МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
45 (1993), 7–10

UDC 515.127.1
оригинални научни рад
научная работа

# СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТИ dm НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

**М. Елич**

**Резюме.** Изучаются свойства димензионной функции dm в классе нормальных пространств.

## 1. Введение

В основе понятия размерности dm топологических пространств лежат понятие нерва открытого покрытия и понятие размерности ds частично упорядоченных множеств в смысле Душник-Миллера.

Определение 1.1. (Аднаджевич) Пусть $X$ топологическое пространство. Положим, что: $\operatorname{dm}\emptyset = -1$; $\operatorname{dm} X = 0$ если в каждое открытое покрытие пространства $X$ можно вписать покрытие чей нерв совершенно неупорядоченное множество; $\operatorname{dm} X \leq n$ $(n > 0)$ если в каждое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства $X$ можно вписать орктытое покрытие $\mathcal{V}$ такое, что $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$; $\operatorname{dm} X = n$ если $\operatorname{dm} X \leq n$ а $\operatorname{dm} X \leq n-1$ не справедливо; $\operatorname{dm} X = \infty$ если неравенство $\operatorname{dm} X \leq n$ не имеет место ни для какого $n$, $1 \leq n < \infty$.

В работе будут использованы и следующие определения и предложения:

Определение 1.2. (Смирнов) Подпространство $A$ нормального пространства $X$ назовем нормально расположенным в $X$, если в любой окрестности $O$ множества $A$ найдётся множество $B \supseteq A$ типа $F_\sigma$ в $X$.

Предложение 1.3. *Всякое $F_\sigma$ множество $A$ нормального пространства $X$ есть нормальное подпространство от $X$.*

Лемма 1.4. (Чех) *Пусть $A$ подпространство наследственно нормального пространства $X$. Тогда для любого отркытого в $A$, конечного*

*AMS Subject Classification (1980)*: 54 F 45

Рад финансира Фонд за науку Србије преко пројекта Математичког института – број 0401А

*покрытия* $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *пространства* $A$ *существует система* $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *такая, что:* $V_i \subset U_i$, $V_i$ *открыти в* $X$ *и система* $\mathcal{V}$ *подобна системе* $\mathcal{U}$.

## 2. Свойства размерности dm

Предложение 2.1. *Пусть* $B$ *подмножество нормального пространства* $X$ *имеет в* $X$ *тип* $F_\sigma$. *Тогда* $\operatorname{dm} B \le 2 \operatorname{dm} X + 1$.

*Доказательство.* Пусть $B$ типа $F_\sigma$. Тогда $B$ можно представить в виде счетной суммы замкнутых в $X$ множеств $B_i$, $i = 1,\ 2,\ \dots$ и будеть $\operatorname{dm} B_i \le \operatorname{dm} X$ для каждого $i = 1,\ 2,\ \dots$ . В силу теоремы суммы $\operatorname{dm} B \le 2 \operatorname{dm} B_i + 1 \le 2 \operatorname{dm} X + 1$. ■

Лемма 2.2. *Пусть окрестность* $O$ *подмножества* $A$ *нормального пространства* $X$ *покрыта открытыми в* $X$ *множествами* $W_i$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$, *и существует такое нормальное подпространство* $B$ *пространства* $X$, *что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \le n$. *Тогда в покрытие* $\mathcal{V} = \{ W_i \cap A \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ *множества* $A$ *можно вписать открытое в* $A$ *покрытие* $\mathcal{U}$ *такое, что* $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \le n + 1$.

*Доказательство.* В покрытие $\mathcal{W} = \{ W_i \cap B \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ можно вписать конечное открытое в $B$ покрытие $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ такое, что $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{V}) \le n+1$. Тогда покрытие $\mathcal{U} = \{ V_i \cap A \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ множества $A$, открыто в $A$, вписано в $\mathcal{W}$ и $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \le n + 1$. ■

Предложение 2.3. *Пусть* $A$ *нормальное подпространство нормального пространства* $X$. *Тогда* $\operatorname{dm} A \le \operatorname{dm} X$ *тогда и только тогда когда для любой окрестности* $O$ *множества* $A$ *существуеть нормальное подпространство* $B$ *пространства* $X$ *такое, что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \le \operatorname{dm} X$.

*Доказательство* следует из леммы 2.2. ■

Из предложений 2.1 и 2.3 вытекает

Предложение 2.4. *Пусть подпространство* $A$ *нормально расположено в нормальном пространстве* $X$. *Тогда* $\operatorname{dm} A \le 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Предложение 2.5. *Пусть* $B$ *произвольное подпространство совершенно нормального пространства* $X$. *Тогда* $\operatorname{dm} B \le 2 \operatorname{dm} X + 1$.

*Доказательство.* Так как любое подпространство совершенно нормального пространства нормально расположено в $X$, доказательство следует из предложения 2.4. ■

Предложение 2.6. *Пусть* $X = d \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *дискретна сумма нормальных пространств. Тогда* $\operatorname{dm} X \le \sup_{\alpha \in A} \operatorname{dm} X_\alpha$.

*Доказательство.* Пусть $\operatorname{dm} X_\alpha \le n$, $\alpha \in A$, и $\mathcal{W} = \{ W_i \mid i = 1, 2, \dots, k \}$ конечное открытое покрытие пространства $X$. Для каждого $\alpha \in A$ в покрытие $\{W_i \cap X_\alpha \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ впишем, открытое в $X_\alpha$ покрытие $\mathcal{V}_\alpha$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_\alpha) \leq n+1$. Тогда система $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$ есть открытое покрытие от $X$, вписанное в покрытие $\mathcal{W}$ и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$ (так как $X_\alpha$ дизъюнктны, см. [2]). Оттуда $\mathrm{dm}\, X \leq n$. ■

Предложение 2.7. *Пусть $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, наследственно нормальное пространство. Пусть $\mathrm{dm}\, A \leq n$ и $\mathrm{dm}\, B \leq n$ $(n > 0)$, где $A$ замкнутое а $B$ открытое подпространство от $X$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq n$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие пространства $X$. Тогда $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ покрывает $A$ а $\mathcal{U}_B = \{U_i \cap B \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ покрывает $B$. Так как $\mathrm{dm}\, A \leq n$ и $\mathrm{dm}\, B \leq n$, в покрытие $\mathcal{U}_A$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_A$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_A) \leq n+1$ а в покрытие $\mathcal{U}_B$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_B$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_B) \leq n+1$. По лемме 1.4 существуют системы $\mathcal{V} = \{V_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ и $\mathcal{W} = \{W_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ такие, что $V_i$ и $W_i$ открыты в $X$, $V_i \subset U_i \cap A$, $W_i \subset U_i \cap B$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$ и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. Так как $V_i \cap W_i = \emptyset$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем $\mathrm{ds}\mathcal{N}(V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_k) \leq n+1$, откуда $\mathrm{dm}\, W \leq n$. ■

Предложение 2.8. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть $A$ замкнуто в $X$, $\mathrm{dm}\, A \leq n$ $(n > 0)$ и $\mathrm{dm}\, B = 0$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq n+2$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие пространства $X$. Тогда $\mathcal{U}' = \{U_i \cap A \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие от $A$. Так как $\mathrm{dm}\, A \leq n$ то в это покрытие можно вписать конечное открытие в $X$ (см. [2]) покрытие $\mathcal{V}' = \{V_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}') \leqslant n+1$. Обозначим $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ замкнутое подпространство от $B$. Тогда $\mathrm{dm}\, F = 0$ и существует система $\mathcal{W} = \{W_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ так, что $B \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i$, $\mathcal{W}$ вписано в $\mathcal{U}$, $W_i$ открыты и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq 2$. Обозначим $\eta = \{W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k\}$ открытое конечное покрытие от $X$ вписано в $\mathcal{U}$. Будет $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\eta) \leq n+3$ и оттуда $\mathrm{dm}\, X \leq n+2$. ■

Нетрудно показать следующие два предложения:

Предложение 2.9. *Пусть $X = A \cup B$ наследственно нормальное пространство и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $\mathrm{dm}\, A = 0$ и $\mathrm{dm}\, B = 0$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq 1$.*

Предложение 2.10. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть $\mathrm{dm}\, A = 0 = \mathrm{dm}\, B$ и $A$ замкнуто в $X$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq 3$.*

Предложение 2.11. *Пусть $X$ топологическое пространство.* $\mathrm{dm}\, X = 0$ *если и только если* $\mathrm{Ind}\, X = 0$.

*Доказательство.* Так как $\mathrm{Ind}\, X \leq \dim X$ и $\dim X \leq \mathrm{dm}\, X$ то $\mathrm{Ind}\, X \leq \mathrm{dm}\, X$. Пусть $\mathrm{Ind}\, X = 0$. Тогда $X$ нормальное пространство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ произвольное открытое покрытие от $X$. Существует комбинаторно вписано в $\mathcal{U}$ замкнутое покрытие $\mathcal{V}$. Так как $\mathrm{Ind}\, X = 0$

существует вписано в $\mathcal{U}$ покрытие $\mathcal{W}$ которое состоит из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств (см. [1]). Нерв этого покрытия совершенно неупорядоченное множество. Потому $\operatorname{dm} X = 0$. ∎

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Пусть $X$ наследственно нормальное пространство. Тогда следующие свойства эквивалентны между собой:*

*(1) для каждого подпространства $A$ от $X$, имеем $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$;*

*(2) для каждого открытого подпространства $\Gamma$ от $X$, имеем $\operatorname{dm} \Gamma \leq \operatorname{dm} X$.*

*Доказательство.* (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $X$ выполнает свойство (2). Пусть $A$ подпространство от $X$ и $\mathcal{U} = \{\, U_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ конечное открытое покрытие от $A$. Пусть $V_i$ для $i = 1,\ 2,\ \dots,\ k$ открытие подмножества от $X$ такие, что $U_i = A \cap V_i$. Так как открытое подпространство $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ от $X$ имеет $\operatorname{dm} \Gamma \leq \operatorname{dm} X = n$ $(0 < n < \infty)$ то существует конечное открытое подпокрытие $\mathcal{W}$ от $\{\, V_i \mid i = 1, 2 \dots, k \}$ такое, что $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n + 1$. Тогда семейство $\mathcal{W}|A$ есть конечное открытое покрытие от $A$, вписанное в $\mathcal{U}$ и $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{W}|A) \leq n + 1$. Оттуда $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$. ∎

ЛИТЕРАТУРА


[**1**] П. С. Александров, *Введение в теорию размерносты*, Наука, Москва 1973

[**2**] Д. Аднађевић, *О једној врсти димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 2, 1965, 137–146

[**3**] Д. Аднађевић, *Нека својства једне врсте димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 4, 1965, 239–243

[**4**] Д. Аднаджевич, *Некоторые свойства размерности* dm *нормальных пространств*, Мат. весник **3 (18)**, 4, 1966, 261–264

[**5**] Г. Л. Замбахидзе, Ф. С. Товодрос, *О размерности* dm *и её применениях в классификации локально связных континуумов*, Сооб. АНГССР **84**, 1, 1976, 45–51


(поступило 29.10.1992.)

Пољопривредни факултет
Немањина 6

11080 Земун, Југославија