 5$

$(4,4,4)^5$	**32**	12499200
$(3,4,4)^5$	**16**	1249920

$N_6(18s) = 12499200\mathbf{32} + 1249920\mathbf{16} = 419973120$

Согласно полученным результатам для частичной каталогизации всех групп типа $M^m (3 \le m \le 6)$, порождаемых из группы симметрии $18s$, достаточно знать каталог, состоящий из 271 группы типа M^3 и 27 групп типа ${}^3M$, 213 групп типа M^4 и 49 групп типа ${}^4M$, 124 группы типа M^5 и 60 групп типа ${}^5M$, 48 групп типа M^6 и 62 группы типа ${}^6M$.

Алгоритмическим методом, аналогным методу для группы симметрии $18s$ и осуществленным для всех федоровских групп симметрии с неизоморфными антисимметрическими характеристиками $AK(G)$, определены числа $N_m(G)$, $1 \le m \le q$ данные в таблице:

G	$N_1(G)$	$N_2(G)$	$N_3(G)$	$N_4(G)$	$N_5(G)$	$N_6(G)$
1s	1	1	1			
2s	2	4	8	15		
3s	5	28	168	840		
4s	4	15	42			
5s	5	34	266	1680		
6s	5	24	84			
7s	8	85	1148	17220	208320	
8s	9	84	756	5040		
9s	5	48	756	14280	208320	
11s	3	10	28			
12s	3	21	210	1680		
13s	11	186	3948	83160	1249920	
14s	11	126	1344	10080		
17s	9	108	1260	10080		
18s	9	192	7028	316260	13749120	419973120
19s	17	348	7812	166320	2499840	
20s	7	58	504	3360		
21s	9	176	4424	104160	1666560	
23s	3	6				
25s	7	42	168			
27s	2	3				
28s	8	75	714	5040		
37s	15	210	2520	20160		
38s	1					
61s						
3h	7	54	420	2520		
5h	5	39	357	2520		
8h	3	9	21			
19h	4	19	98	420		
21h	15	306	7224	161280	2499840	
1a	21	4	7			
8a	1	1				
21a	5	44	448	3360		
29a	3	14	56			

Поскольку группы симметрии с изоморфными антисимметрическими характеристиками порождают одинаковое число групп типа M^m при любом фиксированном m, то числа N_m всех групп простой и кратной антисимметрии типа M^m, порождаемых федоровскими группами составляют:

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
1191	9511	109139	1640955	28331520	419973120

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Заморзаев, *Теория простой и кратной антисимметрии*, Штиинца, Кишинев, 1976

[2] А. М. Заморзаев, А. Ф. Палистрант, Э. И. Галярский, *Цветная симметрия, ее обобщения и приложения*, Штиинца, Кишинев, 1978,

[3] Н. В. Белов, Н. Н. Неронова, Т. С. Смирнова, 1651 *шубниковская группа*, Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР **2** (1955), 33–67

[4] Н. В. Белов, Н. Н. Неронова, Т. С. Смирнова, *Шубниковские группы*, Кристалограф **23** (1957), 315–325

[5] А. М. Заморзаев, *Обобщение федоровских групп*, Кристаллография **21** (1957), 15–20

[6] А. М. Заморзаев, *О 1651 шубниковской группе*, Кристаллография **7**, 6 (1962), 813–821

[7] А. М. Заморзаев, А. Ф. Палистран, *О числе обобщенных пространственных групп*, Кристаллография, **9**, 6 (1964), 778–782.

[8] А. М. Заморзаев, *О группах симметрии и различного рода антисимметрии*, Кристаллография, **8**, 3 (1963), 307–312.

[9] С. Яблан, *Группы простой и кратной антисимметрии бордюров*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (N.S.) **36** (50), (1984), 35–44.

Математички институт
Кнез Михаилова 35
11000 Београд
Југославија

(Поступила 24 06 1985)