Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 799–808

Sur le groupe des unités de corps de nombres de degré 2 et 4

par M'hammed ZIANE

Résumé. Nous déterminons sous certaines hypothèses, un système fondamental d'unités du corps non pur $K = \mathbb{Q}(\omega)$ et de son sous-corps quadratique, où ω est solution du polynôme

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4,$$

avec $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$, $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$, $d|D$, d, $D \in \mathbb{N}$, non nuls.

Abstract. We give under certain hypotheses, a fundamental system of units of the field $K = \mathbb{Q}(\omega)$ and its quadratic subfield, where ω is a root of the polynomial

$$f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4,$$

with $M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3$, $M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2$, d, $D \in \mathbb{N}$, $d|D$.

1. Introduction.

Si K est une extension algébrique de degré $n = r + 2s$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, où r est le nombre de plongements réels et $2s$ le nombre de plongements complexes de K dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, Dirichlet a établi que le groupe U_K des unités de K est engendré par $r+s-1$ unités. Le groupe U_K est dit alors de rang $r + s - 1$. Un ensemble de générateurs $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r+s-1}\}$ forme ce qu'on appelle un système fondamental d'unités du corps K. W. Ljunggren [6] a donné une procédure pour construire un système fondamental d'unités d'un corps quartique pur. Nous généralisons aisément ses résultats à tout corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ de degré 4, non pur, ayant un sous-corps quadratique réel K^* et dont le groupe des unités est de rang 2. Pour tout élément ξ de K, appelons $\xi^{(1)}$ le conjugué de ξ, la notation "(1)" dénotant l'opération "conjugaison"laissant fixe K^*.

Théorème 1.1. *Soit K un corps quartique réel dont le groupe des unités est de rang 2 et qui admet un sous-corps quadratique. Soit ε_0 la plus petite*

Manuscrit reçu le 9 juin 2004.
Thèmes dans le cadre du projet de recherche CNRST/CNRS entre Oujda et Limoges

unité supérieure strictement à 1 de K vérifiant $\varepsilon_0\varepsilon_0^{(1)} = 1$. *Si* $\varepsilon_1 > 1$ *est une autre unité du corps K vérifiant* $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$, *alors*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0^q, \ q \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.2. *Soit K un corps quartique réel dont le groupe des unités est de rang 2 et qui admet un sous-corps quadratique. Soit* η *l'unité fondamentale du sous-corps quadratique réel* K^* *de K,* ξ *une unité de K telle que* $\xi\xi^{(1)} = \pm\eta$ *(ou* $\pm\eta^{-1}$*), et* ε_1 *la plus petite unité de K supérieure strictement à 1 vérifiant* $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$. *Alors* $\{\xi, \ \varepsilon_1\}$ *est un système fondamental d'unités du corps K.*

Dans [5], C. Levesque a exhibé une unité du corps quartique $K = \mathbb{Q}(\omega)$ de la forme

$$\varepsilon = 1 + \frac{D}{d}\omega - \frac{1}{d}\omega^2,$$

où ω est solution du polynôme $f(X) = X^4 + d^{-2}M_6X^2 - M_4$, avec

$$M_4 = D^4 + 4D^2d + 2d^2 \qquad \text{et} \qquad M_6 = D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3.$$

Dans cet article, nous déterminons, sous certaines hypothèses, un système fondamental d'unités du corps $\mathbb{Q}(\omega)$ et l'unité fondamentale de son sous-corps quadratique. Posons $\Delta = d^{-4}M_6^2 + 4M_4$ et soit $T = D^2/d$. Alors

$$\frac{\Delta}{d^2} = T^6 + 12T^5 + 54T^4 + 112T^3 + 109T^2 + 52T + 12.$$

Supposons d'abord que T est pair : $T = 2S$. Alors $\Delta/d^2 \equiv 0$ (mod 4). Posons

$$M = \frac{\Delta}{4d^2} = 16S^6 + 96S^5 + 216S^4 + 224S^3 + 109S^2 + 26S + 3.$$

Alors $M \equiv 2$ ou 3 (mod 4).

Supposons maintenant que T est impair : $T = 2S + 1$. Nous avons $\frac{\Delta}{d^2} \equiv 0$ (mod 16). Posons

$$M = \frac{\Delta}{16d^2} = 4S^6 + 36S^5 + 129S^4 + 234S^3 + 226S^2 + 111S + 22.$$

Alors $M \equiv 0$, 1 ou 2 (mod 4).

Nous donnerons tout d'abord le développement en fraction continue de $\Omega = \sqrt{M}$ et nous utiliserons des résultats donnés dans [1] et [2] pour déterminer l'unité fondamentale de $K^* = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{M}\right)$.

2. L'unité fondamentale de K^*

Soit T pair. Nous avons $\left[\sqrt{M}\right] = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1$. De plus,

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ Q_0 = 1, \\ b_0 = \left[\sqrt{\Omega}\right]. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1, \\ Q_1 = 4S^2 + 8S + 2, \\ b_1 = [x_1] = 2S + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1, \\ Q_2 = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1, \\ b_2 = [x_2] = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_3 = 4S^3 + 8S^2 + 3S, \\ Q_3 = 4S^2 + 8S + 3, \\ b_3 = [x_3] = 2S. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = 4S^3 + 8S^2 + 3S, \\ Q_4 = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1, \\ b_4 = [x_4] = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_5 = 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1, \\ Q_5 = 4S^2 + 8S + 2, \\ b_5 = [x_5] = 2S + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_6 = 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1, \\ Q_6 = 1, \\ b_6 = [x_6]. \end{cases}$$

Comme $P_3 = P_4$, le développement en fractions continues de $\sqrt{M}$, admet une période de longueur $l = 6$.

Soit T impair. Nous avons $\left[\sqrt{M}\right] = 2S^3 + 9S^2 + 12S + 4$. De plus,

$$\begin{cases} P_0 = 0, \\ Q_0 = 1, \\ b_0 = [\Omega]. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = 2S^3 + 9S^2 + 12S + 4, \\ Q_1 = 2S^3 + 10S^2 + 15S + 6, \\ b_1 = [x_1] = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = S^2 + 3S + 2, \\ Q_2 = 2S^3 + 8S^2 + 9S + 3, \\ b_2 = [x_2] = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_3 = 2S^3 + 7S^2 + 6S + 1, \\ Q_3 = 4S^2 + 12S + 7, \\ b_3 = [x_3] = S. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = 2S^3 + 5S^2 + S - 1, \\ Q_4 = 4S^3 + 13S^2 + 11S + 3, \\ b_4 = [x_4] = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} P_5 = 2S^3 + 8S^2 + 10S + 4, \\ Q_5 = S^2 + 3S + 2, \\ b_5 = [x_5] = 4S + 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_6 = 2S^3 + 8S^2 + 10S + 4, \\ Q_6 = 4S^3 + 13S^2 + 11S + 3, \\ b_6 = [x_6]. \end{cases}$$

Comme $P_5 = P_6$, le développement en fraction continue de $\sqrt{M}$ admet une période de longueur $l = 10$.

Théorème 2.1. *Lorsque T est pair, posons*

$$A = 32S^6 + 192S^5 + 440S^4 + 480S^3 + 256S^2 + 64S + 7,$$

$$B = 8S^3 + 24S^2 + 20S + 4.$$

Lorsque T est impair, posons

$$A = 32S^6 + 288S^5 + 1040S^4 + 1920S^3 + 1906S^2 + 966S + 197,$$

$$B = 16S^3 + 72S^2 + 100S + 42.$$

Supposons que M est libre de carrés. Alors l'unité fondamentale du corps quadratique K^* est

$$\eta \ = \ A + B\sqrt{M} \ = \ \left(A + \frac{BM_6}{2d^3}\right) + \frac{B}{d}\omega^2.$$

Démonstration. Soit T pair, $M \not\equiv 1$ $(mod\ 4)$. Alors

$$\eta = \prod_{i=1}^{l} x_i = \prod_{i=1}^{6} x_i.$$

Or

$$x_{i-1}x_i = \frac{Q_i + b_{i-1}(\Omega + P_i)}{Q_i}, \qquad (i = 2,\ 4,\ 6).$$

Donc

$$\eta = \left(\frac{Q_2 + b_1(\Omega + P_2)}{Q_2}\right)\left(\frac{Q_2 + b_3(\Omega + P_4)}{Q_2}\right)\left(\frac{1 + b_1(\Omega + P_1)}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{Q_2^2}\left(Q_2 + b_1(\Omega + P_2)\right)\left(Q_2 + b_3(\Omega + P_4)\right)\left(1 + b_1(\Omega + P_1)\right).$$

Or

$$Q_2 + b_1(\Omega + P_2) = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1 + (2S+1)(\Omega + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 1),$$

$$Q_2 + b_3(\Omega + P_4) = 8S^3 + 16S^2 + 6S + 1 + (2S)(\Omega + 4S^3 + 8S^2 + 3S),$$

$$1 + b_1(\Omega + P_1) = 1 + (2S+1)(\Omega + 4S^3 + 12S^2 + 9S + 1).$$

En tenant compte de $\Omega^2 = M$, nous aurons le résultat. Si T est impair, nous avons $Q_t \neq 4$ pour tout t, et c'est alors un exercice simple pour trouver, comme précédement, l'unité fondamentale du corps K^*.

3. Sur les entiers d'un corps réel de degré quatre.

Dans la suite nous nous intéressons au cas où T est pair. Le polynôme $f(X)$ est irréductible car

$$\left(d^{-2}M_6\right)^2 < d^{-4}M_6^2 + 4M_4 < (d^{-2}M_6 + 1)^2.$$

La résolvante cubique de $f(X)$ est

$$R(X) = \left(X - \left(d^{-2}M_6\right)\right)\left(X^2 + 4M_4\right),$$

dont les racines sont d'une part $\alpha = d^{-2}M_6$ et d'autre part $\beta,\ \gamma$, deux racines de $\left(X^2 + 4M_4\right)$ qui sont complexes. Donc

$$[\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\gamma):\ \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta):\ \mathbb{Q}] = 2.$$

Par conséquent $\mathrm{Gal}(f(X))$ est soit Z_4, soit D_4, voir([4], page 273). Or les racines de $f(X)$ sont ω, $-\omega$, $i\theta$, $-i\theta$ où

(1)

$$\omega = \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}},$$

qui ne sont pas toutes réelles donc $\mathrm{Gal}(f(X))$ est D_4. De plus le polynôme $f(X)$ admet deux racines réelles et deux racines complexes ; donc le rang du groupe des unités U_K du corps K est 2. Nous désignons par

(2) $$\omega^{(0)} = \omega, \quad \omega^{(1)} = -\omega, \quad \omega^{(2)} = i\theta, \quad \omega^{(3)} = -i\theta,$$

les quatre conjugués de ω sur $\mathbb{Q}$. Nous reprenons ici une idée de Stender [7] : Soit α un entier algébrique du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Comme $K = K^*(\omega)$, alors

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2\omega,$$

$$\alpha^{(1)} = \beta_1 - \beta_2\omega \quad \text{où } \beta_i \in K^*.$$

Donc

$$\alpha + \alpha^{(1)} = 2\beta_1 \quad \text{et} \quad \alpha - \alpha^{(1)} = 2\beta_2\omega.$$

Par conséquent $2\beta_1$ et $2\beta_2\omega^2$ sont aussi des entiers algébriques de K^*. Appliquons ceci dans notre cas. Nous avons $K^* = \mathbb{Q}(\sqrt{M})$. Comme $M \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, alors $\{1,\ \sqrt{M}\}$ est une base entière de K^*. Donc

$$\begin{cases} 2\beta_1 = x_1 + y_1\sqrt{M}, \\ 2\beta_2\omega^2 = x_2 + y_2\sqrt{M}, \quad \text{où } x_i,\ y_i \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

d'où

$$\omega\alpha = \beta_1\omega + \beta_2\omega^2 = \omega\left(\frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2}\sqrt{M}\right) + \frac{x_2}{2} + \frac{y_2}{2}\sqrt{M}.$$

Nous avons

$$\sqrt{M} = \frac{1}{2d}\sqrt{\triangle} = \frac{1}{2d}\left(2\omega^2 + d^{-2}M_6\right).$$

Donc

$$\omega\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(x_2 + \frac{M_6}{2d^3}y_2\right) + \left(x_1 + \frac{M_6}{2d^3}y_1\right)\omega\right] + \frac{1}{2}\left[y_2\left(\frac{\omega^2}{d}\right) + y_1\left(\frac{\omega^2}{d}\right)\omega\right]$$

Notons que ω^2/d est un entier algébrique car ω^2/d est solution du polynôme $Y^2 + \frac{M_6}{d^3}Y - \frac{M_4}{d^2}$ à coefficients entiers ; notons aussi que $(2d^3)|M_6$ vu que $2|(T^3+T)$. Donc pour tout entier algébrique α du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$, $\omega\alpha$ s'écrit sous la forme

$$\omega\alpha = \frac{1}{2}\left(x_0 + x_1\omega + x_2\left(\frac{\omega^2}{d}\right) + x_3\left(\frac{\omega^3}{d}\right)\right) \quad \text{avec} \quad x_i \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Proposition 3.1. *Si α est un entier algébrique tel que $\alpha\alpha^{(1)} = 1$, alors dans l'égalité (3), nous avons toujours*

$$x_2 \neq 0. \tag{4}$$

Démonstration. Pour un entier algébrique α, nous avons

$$\left\{\begin{array}{lll} (\omega\alpha)^{(0)} = \omega\alpha & = \frac{1}{2}\left(x_0 + x_1\omega + x_2\frac{\omega^2}{d} + x_3\frac{\omega^3}{d}\right), \\ (\omega\alpha)^{(1)} = -\omega\alpha^{(1)} & = \frac{1}{2}\left(x_0 - x_1\omega + x_2\frac{\omega^2}{d} - x_3\frac{\omega^3}{d}\right), \\ (\omega\alpha)^{(2)} = i\theta\alpha^{(2)} & = \frac{1}{2}\left(x_0 + x_1 i\theta - x_2\frac{\theta^2}{d} - x_3 i\frac{\theta^3}{d}\right), \\ (\omega\alpha)^{(3)} = -i\theta\alpha^{(3)} & = \frac{1}{2}\left(x_0 - x_1 i\theta - x_2\frac{\theta^2}{d} + x_3 i\frac{\theta^3}{d}\right), \end{array}\right. \tag{5}$$

avec $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}$. De l'équation (5), nous tirons

$$\left(\frac{\omega^2 + \theta^2}{d}\right)x_2 = \omega\alpha - \omega\alpha^{(1)} - i\theta\alpha^{(2)} + i\theta\alpha^{(3)}.$$

Donc

$$|x_2| \leq \frac{d}{\omega^2 + \theta^2}\left(\sum_{i=0}^{3}\left|\omega^{(i)}\alpha^{(i)}\right|\right). \tag{6}$$

Soit α un entier algébrique tel que $\alpha\alpha^{(1)} = 1$. Alors $(\omega\alpha)(\omega\alpha)^{(1)} = -\omega^2$. Donc, en comparant les coefficients de ω^2, nous obtenons

$$2dx_0x_2 - 4x_2^2M_6 - d^2x_1^2 + 2d^{-2}x_1x_3M_6 - x_3^2M_4 - d^{-4}x_3^2M_6^2 = -(4d)^2.$$

Si $x_2 = 0$, alors $d^2x_1^2 - 2d^{-1}x_1x_3M_6 + x_3^2M_4 + d^{-4}x_3^2M_6^2 = -4d^2$, i.e.

$$\left(dx_1 - d^{-2}x_3M_6\right)^2 = -x_3^2M_4 - 4d^2,$$

ce qui est impossible. Donc si α est un entier algébrique tel que $\alpha\alpha^{(1)} = 1$, alors dans l'égalité (3), nous avons $x_2 \neq 0$.

4. Un système fondamental d'unités de $\mathbb{Q}(\omega)$.

Lemme 4.1. *Soit η l'unité fondamentale du sous-corps quadratique K^* du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Alors $\sqrt{\eta} \notin K$.*

Démonstration. Comme la longueur du développement en fraction continue de $\sqrt{M}$ est paire, nous avons que $N_{K^*/\mathbb{Q}}(\eta) = 1$. D'après le théorème 90 de Hilbert (voir ([2], page 171), il existe $\alpha, \beta \in K^*$ (β étant le conjugué algébrique de α) tels que

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2}{c}.$$

Supposons que $\sqrt{\eta} \in K$, alors $\sqrt{c} \in K$, i.e. $\sqrt{c} \in K^*$, et on aurait que $\dfrac{\alpha}{\sqrt{c}} \in K^*$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\dfrac{\alpha^2}{c}$ est l'unité fondamentale du corps quadratique K^*.

Lemme 4.2. *Soit $X = 64S^6 + 384S^5 + 880S^4 + 976S^3 + 552S^2 + 152S + 16$. Alors*

$$0 < \eta < X \qquad \textit{et} \qquad 0 < \varepsilon^2 < 8S.$$

Démonstration. D'une part, nous avons

$$\eta = A + B\Omega < A + B\left(\left[\sqrt{M}\right] + 1\right) < 2B\left(\left[\sqrt{M}\right] + 1\right) = X.$$

D'autre part,

$$\omega = \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{d^{-4}M_6^2 + 4M_4}}{2}} < \sqrt{\frac{-d^{-2}M_6 + \sqrt{(d^{-2}M_6 + 2)^2}}{2}} < 1.$$

Donc

$$0 < \varepsilon < 1 + \frac{D}{d}\omega < 1 + \frac{D}{d} < 2\frac{D}{d}.$$

□

Définition. On dit que le corps K est de *seconde espèce* s'il existe une unité ξ de K telle que

$$\xi\xi^{(1)} = \pm\eta \quad \text{ou} \quad \xi\xi^{(1)} = \pm\eta^{-1}.$$

On dit que le corps K est de *première espèce* dans le cas contraire.

Lemme 4.3. *Le corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ est toujours de seconde espèce.*

Démonstration. Nous avons

$$\varepsilon\varepsilon^{(1)} = \frac{d^2 + M_4}{d^2} - \left(\frac{2d + D^2 + d^{-2}M_6}{d^2}\right)\omega^2.$$

Utilisant

$$\omega^2 = d\sqrt{M} - \frac{d^{-2}M_6}{2},\ M_4 = d^2(4S^2+8S+2),\ M_6 = d^3(8S^3+24S^2+18S+2),$$

nous avons

$$N_{K/K^*}(\varepsilon) = \varepsilon\varepsilon^{(1)} = A - B\Omega = \eta^{-1}, \tag{7}$$

Donc K est de seconde espèce. □

Proposition 4.4. *L'unité $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta$ est la plus petite unité > 1 du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ vérifiant $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$.*

Démonstration. Notons que

$$\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = N_{K/K^*}(\varepsilon_1) = (\varepsilon\varepsilon^{(1)})^2\eta^2 = 1.$$

Nous avons $\varepsilon > \varepsilon^{(1)}$. Donc $\varepsilon^2 > \varepsilon\varepsilon^{(1)} = \eta^{-1}$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon^2\eta > 1$. Montrons que ε_1 est la plus petite unité > 1 de K qui vérifie $\varepsilon_1\varepsilon_1^{(1)} = 1$. Sinon, soit ε_0 cette plus petite unité. Alors d'après le théorème 1.1, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^n$. Nous avons $n \neq 2$, car si $\sqrt{\varepsilon_1} \in K$, alors $\sqrt{\eta} \in K$, ce qui n'est pas le cas d'après le lemme 4.1. Supposons $n \geq 3$. D'après l'équation (3), ε_0 s'écrit sous la forme

$$\omega\varepsilon_0 = \frac{1}{2d}(x_0 + x_1\omega + x_2\omega^2 + x_3\omega^3), \quad \text{où} \quad x_i \in \mathbb{Z}.$$

D'après l'équation (6), nous avons

$$|x_2| \leq \frac{d}{\omega^2+\theta^2}\left(\sum_{i=0}^{3}\left|\omega^{(i)}\right|\left|\varepsilon_0^{(i)}\right|\right) = \frac{d}{\omega^2+\theta^2}\left(\sum_{i=0}^{3}\left|\omega^{(i)}\right|\sqrt[n]{\left|\varepsilon_1^{(i)}\right|}\right).$$

Or

$$\left|\varepsilon_1^{(1)}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\varepsilon_1^{(2)}\right| = \left|\varepsilon_1^{(3)}\right| = 1.$$

Alors

$$|x_2| \leq \frac{d}{\omega^2+\theta^2}\left(1 + 2\theta + \sqrt[n]{|\varepsilon_1|}\right) \leq \frac{d}{\omega^2+\theta^2}\left(1 + 2\theta + \sqrt[3]{|\varepsilon_1|}\right). \tag{8}$$

Posons

$$\begin{cases} Y = 64S^6 + 384S^5 + 864S^4 + 896S^3 + 436S^2 + 104S + 12 \\ Z = 8S^3 + 24S^2 + 18S + 2. \end{cases}$$

Alors

$$\omega^2 + \theta^2 = 2d\sqrt{M} \qquad \text{et} \qquad \theta = \sqrt{d}\sqrt{\frac{Z+\sqrt{Y}}{2}}.$$

En utilisant le lemme 4.2, nous avons

$$\begin{aligned} |x_2| &\leq \frac{d}{\omega^2+\theta^2}\left(1+2\theta+\sqrt[3]{|\varepsilon_1|}\right) = \frac{d}{2d\sqrt{M}}\left(1+2\theta+\sqrt[3]{\varepsilon^2\eta}\right) \\ &< \frac{1}{2\sqrt{Y}}\left(1+2\theta+\sqrt[3]{8S}\sqrt[3]{X}\right). \end{aligned}$$

Pour $S > 4$, nous aurons $|x_2| < 1$. Donc $x_2 = 0$, ce qui est en contradiction avec (4). Le résultat reste vrai pour les autres valeurs de S car il suffit de remplacer S directement dans (8). □

Théorème 4.5. *Soient $M_4 = D^4+4D^2d+2d^2$, $M_6 = D^6+6D^4d+9D^2d^2+2d^3$, où D, d, sont deux entiers naturels non nuls et $d|D$. Soient ω une racine du polynôme $f(X) = X^4+d^{-2}M_6X^2-M_4$ et η l'unité fondamentale du sous-corps quadratique K^* du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$. On suppose que $\frac{D^2}{d}$ est pair et que $M = \dfrac{d^{-4}M_6^2+4M_4}{4d^2}$ est libre de carrés. Alors $\left\{\varepsilon,\ \varepsilon^2\eta\right\}$ est un système fondamental d'unités du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$.*

Démonstration. D'après la proposition 4.4, nous avons que $\varepsilon_0 = \varepsilon^2\eta$ est la plus petite unité du corps K qui vérifie $\varepsilon_0\varepsilon_0^{(1)} = 1$. D'après l'équation (7), ε est une unité telle que $\varepsilon\varepsilon^{(1)}$ est l'unité fondamentale du sous-corps quadratique K^* de K. D'après la proposition 4.3, K est de seconde espèce ; il suffit alors d'appliquer le théorème 1.2. □

Corollaire 4.6. *L'ensemble*

$$\{\varepsilon\ ,\varepsilon^{(1)}\}$$

est aussi un système fondamental d'unités du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$.

Démonstration. Nous avons $\varepsilon_0 = \varepsilon^2\eta = \varepsilon(\varepsilon^{(1)})^{-1}$. Comme $\{\varepsilon,\ \varepsilon_0\}$ forme un système fondamental d'unités du corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$, il en est de même pour $\{\varepsilon,\ \varepsilon^{(1)}\}$. □

Références

[1] L. Bernstein, *Fundamental units and cycles in period of real quadratic number fields*, Part I. Pac. J. Math. **68** No. **1** (1976), 37–61 ; and J. Number Theory **8** (1976), 446–491.

[2] L. Bernstein, *Fundamental units and cycles in period of real quadratic number fields*. Part II, Pac. J. Math. **68** No. **1** (1976), 63–78.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitre 5, corps commutatifs, (2eme édition)*. Hermann, Paris, 1959.

[4] T. W. Hungerford, *Algebra*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1974.

[5] C. Levesque, *Truncated units*. J. Number Theory **41** No. **1** (1992), 48–68.

[6] W. Ljunggren, *Über die Lösung einiger unbestimmten Gleichungen vierten Grades*. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, I. Mat.-Nat. Kl. (1935), 1–35.

[7] H.-J. Stender, *"Verstummelte" Grundeinheiten für biquadratische und bikubische Zahlkörper*. Math. Ann. **232** (1982), 55–64.

M'hammed Ziane
Université Mohammed I
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
60000 Oujda MAROC
E-mail : `ziane@sciences.univ-oujda.ac.ma`