Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **17** (2005), 347–357

Complexity of Hartman sequences

par Christian STEINEDER et Reinhard WINKLER

Résumé. Soit $T : x \mapsto x + g$ une translation ergodique sur un groupe abélien compact C et soit M une partie de C dont la frontière est de measure de Haar nulle. La suite binaire infinie $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \mapsto \{0, 1\}$ définie par $\mathbf{a}(k) = 1$ si $T^k(0_C) \in M$ et $\mathbf{a}(k) = 0$ sinon, est dite de Hartman. Notons $P_{\mathbf{a}}(n)$ le nombre de mots binaires de longueur n qui apparaissent dans la suite $\mathbf{a}$ vue comme un mot bi-infini. Cet article étudie la vitesse de croissance de $P_{\mathbf{a}}(n)$. Celle-ci est toujours sous-exponentielle et ce résultat est optimal. Dans le cas où T est une translation ergodique $x \mapsto x+\alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$) sur $\mathbb{T}^s$ et M un parallélotope rectangle pour lequel la longueur du j-ème coté ρ_j n'est pas dans $\alpha_j\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ pour tout $j = 1, \ldots, s$, on obtient $\lim_n P_{\mathbf{a}}(n)/n^s = 2^s \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{s-1}$.

Abstract. Let $T : x \mapsto x + g$ be an ergodic translation on the compact group C and $M \subseteq C$ a continuity set, i.e. a subset with topological boundary of Haar measure 0. An infinite binary sequence $\mathbf{a} : \mathbb{Z} \mapsto \{0, 1\}$ defined by $\mathbf{a}(k) = 1$ if $T^k(0_C) \in M$ and $\mathbf{a}(k) = 0$ otherwise, is called a Hartman sequence. This paper studies the growth rate of $P_{\mathbf{a}}(n)$, where $P_{\mathbf{a}}(n)$ denotes the number of binary words of length $n \in \mathbb{N}$ occurring in $\mathbf{a}$. The growth rate is always subexponential and this result is optimal. If T is an ergodic translation $x \mapsto x + \alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$) on $\mathbb{T}^s$ and M is a box with side lengths ρ_j not equal $\alpha_j\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ for all $j = 1, \ldots, s$, we show that $\lim_n P_{\mathbf{a}}(n)/n^s = 2^s \prod_{j=1}^{s} \rho_j^{s-1}$.

Christian Steineder
Technische Universität Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Vienne, Autriche
E-mail : `christian.steineder@tuwien.ac.at`

Reinhard Winkler
Technische Universität Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Vienne, Autriche
E-mail : `reinhard.winkler@tuwien.ac.at`