

Cohen-Lenstra sums over local rings

par CHRISTIAN WITTMANN

RÉSUMÉ. On étudie des séries de la forme $\sum_M |\mathrm{Aut}_R(M)|^{-1} |M|^{-u}$,

où R est un anneau commutatif local et u est un entier non-négatif, la sommation s'étendant sur tous les R -modules finis, à isomorphisme près. Ce problème est motivé par les heuristiques de Cohen et Lenstra sur les groupes des classes des corps de nombres, où de telles sommes apparaissent. Si R a des propriétés additionnelles, on reliera les sommes ci-dessus à une limite de fonctions zêta des modules libres R^n , ces fonctions zêta comptant les sous- R -modules d'indice fini dans R^n . En particulier on montrera que cela est le cas pour l'anneau de groupe $\mathbb{Z}_p[C_{p^k}]$ d'un groupe cyclique d'ordre p^k sur les entiers p -adiques. Par conséquent on pourra prouver une conjecture de [1], affirmant que la somme ci-dessus correspondante à $R = \mathbb{Z}_p[C_{p^k}]$ et $u = 0$ converge. En outre on considère des sommes raffinées, où M parcourt tous les modules satisfaisant des conditions cohomologiques additionnelles.

ABSTRACT. We study series of the form $\sum_M |\mathrm{Aut}_R(M)|^{-1} |M|^{-u}$,

where R is a commutative local ring, u is a non-negative integer, and the summation extends over all finite R -modules M , up to isomorphism. This problem is motivated by Cohen-Lenstra heuristics on class groups of number fields, where sums of this kind occur. If R has additional properties, we will relate the above sum to a limit of zeta functions of the free modules R^n , where these zeta functions count R -submodules of finite index in R^n . In particular we will show that this is the case for the group ring $\mathbb{Z}_p[C_{p^k}]$ of a cyclic group of order p^k over the p -adic integers. Thereby we are able to prove a conjecture from [1], stating that the above sum corresponding to $R = \mathbb{Z}_p[C_{p^k}]$ and $u = 0$ converges. Moreover we consider refined sums, where M runs through all modules satisfying additional cohomological conditions.

References

- [1] C. GREITHER, *Galois-Cohen-Lenstra heuristics*. Acta Math. et Inf. Univ. Ostraviensis **8** (2000), 33–43.

Christan WITTMANN
Universität der Bundeswehr München
Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik und Mathematik
85577 Neubiberg, Germany
E-mail : `wittmann@informatik.unibw-muenchen.de`