PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 29 (43), 1981, pp. 65–73

ОБ ОГРАНИЧЕНОСТИ НОРМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ К МЕТОДАМ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Миодраг Ивович

(сообщено 2. 03. 1979)

Пусть $f(x)$-непрерывная 2 π-периодическая функция и пусть $\{\lambda_k^n\}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n;\ \ n = 1, 2, \dots)$ матрица действительных чисел.

При помощи матрици $\{\lambda_k^n\}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n;\ \ n = 1, 2, \dots)$, мы получим тригонометрическй многочлен

$$(1)\qquad U_n(f;x) = \frac{a_0\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

где a_0, a_k и b_k коэффициенты Фурье фукции $f(x)$.

Если в точке x существует $U_n(f;x)$ при всех n и существует $\lim_{n\to\infty} U_n(f;x)$, то мы будем говорить что метод задан при помощи (1), определенный матрицей $\{\lambda_k^n\}$ (λ-метод), сумирует ряд Фурье функции f в точке x.

λ-метод, определенный при помощи матрицы $\{\lambda_k^n\}$, называется F-перманентным если он суммирует ряд Фурье любой непрерывной 2 π-периодической функции во всех точках x, т.е. если

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} U_n(f;x) = f(x)$$

для всех непрерывных функций $f(x)$ в каждой точке.

Известно что

$$(\mathrm{A})\qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

(Б) $$\|U_k^n\| = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |K_n(t)|dt = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt$$

ядро λ-метода, являются неопходимыми и достаточными условиями F-перманентности этого метода суммирования.

Условия (А) и (В) сохраняются без изменений, если в равенстве (2) требовать, чтобы сходимость была равномерной.

Так как проверка выполнения (А) более проста чем проверка условия (Б), то условие (Б) было предметом исследований многих авторов. В их работах главным образом рассматривались достаточные условия выполнения условия (Б), так как точное исчисление нормы $\|U_n^\lambda\|$, $n = 1, 2, \dots$ возможно лишь в специалных случаях.

Наиболее простой случай у которого норму можно точно вычислить это случай метода у которого ядро $K_n(t)$ положительно, т.е.

$$K_n(t) = \frac{\lambda_o^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \geq 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Здесь норма

(3) $$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} |K_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} K_n(t)dt = \lambda_0^n$$

и она будет ограниченной в случаях ограничености коэффициента λ_0^n. Если выполняется и условие (А), то λ-метод будет F-перманентным.

Фейером было показанно что для положительности ряда

$$\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda_k^n \cos kt; \;\; \lambda_n^n \to 0, \;\; n \to \infty$$

достаточно выполнение условий

$$\Delta\lambda_k^n = \lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n \geq 0$$
$$\Delta^2\lambda_k^n = \lambda_k^n - 2\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2}^n \geq 0.$$

т.е. выпуклость последовательности λ_k^n.

Для того чтобы результат Фейера имел место и в случае финитних методов суммирования (методы определенные матрицей $\{\lambda_k^n\}$ ($k = 0, 1, \dots n$; $n = 1, 2, 3, \dots$), ясно что и разности

$$\Delta^2\lambda_{n-1}^n = \lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n,$$
$$\Delta^2\lambda_n^n = \lambda_n^n$$

должны быть положительными. Иными словами, последовательности

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n, 0$$

и

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n, 0, 0$$

должны быть выпуклыми.

Исследование ограниченности нормы приводит к исследованию интеграла.

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|dt \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{4}$$

В настоящей работе мы займемся достаточными условиями, налагаемыми на коэффициенты λ_k^n, при которых норма $\|U_n^\lambda\|$, $n = 1, 2, \dots$ ограниченна, пользуятсь разложением

$$\int_0^\pi |K_n(t)|dt = \int_0^\delta |K_n(t)|dt + \int_\delta^\pi |K_n(t)|dt, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

что до сих пор не пользовалось.

Так как

$$\int_\delta^\pi |K_n(t)|dt = 0(1), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при очень слабых предположениях, то мы занимаемся достаточными условиями для коэффициентов λ_n^n при которых интеграл

$$\int_0^\delta |K_n(t)|dt, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

будет ограниченным. Тем самым и норма $\|U_n^\lambda\|$, $n = 1, 2, \dots$ также будет ограниченной. Мы получим достаточные условия ограниченности нормы

$\|U_n^\lambda\|$, $n = 1, 2, 3, \dots$ более слабые чем уже известные условия такого рода, т.е. условия более слабые чем выпуклость последовательностей $\lambda_k^n(k = 0, 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots)$. Кроме того, мы получим и достаточные условия F-перманентности λ-метода суммирования.

Теорема. *Пусть для некоторого натурального числа p коэффициенты* $\lambda_k^n(k = 0, 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots;\ \lambda_{n+1}^n = 0$ *для* $k > n)$ *удовлетворяют условиям:*

(I) $$\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n \downarrow 0 \ \text{ для } k = p,\ p+1, \dots n+p,$$

(II) $$\sum_{k=0}^{n} |\Delta\lambda_k^n| = 0(1),\ \ \lambda_0^n = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда условия:

а) (I) *и* (II) *достаточны для того чтобы* $\|U_n^\lambda\| = O(1)$, $n = 1, 2, \dots,$

б) (I), (II) *и* (A) *достаточны для того чтобы* λ*-метод являлся* F*-перманентныым.*

Нетрудно заметить что условия (I) и (II) более слабые чем выпуклость.

Доказетельство теоремы. Пусть δ число такое что $p\delta < \frac{\pi}{2}$.

Норму $\|U_n^\lambda\|$ напишем в форме

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\delta |K_n(t)|dt + \int_\delta^\pi |K_n(t)|dt\right) = \frac{2}{\pi}(I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \int_0^\delta |K_n(t)|dt \quad I_2 = \int_\delta^\pi |K_n(t)|dt$$

и

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt.$$

Ограниченность нормы $\|U_n^\lambda\|$ можно исследовать при помощи ограниченности интегралов I_1 и I_2.

Ограниченност интеграла I_2 следует из преобразования Абеля ядра $K_n(t)$, где

$$I_2 = \int_\delta^\pi \left|\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt\right| dt =$$

$$= \int_\delta^\pi \left|\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} + \lambda_n^n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt \le$$

$$\leq \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^n|+|\lambda_n^n|\right). \tag{5}$$

Так как $\lambda_{n+1}^n=0$, то (5) можно написать в форме

$$I_2\leq \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^n|+|\lambda_n^n|\right)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{\delta}\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_k^n|, \tag{6}$$

в которой правая часть ограниченна (это следует из условия (II)),

Исследование ограниченности интеграла I_1 более сложное.

Так как $p\delta<\frac{\pi}{2}$, то и $\sin pt\geq 0$ для всех $t\in[0,\delta]$ и поэтому

$$\begin{aligned}
&K_n(t)\sin pt=\frac{\lambda_0^n}{2}\sin pt+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n\cos kt\sin pt=\\
&=\frac{\lambda_0^n}{2}\sin pt+\frac12\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n[\sin(k+p)t-\sin(k-p)t]=\\
&=\frac12\lambda_0^n\sin pt+\frac12\sum_{k=p+1}^{n+p}\lambda_{k-p}^n\sin kt-\frac12\sum_{k=-p+1}^{n-p}\lambda_{k+p}^n\sin kt= \qquad (7)\\
&=\frac12\lambda_0^n\sin pt+\frac12\sum_{k=p+1}^{n-p}(\lambda_{k-p}^n-\lambda_{k+p}^n)\sin kt-\frac12\sum_{k=n-p+1}^{n+p}\lambda_{k-p}^n\sin kt-\\
&-\frac12\sum_{k=-p+1}^{p}\lambda_{k+p}^n\sin kt=\frac12\sum_{k=p}^{n+p}(\lambda_{k-p}^n-\lambda_{k+p}^n)\sin kt-\frac12\sum_{k=-p+1}^{p-1}\lambda_{k+p}^n\sin kt.
\end{aligned}$$

Из того что сумму

$$-\frac12\sum_{k=-p+1}^{p-1}\lambda_{k+p}^n\sin kt$$

можно выписать в виде

$$\begin{aligned}
&-\frac12\sum_{k=-p+1}^{p-1}\lambda_{k+p}^n\sin kt=\frac12\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_k^n-\lambda_{2p-k}^n)\sin(p-k)t=\\
&=\frac12\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n)\sin kt,
\end{aligned} \tag{8}$$

то заменяя (8) в (7) мы получим

$$K_n(t)\sin pt=\frac12\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n)\sin kt+\frac12\sum_{k=p}^{n+p}(\lambda_{k-p}^n-\lambda_{k+p}^n)\sin kt$$

из чего следует:

$$K_n(t)=\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n)\sin kt+\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=p}^{n+p}(\lambda_{k-p}^n-\lambda_{k+p}^n)\sin kt.$$

Если обозначим

$$S_1=\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n)\sin kt$$
$$S_2=\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=p}^{n+p}(\lambda_{k-p}^n-\lambda_{k+p}^n)\sin kt,$$

то ядро $K_n(t)$ можно написать в виде

$$K_n(t)=S_1+S_2 \tag{9}$$

Сумма $|S_1|$ ограниченна при $t\in[0,\delta]$. Это следует из того что

$$\left|\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n)\sin kt\right|\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\left|\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n\right|\left|\frac{\sin kt}{\sin pt}\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}|\lambda_{p-k}^n-\lambda_{p+k}^n|,$$

поэтому что p конечное натуральное число, а коэффициенты λ_k^n ограниченны.

Сумма

$$S_3=\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_0^n-\lambda_{2p}^n)\sin kt$$

положительна и ограниченна. Её положительность следует из того что $\lambda_0^n-\lambda_{2p}^n>0$ и $\sin pt>0,\ t\in[0,\delta]$, для всех $k=1,2,\dots,p$. Положительность сумы S_3 следует из

$$\frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_0^n-\lambda_{2p}^n)\sin kt\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}(\lambda_0^n-\lambda_{2p}^n)=\frac{p-1}{2}(\lambda_0^n-\lambda_{2p}^n).$$

Ядро $K_n(t)$ при помощи сумм S_1, S_2 и S_3 можно выразить в виде

$$K_n(t)=(S_1-S_3)+(S_2+S_3). \tag{10}$$

Первая часть $(S_1 - S_3)$ ограниченна, так как S_1 и S_4 ограниченны. Если обозначим

$$S_1 - S_3 = M_p = M_p(t), \tag{11}$$

то и

$$\int_0^\delta |M_p(t)|dt = O(1)$$

при всех натуральных p.

Вторая часть в (10) будет

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2\sin pt}\sum_{k=1}^{n+p} \xi_k^n \sin kt,$$

где коэффициенты

$$\xi_k^n = \begin{cases} \lambda_0^n - \lambda_{2p}^n, & k = 1, 2, \dots, p-1; \\ \lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n, & k = p, p+1, \dots, n-p; \\ \lambda_{k-p}^n, & k = n-p+1, n-p+2, \dots, n+p. \end{cases}$$

Из того что мы предположили что $\xi_0^n \downarrow 0$ и из результатов Й. Караматы и М. Томича [1] следует положительность суммы $(S_2 + S_3)$, т.е.

$$S_2 + S_3 > 0 \;\text{ при всех }\; t \in [0, \delta]$$

Из (10) при помощи (11) следует

$$K_n(t) - M_p(t) = S_2 + S_3 > 0 \;\; t \in [0, \delta].$$

Интегрируя модуль левой части в (12), мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |K_n(t) - M_p(t)|dt &= \int_0^\delta (K_n(t) - M_p(t))dt = \\ &= \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{k}\sin k\delta - \int_0^\delta M_p(t)dt, \end{aligned} \tag{13}$$

а также и

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |K_n(t) + (-M_p(t))|dt &\geq \left|\int_0^\delta |K_n(t)| - |-M_p(t)|)dt\right| = \\ &= \left|\int_0^\delta |K_n(t)|dt - \int_0^\delta |-M_p(t)|dt\right|. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует

$$\left|\int_0^\delta |K_n(t)|dt - \int_0^\delta |-M_p(t)|dt\right| \leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt - \int_0^\delta M_p(t)dt$$

т.е.

$$-\frac{\lambda_0^n \delta}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^\delta M_p(t)dt + \int_0^\delta |-M_p(t)|dt \leq \int_0^\delta |K_n(t)|dt \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^\delta |-M_p(t)dt - \int_0^\delta M_p(t)dt$$

и поэтому

$$I_1 = \int_0^\delta |K_n(t)|dt \leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^\delta |-M_p(t)|dt - \int_0^\delta M_p(t)dt$$

Сумма

$$\frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt$$

ограниченна на $[0, \delta]$, что следует из преобразования Абеля

$$\frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta \lambda_k^n \sum_{v=1}^k \frac{\sin v\delta}{v} + \lambda_n^n \sum_{v=1}^n \frac{\sin v\delta}{v}. \tag{15}$$

Из того что

$$\sum_{v=1}^k \frac{\sin v\delta}{v} = O(1) \quad \text{при всех } k \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \lambda_k^n| = O(1), \quad \lambda_n^n = O(1), \quad n = 1, 2, \ldots$$

что следует из условия (II), мы получим ограничнность суммы (15). Из ограничености интегралов

$$\int_0^\delta |-M_p(t)|dt; \quad \int_0^\delta M_p(t)dt$$

и ограниченности суммы (15) следует ограниченность интеграла I_1.

Так как интегралы I_1 и I_2 ограниченны, то и норма

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}(I_1 + I_2)$$

ограниченна. Тем самым часть (a) теоремы доказана.

Если предположим и условие (A), то метод суммирования будет F-перманентным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Karamata, J. et Tomić, M. – *Considerations géométriques relatives aux polynomes et series trigonométriques*. Íbid. S. 157–175.

[2] С. А. Теляковский. *Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации*, Труды МИАН СССР, 1971 том 109, стр. 65–97.

[3] С. Р. Никольский *О линейных методах суммирования рядов Фурье* Известия АН СССР. 12 (1948), 259–278.

Stevana Sremca 2–A
11000 Beograd *(Jugoslavija)*