Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 393–404

Approximation of values of hypergeometric functions by restricted rationals

par Carsten ELSNER, Takao KOMATSU et Iekata SHIOKAWA

Résumé. Nous calculons des bornes supérieures et inférieures pour l'approximation de fonctions hyperboliques aux points $1/s$ $(s = 1, 2, \dots)$ par des rationnels x/y, tels que x, y satisfassent une équation quadratique. Par exemple, tous les entiers positifs x, y avec $y \equiv 0 \pmod 2$, solutions de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, satisfont

$$|y \sinh(1/s) - x| \gg \frac{\log\log y}{\log y} .$$

Réciproquement, pour chaque $s = 1, 2, \dots$, il existe une infinité d'entiers x, y, premiers entre eux, tels que

$$|y \sinh(1/s) - x| \ll \frac{\log\log y}{\log y}$$

et $x^2 + y^2 = z^2$ soient réalisés simultanément avec z entier. Une généralisation à l'approximation de $h(e^{1/s})$, pour $h(t)$ fonction rationnelle, est incluse.

Abstract. We compute upper and lower bounds for the approximation of hyperbolic functions at points $1/s$ $(s = 1, 2, \dots)$ by rationals x/y, such that x, y satisfy a quadratic equation. For instance, all positive integers x, y with $y \equiv 0 \pmod 2$ solving the Pythagorean equation $x^2 + y^2 = z^2$ satisfy

$$|y \sinh(1/s) - x| \gg \frac{\log\log y}{\log y} .$$

Conversely, for every $s = 1, 2, \dots$ there are infinitely many coprime integers x, y, such that

$$|y \sinh(1/s) - x| \ll \frac{\log\log y}{\log y}$$

and $x^2 + y^2 = z^2$ hold simultaneously for some integer z. A generalization to the approximation of $h(e^{1/s})$ for rational functions $h(t)$ is included.

Carsten Elsner
FHDW Hannover, University of Applied Sciences

Manuscrit reçu le 24 septembre 2005.

Freundallee 15
D-30173 Hannover, Germany
E-mail : carsten.elsner@fhdw.de

Takao Komatsu
Faculty of Science and Technology
Hirosaki University
Hirosaki, 036-8561, Japan
E-mail : komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp

Iekata Shiokawa
Department of Mathematics
Keio University
Hiyoshi 3-14-1
Yokohama, 223-8522, Japan
E-mail : shiokawa@math.keio.ac.jp