PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 33 (47), 1983, pp. 73–82

SUR LES ESPACES DE GRASSMANN RÉELS, COMPLEXES ET QUATERNIONIQUES

Eftimie Grecu

Résumé. Dans cet article, on fait une étude sur les variétés de Grassmann complexes et quaternioniques, considérés comme espaces réels, à l'aide des automorphismes involutifs des groupes unitaires complexes et quaternioniques, en montrant d'abord comment se définissent les groupes unitaires complexes et quaternioniques comme des sous-groupes du groupe orthogonal $O(2n)$, respectivement $O(4n)$.

1. Introduction. Soit K le corps des nombres réels, complexes ou quaternioniques, E_K^n l'espace euclidien á n dimensions et $\Gamma_K^{n,m} = \Gamma$ la variété de Grassmann, c'est-à-dire l'espace m-plans de E_K^n, les coordonnées de E_K^n et les coefficients des équations qui définissent les m-plans étant des nombres du corps K.

On sait [**7**] que, du point de vue algébrique, les variétés Γ sont rationnelles.

Les propriétés topologiques des espaces de Grassmann ont été étudiées par Ehresmann [**4**], Pontryaguine [**10**], [**11**], Chern [**3**] et d'autres, qui les ont utilisées pour construire certains invariants topologiques des variétés différentielles fermées.

C'est à C. Teleman [**15**]) qu'on doit une étude des variétés Γ, considérées comme des espaces homogènes de groupes Lie compacts.

Ainsi, en utilisant une méthode indiquée en [**14**], il détermine la métrique de l'espace Γ, dans un système à $m(n-m)$ coordonnées hypercomplexes de Γ.

Il démontre ensuite que l'espace *Gamma* est homéomorphe et isométrique avec l'espace des matrices hermiriques, idempotentes d'ordre n et de rang m, sur le corps K. On obtient de cette façon un plongement bijectif et isométrique de l'espace Γ dans l'espace euclidien unitaire $E_K^{n^2}$. Ce plongement est continu, mais il n'est pas analytique, puisque les équations qui expriment qu'une matrice est hermitique ne sont pas analytiques.

AMS Subject Classification (1980): Primary 53C35, Secondary 20G20.

Key words and phrases: groupe unitaire, automorphisme involutif, variété non holonome, groupe de stabilité, representation parametrique rationnelle l'expression locale de la métrique de l'espace,

L'auteur mentionne qu'on peut arriver à une représentation analytique de la variété Γ si celle-ci est considérée comme une variété réelle et si, au lieu de l'espace unitaire $E_K^{n^2}$ on considère l'espace euclidien réel $E^{\rho n^2}$ où ρ est égal à 1, 2 ou 4, tout comme K est le corps des nombres réels complexes ou quaternioniques, mais on n'a pas obtenu effectivement une telle représentation.

Par la suite, il trouve une représentation paramétrique rationnelle de l'espace riemannien Γ dans l'espace hypercomplexe unitaire $E_K^{n^2}$, mais cette représentation n'est pas analytique. Cette représentstion conduit à une représentation paramétrique rationnelle de l'espace Γ, considéré comme variété réelle dans l'espace euclidien réel $E^{\rho n^2}$.

Dans [**16**], C. Teleman étudie, sous une forme générale, une classe d'espaces riemanniens symétriques, qui ont des propriétés communes intéressantes et il retrouve par cette voie une série de propriétés des variétés Grassmann réelles, complexes et quaternioniques.

Dans cette publication, on fera une étude sur les variétés de Grassmann complexes et quaternioniques, considŕés comme espaces réels, à l'aide des automorphismes involutifs des groupes unitaires complexes et quaternioniques.

On montrera tout d'abord comment se définissent les groupes unitaires complexes et quaternioniques commc des sous-groupes du groupe orthogonal $O(2n)$, respectivement $O(4n)$.

On détermine ensuite un automorphisme involutif pour chacun des groupes unitaires de la classe A, respectivement C de Killing, ainsi que le groupe des éléments fixes de ces automorphismes.

Aux automorphismes involutifs détérminés ci-dessus correspondent certains espaces riemanniens symétriques, si on prend le groupe des éléments fixes de ces automorphismes comme des sous-groupes de stabilité de ces espaces.

On démontre que ces espaces coincident avec les espaces de Grassmann complexes, respectivement quaternioniques et qu'ils peuvent plonger de façon tant non holonome que holonome dans les variétés des groupes unitaires complexes, respectivement quaternioniques.

En conclusion, on trouve une représentation paramétrique rationnelle des espaces de Grassmann complexes et quaternioniques ainsi que l'expression de l'élément d'arc, relative à la carte considérée. On précise que cette représentation est analytique.

2. Définition des groupes unitaires complexes et quaternioniques comme des sous-groupes du groupe orthogonal. Soit R, C, Q respectivement le corps des nombres réels, complexes et quaternioniques. On note avec $M_2(R)$ et $M_4(R)$ le corps des matrices réelles de deuxiéme ordre, respectivement quatrième, ayant la forme:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix}.$$

On sait [**13**] que les applications $f_1 : C \to M_2(R)$ et $f_2 : Q \to M_4(R)$ défininies de la façon suivante

$$f_1(a_0 + \sqrt{-1}a_1) = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{Vmatrix},$$

$$f_2(e_0a_0 + e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3) = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix}$$

sont des isomorphismes.Ici e_0, e_1, e_2, e_3 sont quatre unités hypercomplexes ayant la loi de la multiplication

$$e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2 = e_0, \;\; e_1e_2 = -e_2e_1 = e3, \;\; e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \\ e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2.$$

On notera avec $U_K(n)$ le groupe unitaire complexe ou quaternionique dans n variables, selon que $K = C$ ou $K = Q$. I1 est formé des matrices B d'ordre n, avec des éléments du corps K, qui satisfont la relation

$$BB^* = E_n \tag{1}$$

où B^* est l'adjointe de B et E_n est la matrice unité d'ordre n.

Soit $\rho = 1, 2, 4$ et le nombre a défini de la façon suivante

$$\alpha = \begin{cases} \;\;0 & ;\text{ pour } \;\rho = 1. \\ \;\;1 & ;\text{ pour } \;\rho = 2. \\ 2{,}3, 4 & ;\text{ pour } \;\rho = 4. \end{cases}$$

Notons avec $O_\rho(\rho n)$ le sous-groupe du groupe orthogonal $O_1(\rho n)$, dans ρn variables réelles, formé des matrices réelles A d'ordre n, qui satisfont les relations

$$A\tilde{A} = E_{\rho n}, \;\; AI_\alpha = I_\alpha A \quad (\rho = 1, 2, 4; \; \alpha = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

où $\tilde{A}$ signifie la transposée de la matrice A, I_0 est la matrice ùnité d'ordre n, I_1 est la matrice d'ordre $2n$,

$$I_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

et I_2, I_3, I_4 sont les matrices suivantes d'ordre $4n$

$$I_\beta = \begin{Vmatrix} i_\beta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i_\beta \end{Vmatrix}, \quad i_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad i_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$i_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (\beta = 2, 3, 4).$$

On voit que, pour $\rho = 1$, les relations (2) définissent le groupe orthogonal $O_1(n)$ et pour $\rho = 2$ on obtient le groupe simplectique orthogonal $O_2(2n)$, [**6**].

On veut démontrer maintenant que le groupe $U_c(n)$ est isomorphe avec $O_2(2n)$ et $U_Q(n)$ est isomorphe avec le groupe $O_4(4n)$.

Pour cela, on notera avec $M_n(C)$ l'algèbre des matrices complexes d'ordre n et avec $M_{2n}(R)$ l'algébre des matrices réelles d'ordre $2n$, ayant la forme

$$(3) \qquad A = \begin{Vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{Vmatrix}, \quad A_i^j = \begin{Vmatrix} a_{2i-1}^{2j-1} & a_{2i-1}^{2j} \\ & \\ a_{2i-1}^{2j} & a_{2i-1}^{2j-1} \end{Vmatrix}; \qquad (i, j = 1, \dots, n).$$

Notons de même avec $M_n(Q)$ l'algèbre des matrices quaternioniques d'ordre n et avec $M_{4n}(R)$ l'algèbre des matrice réelles d'ordre $4n$, ayant la forme

$$(3') \qquad A = \begin{Vmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_n^1 & \dots & A_n^n \end{Vmatrix}, \quad A_i^j = \begin{Vmatrix} a_{4i-3}^{4j-3} & a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-1} & a_{4i-3}^{4j} \\ a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-3} & a_{4i-3}^{4j} & a_{4i-3}^{4j-1} \\ a_{4i-3}^{4j-1} & a_{4i-3}^{4j} & a_{4i-3}^{4j-3} & a_{4i-3}^{4j-2} \\ a_{4i-3}^{4j} & a_{4i-3}^{4j-1} & a_{4i-3}^{4j-2} & a_{4i-3}^{4j-3} \end{Vmatrix}$$

Si on met $b_i^j = a_{2i-1}^{2j-1} + \sqrt{-1} a_{2i-1}^{2j}$, alors il est facile de voir que l'application $g_1 : M_n(C) \to M_{2n}(R)$, ainsi définie

$$g_1(B) = \begin{Vmatrix} f_1(b_1^1) & \dots & f_1(b_1^n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(b_n^1) & \dots & f_1(b_n^n) \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^n \end{Vmatrix}$$

est un isomorphisme.

On sait [**6**] que la matrice A donnée par (3) satisfait la relation $AI_1 = I_1 A$. On a ensuite la relation évidente $g_1(B^*) = \tilde{A}$, d'où il resulte que $g_1(BB^*) = A\tilde{A}$. Comme $g_1(E_n) = E_{2n}$, on déduit que $BB^* = E_n$ si, et seulement si, $A\tilde{A} = E_{2n}$.

En conséquence, l'image par l'isomorphisme g_1 du groupe $U_C(n)$ coincide avec le groupe $O_2(2n)$. C'est pourquoi, dans ce qui suit, on identifiera ces deux groupes.

Mettons maintenant $b_i^j = e_0 a_{4i-3}^{4j-3} + e_1 a_{4i-3}^{4j-2} + e_2 a_{4i-3}^{4j-1} + e_3 a_{4j-3}^{4j}$ considérons l'application $g_2 : M_n(Q) \to M_{4n}(R)$, définie de la façon suivante:

$$g_2(B) = \begin{Vmatrix} f_2(b_1^1) & \dots & f_2(b_1^n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_2(b_n^1) & \dots & f_2(b_n^n) \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ b_n^1 & \dots & b_n^n \end{Vmatrix}.$$

L'application g_2 est un isomorphisme, comme on peut facilement constater. La matrice A donnée par (3') satisfait les relations $AI_\beta = I_\beta A$, $(\beta = 2, 3, 4)$. Il y a aussi $g_2(B^*) = \tilde{A}$, donc $g_2(BB^*) = A\tilde{A}$. Parce que $g_2(E_n) = E_{4n}$, il résulte que $BB^* = E_n$, si, et seulement si, $A\tilde{A} = E_{4n}$.

On déduit que l'image par l'isomorphisme g_2 du groupe $U_Q(n)$ coïncide avec le groupe $O_4(4n)$. Donc, on peut considerer ces deux groupes comme étant identiques.

On sait [**14**] que la dimension des groupes $O_1(n)$, $O_2(2n)$, $O_4(4n)$ est respectivement égale à $N_1 = n(n-1)/2$, $N = n^2$, $N_4 = n(2n+1)$.

Un simple calcul nous montre que, en général,la dimension du groupe $O_\rho(\rho n)$ est $N_\rho = [(n+1)\rho - 2]n/2$, $(\rho = 1, 2, 4)$.

Dans l'espace euclidien réel $R^{\rho^2 n^2}(a_q^r)$, $(q, r = 1, \dots, \rho, n)$, les relations (2) définissent une variété algébrique réelle $V_{N\rho}$ à N_ρ dimenstions, nommée la variété du groupe $O_\rho(\rho n)$.

Cette variété est un espace de Riemann, dont la métrique est induite par la métrique de l'espace euclidien $R^{\rho^2 n^2}$, c'est-à-dire

$$ds^2 = Sp(dAd\tilde{A}) \tag{4}$$

où $Sp(\ )$ signifie la trace de la matrice entre paranthèses et dA est la différentielle de la matrice A.

3. Détermination d'un automorphisme involutif du groupe $O_\rho(\rho n)$ et de l'espsce symétrique correspondnut. On déterminera un automorphisme involuti du groupe $O_\rho(\rho n)$ parmi ses automorphismes intérieurs.

Soit σ_ρ un élément fixe du groupe $O_\rho(\rho n)$. On sait [**17**] que l'application $\varphi_\rho : O_\rho(\rho n) \to O_\rho(\rho n)$, définie romme il suit

$$\varphi_\rho(A) = \sigma_\rho A \sigma_\rho^{-1} \tag{5}$$

est un automorphisme intérieur du groupe $O_\rho(\rho n)$.

L'application φ_ρ est une involution de l'ensemble $O_\rho(\rho n)$ si, et seluement si, quel que soit $A \in O_\rho(\rho n)$ on a

$$\sigma_\rho^2 A = A\sigma_\rho^2.$$

Cette relation a lieu quand et seulement quand

$$\sigma_\rho^2 = \varepsilon E_{\rho n} \qquad (\varepsilon \neq 0).$$

Considérant les déterminants dans les deux membres, on obtient

$$|\sigma_\rho|^2 = \varepsilon^{\rho n}.$$

De $\sigma_\rho \tilde{\sigma}_\rho = E_{\rho n}$ il resulte $|\sigma_\rho|^2 = 1$, donc $\varepsilon^{\rho n} = 1$. Cette équation a les racines réelles $\varepsilon = \pm 1$, le signe “moins” étant possible seulement si le nombre n est pair.

Considérons $\varepsilon = 1$. On a $\sigma_\rho^2 = E_{\rho n}$, donc σ_ρ est une matrice involutive. Donc, la matrice σ_ρ qui satisfait le, relations

$$\sigma_\rho \tilde{\sigma}_\rho = E_{\rho n}, \ \ \sigma_\rho^2 = E_{\rho n}, \ \ \sigma_\rho I_\alpha = I_\alpha \sigma_\rho \tag{6}$$

engendre un automorphisme involutif du groupe $O_{\rho n}$. Il est facile de voir que la matrice σ_ρ donnée par

$$\sigma_\rho = \left\| \begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & 1 & & & \\ \hdashline & & & -1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\} \rho m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\} \rho(n-m) \end{array}$$

satisfait les relations (6), donc elle engendre un automorphisme involutif du groupe $O_\rho(\rho n)$.

L'ensemble des éléments fixes de l'automorphisme involutif (5) est formé par les matrice $A \in O_\rho(\rho n)$, qui satisfont la relation

$$A\sigma_\rho = \sigma_\rho A \tag{7}$$

comme on peut le vérifier très facilement. Cet ensemble est un sous-groupe du groupe $O_\rho(\rho n)$.

Pour déterminer la dimension de ce sous-groupe, on décompose les matrices A, I_α, σ_ρ en cellules de la manière suivante

$$A = \left\| \begin{array}{c:c} A_1 & A_3 \\ \hdashline \underbrace{A_4}_{\rho m} & \underbrace{A_2}_{\rho(n-m)} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\rho m \\ \}\rho(n-m) \end{array}, \quad I_\alpha = \left\| \begin{array}{c:c} I'_\alpha & O \\ \hdashline \underbrace{O}_{\rho m} & \underbrace{I''_\alpha}_{\rho(n-m)} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\rho m \\ \}\rho(n-m) \end{array},$$

$$\sigma_\rho = \left\| \begin{array}{c:c} E_{\rho m} & O \\ \hdashline O & -E_{\rho(n-m)} \end{array} \right\|.$$

Les relations (2), (7) sont alors équivalentes avec les relations suivantes

$$A_1 \tilde{A}_1 = E_{\rho m}, \ A_1 I'_\alpha = I'_\alpha A_1; \ \ A_2 \tilde{A}_2 = E_{\rho(n-m)}, \ A_2 I''_\alpha = I''_\alpha A_2; \ \ A_3 = O, \ A_4 = O.$$

Donc, le groupe des éléments fixes de l'automorphisme involutif (5) est isomorphe avec le produit direot $O_\rho(\rho m) \times O_\rho(\rho n - \rho m)$ et par conséquent, il a $[(m+1)\rho - 2]m/2 + [(n-m+1)\rho - 2](n-m)/2$ paramètres.

À l'automorphisme involutif (5) correspond un espace de Riemann symétrique $V_{p\rho}$ à $p_\rho = [(n+1)\rho - 2)n/2 - [(m+1)\rho - 2)m/2 - [(n-m+1)\rho - 2)(n-m)/2 - \rho m(n-m)$ dimensions, si on considère le groupe $O_\rho(\rho m) \times O_\rho(\rho n - \rho m)$ comme sous-groupe de stabilité de V_{p_ρ}, [**1**].

Pour donner une interprétation géométrique à l'espace V_{p_ρ}, on marquera avec $G_{\rho n, \rho m}$ l'espace de Grassmann des variétés linéaires à ρm dimensions de l'espace euclidien à ρn dimensions. Pour $\rho = 1, 2, 4$, ces variétés linéaires sont définies respectivement de la façon suivante:

$$x^k = \lambda_h^k, \qquad (h = 1, \ldots, m; \;\; k = m+1, \ldots, n) \tag{8}$$

$$x^{2k-1} = \lambda_h^{2k-1} x^{2h-1} - \lambda_h^{2k} x^{2h}, \;\; x^{2k} = \lambda_h^{2k} x^{2h-1} + \lambda_h^{2k-1} x^{2h} \tag{8'}$$

$$\begin{cases} x^{4k-3} = \lambda_h^{4k-3} x^{4h-3} - \lambda_h^{4k-2} x^{4h-2} - \lambda_h^{4k-1} x^{4h-1} - \lambda_h^{4k} x^{4h} \\ x^{4k-2} = \lambda_h^{4k-2} x^{4h-3} - \lambda_h^{4k-3} x^{4h-2} - \lambda_h^{4k} x^{4h-1} - \lambda_h^{4k-1} x^{4h} \\ x^{4k-1} = \lambda_h^{4k-1} x^{4h-3} - \lambda_h^{4k} x^{4h-2} - \lambda_h^{4k-3} x^{4h-1} - \lambda_h^{4k-2} x^{4h} \\ \quad x^{4k} = \lambda_h^{4k} x^{4h-3} - \lambda_h^{4k-1} x^{4h-2} - \lambda_h^{4k-2} x^{4h-1} - \lambda_h^{4k-3} x^{4h} \end{cases} \tag{8''}$$

L'espace $G_{\rho n, \rho m}$ a $\rho m(n-m)$ dimensions, puisque chaque variété linéaire (8), (8′), (8″) est définie respectivement par $m(n-m)$, $2m(n-m)$, $4m(n-m)$ coordonnées réelles (λ_h^k), $(\lambda_h^{2k-1}, \lambda_h^{2k})$, $(\lambda_h^{4k-3}, \lambda_h^{4k-2}, \lambda_h^{4k-1}, \lambda_h^{4k})$, correspondant à $\rho = 1, 2, 4$.

Considérons maintenant l'application $\psi_\rho : V_{p_\rho} \to G_{\rho n, \rho m}$ qui associe à chaque point (λ_h^k), $(\lambda_h^{2k-1}, \lambda_h^{2k})$, $(\lambda_h^{4k-3}, \lambda_h^{4k-2}, \lambda_h^{4k-1}, \lambda_h^{4k})$, de V_{p_1}, V_{p_2} V_{p_4} respectivement la variété linaire (8), (8′), (8″).

L'application ψ_ρ ainsi définie est une bijection de V_{p_ρ} sur $G_{\rho n, \rho m}$, comme on peut facilement le vérifier.

On peut également démontrer facilement que les espaces V_{p_ρ} et $G_{\rho n, \rho m}$ ont les groupes d'automorphismes et les sous-groupes de stabilité respectivement isomorphes. Par conséquent, ces espaces peuvent être considérés identiques.

On a donc le suivant

THÉORÈME. *L'espace riemannien symétrique V_{p_ρ}, qui correspond à l'automorphisme involutif (5) du groupe $O_\rho(\rho n)$, est l'espace de Grassmann $G_{\rho n, \rho m}$*

Remarques. 1°). Pour $\rho = 1, 2, 4$ on obtient respectivement l'espace de Grassmann réel, complexe et quaternionique, les deux derniers étant considérés comme des espaces réels. 2°). Pour $m = 1$, on obtient l'espace projectif à $\rho(n-1)$ dimensions, c'est-à-dire: si $\rho = 1$, on obtient l'espace projectif réel à $n-1$ dimensions, et si $\rho = 2, 4$ on obtient le modèle réel de l'espace projectif complexe, respectivement quaternionique à $n-1$ dimensions.

4. Plongement non holonome et holonome des espaces de Grassmann $G_{\rho n,\rho m}$. On se propose maintenant de démontrer que l'espace de Grassmann $G_{\rho n,\rho m}$ peut être considéré, en ce qui concerne l'élément d'arc, comme un sous-espace non holonome ou holonome de la variété V_{N_ρ} du groupe $O_\rho(\rho n)$.

Pour cela, on introduit dans l'espace euclidien réel $R^{\rho^2 n^2}(a_q^r)$ à $\rho^2 n^2$ dimensions, les formes de Pfaff.

$$dF = \tilde{A} dA. \tag{9}$$

De la première relation (2) et de (9) il résulte

$$d\tilde{F} = -dF. \tag{10}$$

Si, dans (9) on multiplie à gauche avec A et on prend en considération la première relation (2), on obtient

$$dA = AdF. \tag{11}$$

Des dernières relations (2) et de (9) résultent les relations

$$I_\alpha dF = dF I_\alpha. \tag{12}$$

La mètrique (4) de l'espace euclidien $R^{\rho^2 n^2}$ peut être exprimée seulement à l'aide des formes de Pfaff dF sous la forme

$$ds^2 = Sp(dF d\tilde{F}) \tag{13}$$

ce qui résulte de la première relation (2) et de (11).

Considérons maintenant le système de Pfaff

$$\sigma_\rho \cdot dF = -dF \cdot \sigma_\rho. \tag{14}$$

De (12) et (14) il est facile de voir que la matrice dF a p_ρ différentielles indépendantes. Donc, le système de Pfaff (14) définit un sous-espace non holonome $V_{N_\rho}^{p_\rho}$ de la variété V_{N_ρ} du groupe $O_\rho(\rho n)$.

La métrique de cet espace non holonome peut s'exprimer seulement à l'aide de p_ρ variables indépendantes.

En effet, considérons la matrice

$$T = A\sigma_\rho \tilde{A}. \tag{15}$$

De (10), (11) et (14) résulte la relation

$$dT = 2AdF\sigma_\rho \tilde{A} \tag{16}$$

qui nous montre que lo matrice T dépend de po paramètres.

De (13) et (16) on obtient la formule

$$ds^2 = Sp(dT d\tilde{T})/4 \tag{17}$$

qui peut être considérée comme étant la métrique de l'espace symétrique $V_{p_\rho} = V_{N_\rho}^{p_\rho}$. On a donc le suivant

THÉORÈME. *La métrigue de l'espace de Riemann symétrigue V_{p_ρ} coïncide avec la métrique de la variété non holonome $V_{N_\rho}^{p_\rho}$, définie sur l'espace V_{N_ρ} par le systéme de Pfaff* (14).

On obtient ainsi un plongement non holonome de l'espace V_{p_ρ} dans la variété V_{n_ρ} du groupe $O_\rho(\rho n)$.

Remarquons maintenant que de (2) et de (15) résultent les relations

$$T\tilde{T} = E_{\rho n}, \ \ TI_\alpha = I_\alpha T, \ \ \tilde{T} = T. \tag{18}$$

Comme les deux premières relations (18) coïncident avec les relations (2), on peut énoncer le suivant

THÉORÈME. *L'espace symétrigue V_p peut être obtenu par l'intersection de la variété V_{N_p} du groupe $O_\rho(\rho n)$ avec la variété linéaire $\tilde{A} = A$.*

On a ici ce qu'on appelle un plongement holonome de l'espace V_{p_ρ} dans la variété V_{N_ρ} du groupe $O_\rho(\rho n)$.

5. Représentation paramétrique rationnelle et métrique de l'espace V_{p_ρ}. En ce qui suit, on veut trouver une représentation paramétrique rationnelle des matrices T qui satisfait les relations (18), d'où va résulter que l'espace V_{p_rho} est une variété algébrique rationnelle.

Pour cela, on prend en considération une matrice X d'ordre ρn, qui satisfait les conditions

$$\tilde{X} = -X, \ \ I_\alpha X = XI_\alpha, \ \ \sigma_\rho X = -X\sigma_\rho. \tag{19}$$

Tout comme la matrice dF, la matrice X a po éléments indépendants, qui vont constituer les paramètres de la représentation.

Considérons maintenant la matrice

$$T = (E_{\rho n} + X)^{-1}(E_{\rho n}| \, E_{\rho n} - X)\sigma_\rho. \quad +X \neq 0 \tag{20}$$

qui dépend, évidemment, de p_ρ paramètres.

Tenant compte des relations (19), il est facile de voir que la matrice T donnée par (20) satisfait les relations (18).

Puisque l'inverse de la formule (20) est

$$X = (\sigma_\rho - T)(\sigma_\rho + T)^{-1}, \quad |\sigma_\rho + T| \neq O$$

on peut énoncer le suivant

THÉORÈME. *L'espace V_{p_ρ} est une variété algébrigue rationnelle et la formule* (20) *définit une représentation paramétrigue rationnelle du voisinage du point $T_0 = -\sigma_\rho$, formé par les points T avec $|\sigma_\rho + T| \neq 0$.*

En conclusion, on se propose de trouver l'expression locale de l'élément d'arc de l'espace V_{p_ρ}, relative à la carte définie par la formule (20).

Da (20) on obtient la différentielle de la matrice T, c'est-à-dire

$$dT = -2(E_{\rho n} + X)^{-1} dX (E_{\rho n} + X)^{-1} \sigma_\rho. \tag{21}$$

Tenant compte de (21) dans (17), on obtient l'expression locale de la métrique de l'espace symétrique V_{p_ρ}

$$ds^2 = -4 Sp[dX(E_{\rho n} - X^2)^{-1}]^2. \tag{22}$$

On observe que, dans les coordonnées x_q^r qui sont les éléments de la matrice X, la métrique de l'espace symétique V_{p_ρ} a une forme simple, analogue à la métrique de l'espace représentatif du groupe orthogonal, [**20**].

Mentionnons que pour $m = 1$ et $\rho = 1$, la formule (22) definit la métrique de l'espace projectif réel à $n - 1$ dimensions et pour $m = 1$ et $\rho = 2$, 4 la formule (22) nous donne le modèle métrique réel de l'espace projectif complexe, respectivement quaternionique à $n - 1$ dimensions, ces espaces étant considérés comme des variétés réelles à $2(n - 1)$, respectivement $4(n - 1)$, dimensions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Cartan, *Les espaces riemanniens symétriques*, Verh. Inst. Math. Kongr. Zürich **1** (1932), 55–74.

[2] E. Cartan, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, J. Math. Pures Appl. **8** (1929), 1–35.

[3] S. Cheln, *Characteristic classes of Hermitian manifolds*, Ann. of Math. **47** (1946).

[4] Ch. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Ann. of Math. **35** (1954), 2.

[5] G. Galburá, *Formes différentielles extérieures sur la variété de Grassmann yuaternioniyue*, Travaux du IV$^{\text{ème}}$ Congrès des mathématiciens roumains, Bucarest, 1956.

[6] E. Grecu, *Sur la variété du groupe orthogonal s ymplectique*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **23** (1978), 727–733.

[7] W. D. Hodge, *Methods of Algebraic Geometry, vol. II*, Cambridge, 1952.

[8] P. Lardy, *Sur la détermination des stractures réelles de groupes simples, finis et continus, au moyen des isomorphies involutives*, Comment. Math. Helv. **8** (1935-1936), 189–234.

[9] E. Martinelli, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo cuaternionale*, Ann. Mat. Pura. Appl. (4) **49** (1960), 74–90.

[10] L. Pontryaguine, *Les cycles caractéristiques des variétés différentiables*, Mat. Sb. **21 (63)** (1954), 2.

[11] L. Pontryaguine, *Certains invariants topologiyues des variétés de Riemann fermées (en russe)*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 1949.

[12] G. Romani, *Sulle metriche negli spazi proiettivi sul corpo reali, complesso e cccaternionale*, Rend. Mat., VI, ser 3 (1970), 141-160.

[13] B. A. Rozenfeld, *Neevklidovî geometrii*, Gos. Izd., Moskva, 1955.

[14] C. Teleman, *Sur une classe d'espaces riemanniens symétriques*, Rev. Roumaine Math. Pures. Appl. **2** (1957), 445–470.

[15] C. Teleman, *Sur les variétés de Crassmann*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **2** (1958), 205–224.

[16] C. Teleman, *Geometrie diferentială locală şi globală*, Editura Tehnică, Bucuresti, 1974, pp. 305–338.

[17] C. Teleman, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964, p. 12.

[18] I. D. Teodorescu, *Sur les variétés de Vranceanu plongées dans un espace euclidien à n dimensions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **24** (1979), 167–172.

[19] G. Vranceanu, *Sur cene classe d'espaces synrétriques.* Deutsche Akademie der Wissenschaft, Bericht dei Riemann-Tagung des Forschungsinstituts für Math., I, 1958, pp. 112–123.

[20] G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, Edition de l'Acad. de la RPR, Bucarest, 1964, pp. 35–38, 275–298.

Institut Polytechnique de Bucarest
Roumanie