Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 351–386

Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité

par Boris ADAMCZEWSKI

Résumé. Nous étudions une classe de suites symboliques, les codages de rotations, intervenant dans des problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et représentant une généralisation géométrique des suites sturmiennes. Nous montrons que ces suites peuvent être obtenues par itération de quatre substitutions définies sur un alphabet à trois lettres, puis en appliquant un morphisme de projection. L'ordre d'itération de ces applications est gouverné par un développement bi-dimensionnel de type "fraction continue" vérifiant un théorème de Lagrange. Nous utilisons ensuite cette propriété pour caractériser les codages de rotations faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité, puis en déduire une propriété de déséquilibre du langage de ces codages.

Abstract. The paper focus on a class of symbolic sequences obtained by encoding rotations and offering a geometric framework for the study of generalizations of Sturmian sequences. Those symbolic sequences also appear in problems related to the uniform distribution of the sequences $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. We show that they can be computed by iterating four different substitutions over a three-letter alphabet, followed by an appropriate projection. The iteration schema is governed by a two-dimensional continued fraction algorithm satisfying a full Lagrange type theorem. This property is used to characterize the subset of sequences having a self-similar structure and then to deduce a quantitative unbalance property for these particular codings.

1. Introduction

Étant donné un nombre irrationnel α, $\alpha \in [0,1[$, nous nous intéressons aux problèmes de répartition de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à un intervalle $[0,\beta[$, où $\beta \in [0,1[$. Plus précisément, nous cherchons à comprendre le

Manuscrit reçu le 11 juin 2001.

comportement asymptotique de la somme :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right),$$

où $\chi_{[0,\beta[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\beta[$. L'étude de ces sommes est intimement liée à celle de la discrépance à l'origine des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et constitue donc un problème classique de théorie des nombres. Nous rappelons que la discrépance à l'origine de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$D_N^*(\alpha) = \sup_{\beta\in[0,1[} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right).$$

Considérons un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Introduisons alors la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'alphabet binaire $\{a,b\}$ par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite symbolique contient exactement l'information nécessaire et suffisante pour évaluer la quantité que nous désirons étudier. En effet, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta\right) = |u_0u_1\ldots u_{N-1}|_a - N\beta.$$

Remarquons que le codage U de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, que nous appelons codage de rotation de paramètres (α,β), doit être vu comme une opération de simplification, en ce sens qu'il paraît plus aisé d'étudier une suite définie sur un alphabet fini qu'une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$. Nous devons donc à présent comprendre l'évolution du nombre de a apparaissant dans un préfixe arbitraire de U. Lorsque la suite U fait intervenir des phénomènes d'autosimilarité, c'est-à-dire si U est liée à un point fixe de substitution, nous montrons dans [1] qu'il existe un outil puissant pour mener cette étude.

Ainsi, notre problème initial de théorie des nombres semble trouver sa solution à travers une meilleure compréhension d'une classe de suites symboliques définies sur un alphabet binaire : les codages de rotations. Dans cet article, nous traitons les codages de rotations de façon indépendante. Nous remarquons en effet que cette classe de suites intervient de façon naturelle dans plusieurs domaines des mathématiques (voir par exemple [8, 9, 23] pour des approches combinatoires). Nous pensons qu'il convient donc d'étudier dans un premier temps ces suites en tant que telles. Gardant à l'esprit les motivations initiales, nous orientons tout de même notre travail de façon à obtenir des résultat utiles pour les problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, certains résultats démontrés dans la suite serviront de point de départ pour l'étude menée dans [1].

Revenons à présent aux codages de rotations et notons que de telles suites ont une interprétation géométrique simple puisqu'elles peuvent être obtenues en codant l'orbite, sous l'action d'une rotation d'angle irrationnel, de l'origine du cercle de périmètre unité découpé en deux intervalles. Lorsque la longueur de l'un des deux intervalles est égale à l'angle de rotation (divisé par 2π), la suite obtenue est une suite sturmienne ; cela signifie que le nombre de facteurs de longueur n de cette suite est exactement égal à $n+1$. Les codages de rotations constituent donc une généralisation géométrique naturelle des suites sturmiennes. Ces dernières fournissent certainement l'exemple le plus prolifique d'interactions entre la dynamique symbolique, la géométrie et la théorie des nombres, comme en témoigne l'abondante littérature consacrée à ce sujet (voir le survol [19, Chap. 2]). Elles peuvent être caractérisées aussi bien par des propriétés combinatoires (par définition) que par des propriétés d'équilibre de leur language [6] ou encore géométriques [20]. Un résultat remarquable montre que la connaissance du développement en fraction continue de l'angle d'une suite sturmienne permet d'engendrer son language, voir par exemple [2]. Il est donc naturel de se demander si les liens des codages de rotations avec les différents domaines des mathématiques sont aussi clairement établis que pour les suites sturmiennes.

Nous rappelons que certains codages de rotations, que nous qualifierons de non dégénérés, sont intimement liés à des suites obtenues en codant l'orbite de l'origine sous l'action d'un échange de trois intervalles. Nous explicitons ce lien et nous montrons, en utilisant un procédé d'induction, qu'un codage de rotation non dégénéré peut être obtenu en itérant quatre substitutions définies sur un alphabet à trois lettres puis en appliquant un morphisme de projection de cet alphabet vers l'alphabet binaire $\{a,b\}$. L'ordre d'itération des substitutions est gouverné par un développement bidimensionnel de type “fraction continue” des paramètres de la rotations. Ce résultat est à rapprocher de ceux de [16, 17, 18], de P. Arnoux et G. Rauzy [2], pour les suites sturmiennes, et G. Didier [8], pour les codages de rotations. Nous montrons que notre algorithme vérifie un théorème de Lagrange, en ce sens que le développement d'un couple de paramètres est ultimement périodique si et seulement si ces paramètres appartiennent à un même corps quadratique. Nous utilisons ensuite cette propriété pour caractériser les codages de rotations faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité. Nous en déduisons un résultat que nous utiliserons dans [1] pour répondre à des problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous appliquons finalement un de nos résultats pour obtenir une propriété de déséquilibre du langage des codages de rotations liés à ces phénomènes d'autosimilarité.

2. Définitions et notations

2.1. Suites symboliques. Nous rappelons ici les définitions et les notations usuelles concernant les suites symboliques. On appelle alphabet un ensemble $\mathcal{A}$, fini et non vide. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés lettres. Un mot (fini) sur $\mathcal{A}$ est une suite finie de lettres de $\mathcal{A}$ et un mot infini sur $\mathcal{A}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{N}$. La longueur d'un mot fini w, notée $|w|$, est le nombre de lettres le composant. Le mot vide, noté ε, est l'unique mot de longueur 0. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots de longueur fini sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites sur $\mathcal{A}$.

Soit $U = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite symbolique définie sur un alphabet $\mathcal{A}$. On appelle facteur de U tout mot fini de la forme $u_i u_{i+1} \dots u_j$, $0 \le i \le j$. On note $\mathcal{L}_n(U)$ l'ensemble des facteurs de longueur n de U et $\mathcal{L}(U)$ l'ensemble de tous les facteurs de U $\big(\mathcal{L}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n(U)\big)$. L'ensemble $\mathcal{L}(U)$ est appelé le langage de U. Une suite dans laquelle tout facteur admet une infinité d'occurrences est dite *récurrente*. Lorsque de plus ces occurrences sont séparées par des lacunes bornées, la suite est dite *uniformément récurrente*. Un facteur w de U est appelé *facteur spécial droit* s'il existe deux occurrences de w dans U suivies par des lettres différentes. Si w est un facteur de U et a une lettre de $\mathcal{A}$, alors $|w|_a$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot w. On définit la *fonction de complexité* de U comme la fonction qui à tout entier strictement positif n associe le nombre $P_n(U) = \#\mathcal{L}_n(U)$. L'application classique de décalage (shift en anglais), notée $\mathcal{S}$, associe à une suite $U = (u_k)_{k\ge 0}$ la suite $\mathcal{S}(U) = (u_k)_{k\ge 1}$. A l'aide de cette application, on associe à toute suite U le *système dynamique symbolique* $(\overline{\mathcal{O}(U)}, \mathcal{S})$, où $\overline{\mathcal{O}(U)}$ désigne la fermeture, dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ muni du produit des topologies discrètes, de l'orbite de la suite U sous l'action du décalage $\mathcal{S}$. Un système dynamique est *minimal* s'il ne contient pas de fermé invariant non trivial. Pour un système dynamique associé à une suite symbolique, ceci est équivalent au fait que la suite soit uniformément récurrente.

On définit sur $\mathcal{A}^*$ une opération, dite de concaténation, qui consiste simplement à juxtaposer deux mots. Muni de cette opération, l'ensemble $\mathcal{A}^*$ est un monoïde libre dont l'élément neutre est ε. Une application de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$, appelée *substitution* sur l'alphabet $\mathcal{A}$, se prolonge par concaténation en un endomorphisme du monoïde $\mathcal{A}^*$ puis en une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même. Étant donnée une substitution ξ définie sur $\mathcal{A}$, on appelle *matrice d'incidence* de ξ, la matrice $M_\xi = (|\xi(j)|_i)_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}$.

2.2. Codages de rotations.

Définition 2.1. Étant donné un couple (α,β) appartenant à $[0,1[^2$, on appelle *codage de rotation de paramètres* $\boldsymbol{(\alpha,\beta)}$ la suite symbolique $U =$

$(u_n)_{n\geq 0}$ définie sur l'alphabet $\{a,b\}$ par :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} \in [0,\beta[, \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite nous ne considérerons pas tous les codages de rotations. Le cas où α est rationnel ne présente que peu d'intérêt, car le codage est alors périodique. Le cas où $\beta \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ ne sera pas traité ici, il relève plus de l'étude des suites sturmiennes, comme le mettent en évidence les paragraphes 4 et 8 ; il sera donc considéré comme dégénéré.

Définition 2.2. Un codage de rotation est dit *non dégénéré* si et seulement si ses paramètres (α,β) vérifient :
- α est irrationnel,
- $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
Un tel codage est dit de paramètres *admissibles* si de plus $\alpha < \beta$.

2.3. Échanges d'intervalles. Les échanges d'intervalles font partie des exemples classiques de systèmes dynamiques. Ils ont été notamment étudiés par M. Keane [14], G. Rauzy [22] et W. Veech [26, 27].

Définition 2.3. Soient s un entier supérieur ou égal à deux, σ une permutation de l'ensemble $\{1,2,\ldots,s\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ un vecteur de $\mathbb{R}^s$ à coordonnées strictement positives. Posons $I = [0, |\lambda|[$, où $|\lambda| = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$ et, pour $1 \leq i \leq s$, $I_i = \left[\sum_{j<i} \lambda_j, \sum_{j\leq i} \lambda_j\right[$, de sorte que $|I_i| = \lambda_i$. L'échange d'intervalles associé au couple (λ, σ) est la transformation T de I dans lui-même, définie comme l'isométrie par morceaux qui consiste à réordonner les intervalles I_i selon la permutation σ. De façon plus précise, si $x \in I_i$:

$$T(x) = x + a_i, \text{ où } a_i = \sum_{k<\sigma^{-1}(i)} \lambda_{\sigma_k} - \sum_{k<i} \lambda_k.$$

Un échange de s intervalles est donc entièrement déterminé par la donnée d'un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ de $\mathbb{R}^s$ à coordonnées strictement positives et d'une permutation σ de $\mathfrak{S}_s$. L'échange de s intervalles associé au couple (λ, σ) sera noté $((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s); \sigma)$. On code naturellement l'orbite d'un point de I, sous l'action d'un échange d'intervalles $((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s); \sigma)$, en associant à chaque élément de cette orbite le numéro de l'intervalle auquel il appartient.

3. Liens entre codages de rotations et échanges de trois intervalles

Étant donné un couple (α, β) appartenant à $[0,1[^2$, on s'intéresse aux suites obtenues en codant l'orbite d'un point x de l'intervalle unité sous l'action de la rotation d'angle α par rapport à la partition de l'intervalle

$[0,1[$ en $[0,\beta[\cup[\beta,1[$, appelée *rotation de paramètres* $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. Plus exactement, un tel codage, $\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)$, est défini comme suit :

$$\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)=(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\text{ avec } c_n=\begin{cases} a & \text{si } \{x+n\alpha\}\in[0,\beta[,\\ b & \text{sinon.}\end{cases} \tag{3.1}$$

A tout x de l'intervalle unité, on associe ainsi une suite $\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)$ sur l'alphabet $\{a,b\}$. Dans le cas où $x=0$, $\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)$ est un codage de rotation au sens de la définition 2.1. Nous montrons dans ce paragraphe que l'étude des codages de rotations non dégénérés est intimement liée à celle des échanges de trois intervalles.

Si λ est un élément de l'intervalle $]0,1[$, on définit l'application de premier retour de Poincaré de R_α sur $[0,\lambda[$, P_λ^α, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} P_\lambda^\alpha: & [0,\lambda[& \longrightarrow & [0,\lambda[\\ & x & \longmapsto & \{x+n\alpha\}, \end{array}$$

où $n=\min\{k\in\mathbb{N}^*/\{x+k\alpha\}\in[0,\lambda[\}$.

Remarque 3.1. Dans le cas où α est un nombre irrationnel, la densité de la suite $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ permet de définir P_λ^α pour tout élément λ de l'intervalle $]0,1[$.

Dans toute la suite, α désignera un nombre irrationnel positif et strictement inférieur à 1. Supposons que $\alpha<\beta$, P_β^α est alors défini comme l'échange d'intervalles suivant :

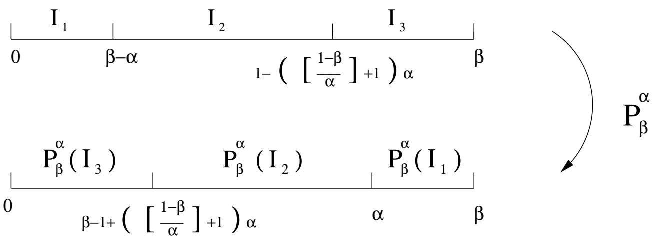


FIG. 3.1 – L'application de premier retour sur $[0,\beta[$.

Remarque 3.2. Le second intervalle est de longueur nulle si et seulement si : $\exists\ k\in\mathbb{N}^*/\beta=1-k\alpha$. Dans ce cas P_β^α est un échange de deux intervalles, c'est-à-dire une rotation de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Si $\alpha<\beta$ et $\beta\neq 1-k\alpha$, P_β^α est l'échange de trois intervalles suivant :

$$P_\beta^\alpha=\Big(\Big(\beta-\alpha,1-\Big\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\Big\rfloor\alpha-\beta,\beta+\Big(\Big\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\Big\rfloor+1\Big)\alpha-1\Big);(321)\Big). \tag{3.2}$$

Pour x appartenant à $[0,\beta[$, nous noterons $\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3))$ la suite obtenue en codant l'orbite de x sous l'action de P_β^α par rapport à la partition de $[0,\beta[$ en $I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Plus exactement, $\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3))$ est définie par :

$$\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3)) = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ avec } p_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_1, \\ 2 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_2, \\ 3 & \text{si } (P_\beta^\alpha)^n(x) \in I_3. \end{cases}$$

Alors :

$$\mathcal{C}(x, R_\alpha, \beta) = \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\mathcal{C}(x, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3)) \right),$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_k : & \{1,2,3\}^* & \longrightarrow & \{a,b\}^* \\ & 1 & \longmapsto & a, \\ & 2 & \longmapsto & ab^{k+1}, \\ & 3 & \longmapsto & ab^k, \end{array}$$

l'application Φ_k étant le morphisme de monoïde libre étendu par concaténation à $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$.

Supposons à présent que $\alpha > \beta$, l'application P_β^α est alors plus complexe à décrire. Cependant, nous allons voir que le codage de rotation de paramètres (α, β) est fortement lié à un codage de rotation de paramètres (α', β'), avec $\alpha' < \beta'$, ce qui nous permettra de ne considérer ensuite que les couples (α, β) pour lesquels $\alpha < \beta$.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{a,b\}^{\mathbb{N}}$, on note $(\overline{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\overline{U_n} = \begin{cases} a & \text{si } U_n = b, \\ b & \text{si } U_n = a. \end{cases}$$

Alors :

$$\mathcal{C}(0, R_\alpha, \beta) = a\mathcal{S}\left(\overline{\mathcal{C}(0, R_{(1-\alpha)}, 1-\beta)} \right), \tag{3.3}$$

où $\mathcal{S}$ désigne le shift usuel sur $\{a,b\}^*$. Pour cela, il suffit de remarquer que $-(1-\alpha) \equiv \alpha \mod 1$ et $-(1-\beta) \equiv \beta \mod 1$, comme l'illustre la figure 3.2. On effectue en réalité un changement d'orientation ; on échange le rôle de a et de b pour tenir compte de cette nouvelle orientation et on échange ensuite la première lettre du codage pour tenir compte du sens d'ouverture des intervalles de la partition. Or, si $\alpha > \beta$ alors $(1-\alpha) < (1-\beta)$. On peut donc obtenir $\mathcal{C}(0, R_{(1-\alpha)}, 1-\beta)$ à partir du codage d'un échange de trois intervalles si $1-\beta \neq 1-k(1-\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui est le cas dès que

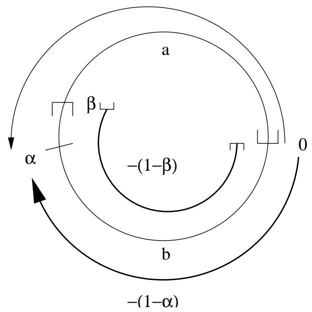


FIG. 3.2 – Cas $\alpha > \beta$.

$\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. En résumé, si $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$ avec $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors :

$$(3.4) \quad \mathcal{C}(0, R_\alpha, \beta) = \begin{cases} \Phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor}\left(\mathcal{C}(0, P_\beta^\alpha, (I_1, I_2, I_3)\right) & \text{si } \alpha < \beta, \\ a\mathcal{S}\left(\overline{\Phi_{\lfloor \frac{\beta}{1-\alpha} \rfloor}\left(\mathcal{C}(0, P_{1-\beta}^{1-\alpha}, (I_1, I_2, I_3))\right)}\right) & \text{si } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Nous allons à présent montrer une propriété, en quelque sorte réciproque, pour certains échanges de trois intervalles.

Définition 3.3. Étant donné $T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma)$ et $T' = ((l'_1, l'_2, l'_3); \sigma')$, deux échanges de trois intervalles, on dit que T et T' sont équivalents et on note $T \sim T'$, si les conditions suivantes sont vérifiées :
- $\sigma = \sigma'$,
- Les vecteurs (l_1, l_2, l_3) et (l'_1, l'_2, l'_3) sont homothétiques.

Remarque 3.4. Deux échanges d'intervalles équivalents engendrent la même dynamique.

Proposition 3.5. *Soit T un échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, avec $\sigma = (321)$. Il existe alors un échange d'intervalles T' équivalent à T, tel que T' soit l'application de premier retour P_β^α sur $[0, \beta[$ d'une rotation de paramètres (α, β).*

Preuve. Nous allons utiliser un procédé d'exduction (procédé dual de l'induction décrite en 4.1). Considérons l'échange de quatre intervalles $T_1 = ((l_1, l_2, l_3, l_2); (3412))$, puis l'échange T_1 normalisé, noté $\widetilde{T_1}$, défini par :

$$\widetilde{T_1} = \left(\left(\frac{l_1}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_3}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + 2l_2 + l_3}\right); (3412)\right).$$

L'application $\widetilde{T_1}$ n'est autre qu'un échange de deux intervalles avec un point marqué sur chacun, comme on peut le constater sur la figure 3.3.

Posons alors $\alpha = \frac{l_2 + l_3}{l_1 + 2l_2 + l_3}$ et $\beta = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1 + 2l_2 + l_3}$, et considérons la rotation de

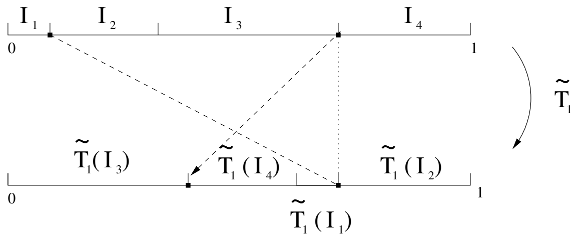


FIG. 3.3 – L'échange $\widetilde{T_1}$.

paramètres (α, β). L'application de premier retour associée à cette rotation, sur l'intervalle $[0, \beta[$, P_β^α, est, comme le montre la figure 3.4, l'échange de trois intervalles suivant :

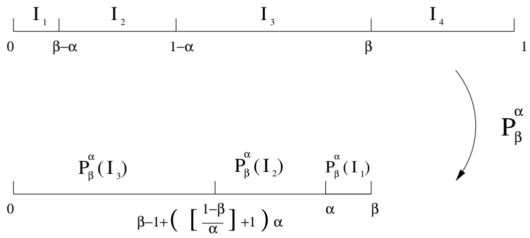


FIG. 3.4 – L'application de premier retour sur $[0, \beta[$.

$$P_\beta^\alpha = \left(\left(\frac{l_1}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_2}{l_1 + 2l_2 + l_3}, \frac{l_3}{l_1 + 2l_2 + l_3} \right); (321) \right).$$

Et ainsi : $P_\beta^\alpha \sim T$. □

Ce résultat souligne donc un peu plus la grande interaction existant entre les codages de rotations et les échanges de trois intervalles.

4. Échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C.

Dans ce paragraphe, nous étudions l'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à une condition introduite par M. Keane [14], dite condition I.D.O.C., que nous définissons un peu plus loin. Dans [22], G. Rauzy utilise le terme d'échanges réguliers.

4.1. Induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles. Commençons par rappeler les définitions utiles pour étudier l'induction de Rauzy. Nous donnons ces définitions dans le cas d'échanges de trois intervalles ; le lecteur pourra se reporter à [22] pour le cas général.

Définition 4.1. Une permutation de $\mathfrak{S}_s$, $s \in \mathbb{N}^*$, est dite irréductible si elle ne laisse invariant aucun ensemble de la forme $\{1, ..., t\}$, avec $t < s$.

Remarque 4.2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ n'est pas irréductible, alors on peut décomposer $T_{(\sigma,l)}$, $l = (l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$en (au moins) deux transformations (échanges d'intervalles avec moins d'intervalles), l'une sur $[0, a[$ et l'autre sur $[a, |l|[$ avec $a \in \{l_1, l_1 + l_2\}$.

Les permutations irréductibles de trois éléments sont (321), (312) et (231). Nous noterons $\mathfrak{S}_3^0$ l'ensemble des permutations irréductibles de trois éléments.

Définition 4.3. Si $(\sigma, l) \in \mathfrak{S}_3^0 \times (\mathbb{R}_+^*)^3$, posons $0 = a_1 < a_2 = l_1 < a_3 = l_1 + l_2 < a_4 = l_1 + l_2 + l_3$. L'application $T_{(\sigma,l)}$ satisfait à la condition I.D.O.C. si les deux ensembles $\{T^k(a_2),\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{T^k(a_3),\ k \in \mathbb{Z}\}$ sont infinis et disjoints. Ce qui s'écrit de manière équivalente :

$$T^k(a_i) = a_j,\ i \text{ et } j \in \{2, 3\},\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (k = 0 \text{ et } i = j).$$

Remarque 4.4. Si $T_{(\sigma,l)}$ satisfait à la condition I.D.O.C. alors $T_{(\sigma,l)}$ est minimal (voir [14]).

Définition 4.5. Soit $T_{(\sigma,l)}$ un échange d'intervalle satisfaisant à la condition I.D.O.C. Un intervalle de la forme $[0, r[$, où $0 < r < |l|$, est dit admissible pour $T_{(\sigma,l)}$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, tels que :

i) $T^k_{(\sigma,l)}(a_i) = r$,

ii) si $k > 0$, pour tout k tel que $0 < h < k$, $T^k_{(\sigma,l)}(a_i) \notin [0, r[$,
si $k \leq 0$, pour tout k tel que $k < h \leq 0$, $T^k_{(\sigma,l)}(a_i) \notin [0, r[$.

Nous allons maintenant présenter les principaux résultats concernant l'induction de Rauzy dans le cas des échanges de trois intervalles. Les énoncés et les démonstrations sont donnés, dans le cas général, dans [22].

Proposition 4.6. *Avec les notations de la définition précédente, l'intervalle* $[0, l_1[$ *est admissible et l'intervalle* $[0, \max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)}))[$ *est le plus grand intervalle admissible pour* $T_{(\sigma,l)}$.

Le principal résultat de [22] est le suivant :

Théorème 4.7 (Rauzy [22]). *Étant donné* $T_{(\sigma,l)}$ *un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C., si* $I = [0, r[$ *est un intervalle admissible pour* $T_{(\sigma,l)}$*, alors la transformation* S *induite par* $T_{(\sigma,l)}$ *sur* I *est définie partout. Il existe* $\tau \in \mathfrak{S}_3^0$ *et* $\mu \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ *tels que* $S = T_{(\tau,\mu)}$ *; de plus* $T_{(\tau,\mu)}$ *satisfait à la condition I.D.O.C.*

Définition 4.8. L'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. est l'application suivante :

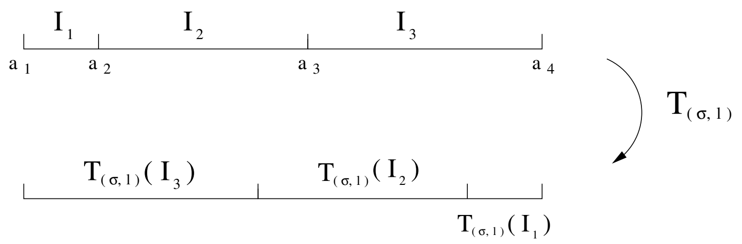
$$\begin{array}{rccc} \Psi : & IET_3 & \longrightarrow & IET_3 \\ & T_{(\sigma,l)} & \longmapsto & T_{(\sigma',l')} \ , \end{array}$$

où $T_{(\sigma',l')}$ est l'application induite par $T_{(\sigma,l)}$ sur le plus grand intervalle admissible, à savoir $[0, \max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)}))[$ et IET_3 désigne l'ensemble des échanges de trois intervalles *satisfaisant à la condition I.D.O.C.*

Étudions, pour chaque élément de $\mathfrak{S}_3^0$, l'induction de Rauzy.

- Cas 1 : $\sigma = (321)$

  Si $l_1 < l_3$, on a :



Alors, le plus grand intervalle admissible pour $T_{(\sigma,l)}$ est $[0, l_2 + l_3[$. L'échange d'intervalles induit est représenté sur la figure 4.1.

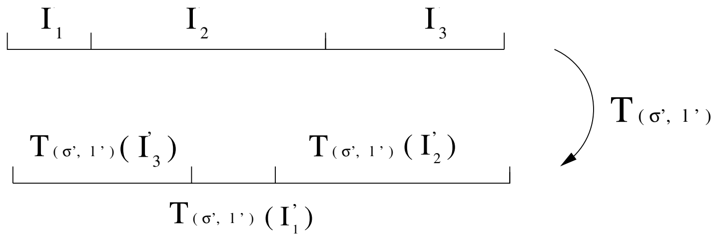


FIG. 4.1 – Échange d'intervalle induit.

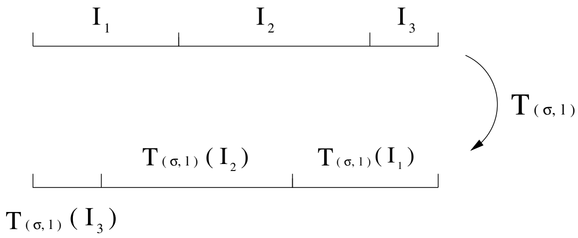
Donc : $\sigma' = (312)$ et $\left\{ \begin{array}{l} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_1 \end{array} \right.$, ou encore : $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$.

On notera : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si U est la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l)}$ et V la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma',l')}$ alors :

$$\sigma_1(V) = U,$$

où σ_1 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 13 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{array}$. La matrice A_1 est la matrice d'incidence de σ_1.

Si $l_1 > l_3$, on a :



La substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (231)$. Et il vient $\left\{ \begin{array}{l} l'_1 = l_1 - l_3 \\ l'_2 = l_3 \\ l'_3 = l_2 \end{array} \right.$, ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (l')$. On notera alors : $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_4(V) = U,$$

où σ_4 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 13 \\ 3 & \longmapsto & 2 \end{array}$. La matrice A_4 est la matrice d'incidence de σ_4.

• Cas 2 : $\sigma = (312)$.

Alors $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = a_3$ si et seulement si $l_1 + l_2 < l_1 + l_3$ et donc si et seulement si $l_2 < l_3$. De même $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = T_{(a_3)}$ est équivalent à $l_2 > l_3$.

Si $l_2 < l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' = (321)$ et $\left\{ \begin{array}{l} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_2 \end{array} \right.$, ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On notera : $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_3(V) = U,$$

où σ_3 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 23 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{array}$. La matrice A_3 est la matrice d'incidence de σ_3.

Si $l_2 > l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' =$ (312) et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 - l_3 \\ l'_3 = l_3 \end{cases}$, ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On notera : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_2(V) = U,$$

où σ_2 est la substitution définie sur $\{1,2,3\}^*$ par : $\begin{matrix} 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 23 \end{matrix}$. La matrice A_2 est la matrice d'incidence de σ_2.

• Cas 3 : $\sigma = (231)$.

Alors $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = a_3$ si et seulement si $l_1 + l_2 < l_2 + l_3$ et donc si et seulement si $l_1 < l_3$. De même $\max(a_3, T_{(\sigma,l)}(a_{\sigma(3)})) = T_{(a_3)}$ est équivalent à $l_1 > l_3$.

Si $l_1 < l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' =$ (231) et $\begin{cases} l'_1 = l_1 \\ l'_2 = l_2 \\ l'_3 = l_3 - l_1 \end{cases}$, ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (l')$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_1(V) = U,$$

où σ_1 est la substitution définie précédemment.

Si $l_1 > l_3$, la substitution associée à l'échange induit par $T_{(\sigma,l)}$ est $\sigma' =$ (321) et $\begin{cases} l'_1 = l_1 - l_3 \\ l'_2 = l_3 \\ l'_3 = l_2 \end{cases}$, ou encore $l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (l')$. On obtient avec les notations précédentes :

$$\sigma_4(V) = U,$$

où σ_4 est la substitution définie précédemment.

Nous pouvons résumer l'étude précédente à l'aide du graphe G suivant :

Ainsi, l'orbite positive d'un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. sous l'action de Ψ, l'induction de Rauzy, peut se représenter par un chemin infini sur le graphe G.

4.2. Codages de rotations et condition I.D.O.C.. Nous avons vu que l'induction de Rauzy était bien définie pour les échanges de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. Il est donc naturel de se demander à quelles conditions sur (α, β) un échange d'intervalles associé, par induction

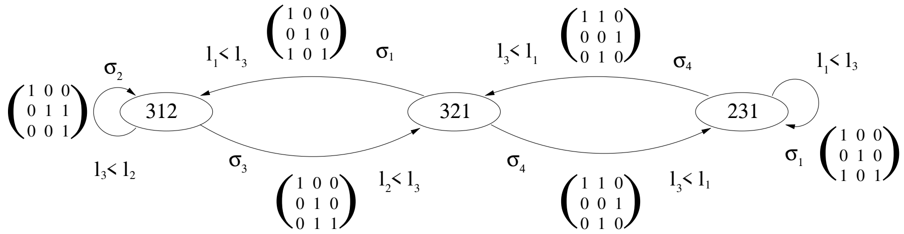


FIG. 4.2 – Graphe d'induction de Rauzy pour les échanges de trois intervalles.

comme au paragraphe 3, à une rotation de paramètres (α, β) satisfait à la condition I.D.O.C. C'est cette question que nous allons traiter à présent.

Lemme 4.9. *Soit U une suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action d'un échange de trois intervalles. Si l'échange satisfait à la condition I.D.O.C., alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) = 2n + 1,$$

sinon,

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) \leq n + k.$$

La suite $(P_n(U))_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne ici la fonction de complexité de la suite U définie au paragraphe 2.

Preuve. Notons T l'échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, $(l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $a_1{=}0$, $a_2{=}l_1$, $a_3{=}l_1 + l_2$ et $a_4{=}l_1 + l_2 + l_3$. Notons également, comme au paragraphe 3, I_1, I_2 et I_3 les trois intervalles de l'échange T. Si l'échange satisfait à la condition I.D.O.C., alors d'après [14] l'orbite du point 0 sous l'action de T est dense dans $[0, 1[$. Nous pouvons donc affirmer que pour tout $a_0 a_1 \ldots a_n \in \{1, 2, 3\}^{n+1}$:

$$a_0 a_1 \ldots a_n \in \mathcal{L}(U) \Leftrightarrow T^{-n}(I_{a_n}) \cap T^{-(n-1)}(I_{a_{n-1}}) \cap \ldots \cap (I_{a_0}) \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Remarquons à présent que si $[a, b[\subset [0, 1[$ alors $T^{-1}([a, b[)$ est une union disjointe d'intervalles semi-ouverts à droite dont les extrémités appartiennent à l'ensemble $\left\{T^{-1}(a), T^{-1}(b), a_1, a_2, a_3, a_4\right\}$. En appliquant cette remarque aux intervalles I_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, on en déduit que pour tout entier N et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, $T^{-N}(I_j)$ est une union disjointe d'intervalles semi-ouverts à droite dont les extrémités appartiennent à l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_N = & \left\{T^{-k}(a_l),\ 0 \leq k \leq N,\ l \in \{1, 2, 3\}\right\} \cup \{a_4\} \\ = & \left\{T^{-k}(a_l),\ 0 \leq k \leq N,\ l \in \{2, 3\}\right\} \cup \{a_1, a_4\}. \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence sur la longueur des mots conduit alors à montrer, en utilisant l'équation (4.1), que pour tout entier n, $P_n(U) =$

$\#(\mathcal{O}_n) - 1$. Comme T satisfait à la condition I.D.O.C., on est assuré que pour tout entier N

$$\#(\mathcal{O}_{N+1}) - \#(\mathcal{O}_N) = 2.$$

Ainsi, $P_1(U) = 3$ implique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) = 2n + 1.$$

Lorsque T ne satisfait pas à la condition I.D.O.C., l'équation (4.1) n'est plus nécessairement vérifiée, mais on est tout de même assuré que pour tout $a_0a_1 \dots a_n \in \{1,2,3\}^{n+1}$:

$$a_0a_1 \dots a_n \in \mathcal{L}(U) \Rightarrow T^{-n}(I_{a_n}) \cap T^{-(n-1)}(I_{a_{n-1}}) \cap \dots \cap (I_{a_0}) \neq \emptyset.$$

On en déduit alors que pour tout entier n, $P_n(U) \leq \#(\mathcal{O}_n) - 1$. Or le fait que T ne satisfait pas à la condition I.D.O.C. implique

$$\exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq K,\ (\#(\mathcal{O}_{N+1}) - \#(\mathcal{O}_N)) \leq 1.$$

Ceci entraîne, comme $(P_n(U))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est soit strictement croissante soit ultimement constante, que

$$\exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq j,\ (P_{n+1}(U) - P_n(U)) \leq 1.$$

Et ainsi :

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(U) \leq n + k.$$

□

Proposition 4.10. *Soit T un échange de trois intervalles $((l_1, l_2, l_3);(321))$ associé, par induction, à une rotation de paramètres (α, β). Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et si $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors T satisfait à la condition I.D.O.C.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Soit $U=(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite sur l'alphabet $\mathcal{A}=\{1,2,3\}$ et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(U) \leq n + k.$$

Alors étant donné un alphabet fini $\mathcal{B}$ et un morphisme de monoïde libre σ de $\mathcal{A}^*$ vers $\mathcal{B}^*$, étendu par concaténation de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vers $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$:

$$\exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(\sigma(U)) \leq n + k'.$$

Preuve du lemme 4.11. Considérons donc σ, où $\sigma : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$, avec $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ et posons $V = \sigma(U)$, $V = v_1v_2 \dots v_i \dots$, avec $v_i \in \mathcal{B}$. Nous devons alors montrer qu'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(V) \leq n + k'$. Considérons également le morphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\sigma}: \ \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \{1,2,\ldots,|\sigma(1)|+|\sigma(2)|+|\sigma(3)|\}^* \\ 1 & \longmapsto & 12\ldots|\sigma(1)|, \\ 2 & \longmapsto & (|\sigma(1)|+1)\ldots(|\sigma(1)|+|\sigma(2)|), \\ 3 & \longmapsto & (|\sigma(1)|+|\sigma(2)|+1)\ldots(|\sigma(1)|+|\sigma(2)|+|\sigma(3)|). \end{array}$$

La substitution $\widetilde{\sigma}$ est ainsi parfaitement définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par concaténation. Posons $\widetilde{V}=\widetilde{\sigma}(U)$ et considérons le morphisme :

$$\mathcal{P}:\{1,2,\ldots,|\sigma(1)|+|\sigma(2)|+|\sigma(3)|\}^* \longrightarrow \mathcal{B}^*$$

$$i \longmapsto \begin{cases} \sigma(1)_i & \text{si } i \leq |\sigma(1)|, \\ \sigma(2)_{i-|\sigma(1)|} & \text{si } |\sigma(1)| < i \leq (|\sigma(1)|+|\sigma(2)|), \\ \sigma(3)_{i-(|\sigma(1)|+|\sigma(2)|)} & \text{si } (|\sigma(1)|+|\sigma(2)|) < i. \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{P}(\widetilde{V})=V$ et $\mathcal{P}$ étant une projection “lettre à lettre” :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ P_n(V) \leq P_n(\widetilde{V}).$$

Il nous suffit ainsi de montrer que :

$$\exists k' \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^* \ P_n(\widetilde{V}) \leq n+k'.$$

Notons $\widetilde{V}=\tilde{v}_1\tilde{v}_2\ldots\tilde{v}_i\ldots$ et considérons $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l} \in \mathcal{L}(\widetilde{V})$ tel que $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l}$ admette deux prolongements à droite dans $\widetilde{V}$ (il ne peut évidemment pas en avoir plus pour l assez grand compte tenu de l'hypothèse faite sur U et de la définition de $\widetilde{\sigma}$). Ceci revient à dire que :

$$\exists (r,s) \in \{1,2,\ldots|\sigma(1)|+|\sigma(2)|+|\sigma(3)|\}^2, \ r \neq s, \text{ tel que}$$
$$\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l}r \in \mathcal{L}(\widetilde{V}) \text{ et } \tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l}s \in \mathcal{L}(\widetilde{V}).$$

Par construction de $\widetilde{\sigma}$:

$$\exists! \ u_ju_{j+1}\ldots u_h \in \mathcal{L}(U) \text{ tel que } W\widetilde{\sigma}(u_ju_{j+1}\ldots u_h)W' = \tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l},$$

où W et W' sont respectivement suffixe strict et préfixe strict d'images de letrres par $\widetilde{\sigma}$. Donc $W'r$ et$W's$ sont préfixes d'images de lettres par $\widetilde{\sigma}$. Or $r \neq s$ implique $W'=\varepsilon$ (car les images de lettres distinctes par $\widetilde{\sigma}$ n'ont aucune lettre commune). Ainsi $\tilde{v}_i\tilde{v}_{i+1}\ldots\tilde{v}_{i+l}=W\widetilde{\sigma}(u_ju_{j+1}\ldots u_h)$, où $u_ju_{j+1}\ldots u_h$ est un facteur spécial droit de U.

Considérons alors deux facteurs spéciaux droits de $\widetilde{V}$, $\widetilde{V}_1$ et $\widetilde{V}_2$, de même longueur suffisamment grande. D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \widetilde{V}_1 = W_1\widetilde{\sigma}(U_1), & \text{où } U_1 \text{ est un facteur spécial droit de } U \\ & \text{et } W_1 \text{ est suffixe strict d'image de lettre par } \widetilde{\sigma}, \\ \widetilde{V}_2 = W_2\widetilde{\sigma}(U_2), & \text{où } U_2 \text{ est un facteur spécial droit de } U \\ & \text{et } W_2 \text{ est suffixe strict d'image de lettre par } \widetilde{\sigma}. \end{cases}$$

De plus, pour tout i dans $\{1,2,3\}$, $\sigma(i) \notin \mathcal{L}(W_j)$, $j \in \{1,2\}$. Si $|\widetilde{V_1}|$ est assez grande alors $|U_1|$ et $|U_2|$ sont assez grandes pour affirmer que U_1 est suffixe de U_2 (ou inversement). En effet, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(U) \leq n+k$ et donc $(P_{n+1}(U) - P_n(U)) \leq 1$, si n est assez grand.

Supposons, par exemple que U_1 soit suffixe de U_2. Alors, si $U_1 \neq U_2$ $\exists i \in \{1,2,3\}$ tel que $\sigma(i) \in \mathcal{L}(W_1)$, ce qui est impossible car W_1 est suffixe strict d'image de lettre par $\widetilde{\sigma}$. Donc $U_1 = U_2$. En notant $U = U_1 = U_2$, on obtient $\begin{cases} \widetilde{V_1} = W_1\widetilde{\sigma}(U) \\ \widetilde{V_2} = W_2\widetilde{\sigma}(U) \end{cases}$.

Par construction de $\widetilde{\sigma}$, $\exists!\ i \in \{1,2,3\}$ tel que $W_1 \in \mathcal{L}(\widetilde{\sigma}(i))$ et $\exists!\ j \in \{1,2,3\}$ tel que $W_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{\sigma}(j))$. Donc $\widetilde{\sigma}(iU)$ et $\widetilde{\sigma}(jU)$ sont deux facteurs spéciaux droits de $\widetilde{V}$ et ainsi iU et jU sont deux facteurs spéciaux droits de U. Mais alors iU est suffixe de jU (ou inversement), ce qui implique $i = j$ puis $W_1 = W_2$ et finalement $\widetilde{V_1} = \widetilde{V_2}$. Ceci montre l'existence de $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_n(\widetilde{V}) \leq n+k'$. □

Preuve de la proposition 4.10. Soit $T = ((l_1,l_2,l_3);(321))$ un échange de trois intervalles associé à une rotation de paramètres (α,β), avec $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. Notons U la suite obtenue sur l'alphabet $\{1,2,3\}$ en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange T et V le codage de rotation de paramètres (α,β). Alors, il existe un morphisme σ de $\{1,2,3\}^*$ vers $\{a,b\}^*$ vérifiant $\sigma(U) = V$. Or si $\beta \notin \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, d'après [23]

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > N : P_n(V) = 2n.$$

Donc, d'après le lemme précédent il ne peut exister d'entier k pour lequel $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P_n(U) \leq n+k$. Le lemme 4.9 entraîne alors que l'échange T doit satisfaire la condition I.D.O.C. □

Lorsque $\beta \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, l'échange d'intervalles obtenu par induction à partir de la rotation de paramètres (α,β) est en fait un échange de deux intervalles ou un échange de trois intervalles ne satisfaisant pas à la condition I.D.O.C. ; c'est-à-dire qu'après un nombre fini d'étapes d'induction, l'échange obtenu sera un échange de deux intervalles. C'est une des raisons expliquant que le cas $\beta \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ relève davantage des suites sturmiennes. Dans [23], G. Rote montre également que la nature de la fonction de complexité d'un codage de rotation de paramètres (α,β) dépend du fait que β appartienne à $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ ou non.

5. Algorithmes d'induction pour les rotations de paramètres admissibles

Nous avons précédemment défini une application Ψ de IET_3 dans lui-même, appelée induction de Rauzy. Nous pouvons, à présent, donner une expression précise de l'application Ψ, similaire à celle donnée par F. Schweiger [24, pp. 93–101], sous la forme suivante :

$$\Psi : IET_3 \longrightarrow IET_3$$
$$T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma) \longmapsto \begin{cases} \text{si } \sigma = (321), & \begin{cases} ((l_1, l_2, l_3 - l_1); (312)) \\ \text{si } l_3 > l_1, \\ ((l_1 - l_3, l_2, l_3); (231)) \\ \text{si } l_1 > l_3, \end{cases} \\ \text{si } \sigma = (312), & \begin{cases} ((l_1, l_2 - l_3, l_3); (312)) \\ \text{si } l_2 > l_3, \\ ((l_1, l_2, l_3 - l_2); (321)) \\ \text{si } l_3 > l_2, \end{cases} \\ \text{si } \sigma = (231), & \begin{cases} ((l_1, l_2, l_3 - l_1); (231)) \\ \text{si } l_3 > l_1, \\ ((l_1 - l_3, l_2, l_3); (321)) \\ \text{si } l_1 > l_3. \end{cases} \end{cases}$$

Considérons alors G_1, G_2 et G_3, les trois sous-graphes, du graphe G introduit au paragraphe 4, que nous définissons à l'aide de la figure 5.1. On peut aisément vérifier à l'aide de la définition précédente de Ψ, que si l'orbite positive d'un échange de trois intervalles T, sous l'action de Ψ, était ultimement contenue dans l'un des sous-graphes G_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, alors une des longueurs des intervalles d'un des échanges $\Psi^n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, serait nulle, ce qui est impossible puisque les échanges $\Psi^n(T)$ satisfont la condition I.D.O.C. Ainsi, si l'on considère la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des permutations données par l'orbite de T sous l'action de Ψ, cette suite contient une infinité de fois chacune des trois permutations irréductibles possibles.

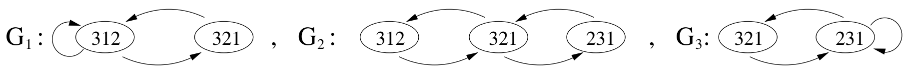


FIG. 5.1 – Les graphes G_1, G_2 et G_3.

Notamment, lorsque $\sigma = (321)$, on peut être assuré qu'il existe un entier positif n tel que $\sigma_n = (321)$. Ceci nous permet d'établir une version multiplicative de l'algorithme d'induction de Rauzy pour les échanges dont la permutation est (321), sous la forme suivante :

$$\Psi_M : (\mathbb{R}_+^*)^3 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$$
$$(l_1, l_2, l_3) \longmapsto \begin{cases} \left(l_1, l_2 - \left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor (l_3 - l_1), -l_2 + \left(\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor + 1\right)(l_3 - l_1)\right) \\ \text{si } l_1 < l_3 \ , \\ \left(-l_2 + \left(\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor + 1\right)(l_1 - l_3), l_2 - \left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor (l_1 - l_3), l_3\right) \\ \text{si } l_1 > l_3 \ . \end{cases}$$

Si A_1, A_2, A_3 et A_4 désignent les matrices introduites au paragaphe 4, alors en notant pour tout entier k, $\mathcal{A}_k = (A_1 A_2^k A_3)$ et $\mathcal{B}_k = (A_4 A_1^k A_4)$, il vient :

$$\Psi_M(l_1, l_2, l_3) = \begin{cases} \left(\mathcal{A}^{-1}_{\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \right)^t & \text{si } l_1 < l_3, \\ \left(\mathcal{B}^{-1}_{\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \right)^t & \text{si } l_1 > l_3. \end{cases}$$

La matrice A^t désignant, dans l'expression ci-dessus, la transposée de la matrice A.

On obtient alors, en posant $k = \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma_n = (321)\}$, l'égalité suivante :

$$(\Psi_M(l_1, l_2, l_3); (321)) = \Psi^k\left((l_1, l_2, l_3); (321)\right).$$

Remarque 5.1. Cette version multiplicative de l'induction de Rauzy est propre aux échanges de trois intervalles. En particulier, il ne s'agit pas de l'algorithme proposé par A. Zorich dans [28]. Nous utilisons la symétrie du graphe G, introduit au paragraphe 4, pour privilégier d'une certaine façon la permutation (321). L'algorithme étudié dans [28] ne distingue aucune permutation, mais prend plutôt en compte la nature des transitions intervenant entre les différentes permutations.

Soit $T = ((l_1, l_2, l_3); (321))$ un échange de trois intervalles, satisfaisant à la condition I.D.O.C. Notons U la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de T et V la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $\Psi^k(T)$, où $k = \min\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \sigma_n = (321)\}$. Il vient alors :

$$\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{\left\lfloor \frac{l_2}{l_3 - l_1} \right\rfloor} \circ \sigma_3 \right)(V) = U, \quad \text{si } l_1 < l_3,$$

$$\left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{\left\lfloor \frac{l_2}{l_1 - l_3} \right\rfloor} \circ \sigma_4 \right)(V) = U, \quad \text{si } l_1 > l_3.$$

Nous proposons maintenant de généraliser cette remarque. Considérons un échange de trois intervalles, $T = ((l_1^0, l_2^0, l_3^0); (321))$, satisfaisant à la condition I.D.O.C. Pour tout entier n, notons

$$(l_1^n, l_2^n, l_3^n) = \Psi_M^n((l_1^0, l_2^0, l_3^0)), \; a_n = \left\lfloor \left| \frac{l_2^n}{l_1^n - l_3^n} \right| \right\rfloor \text{ et } i_n = \begin{cases} 0 & si \;\; l_1^n < l_3^n \\ 1 & si \;\; l_1^n > l_3^n \end{cases}.$$

Ainsi, $i_n = 1$ si la permutation de l'échange de trois intervalles induit, par l'induction (additive) de Rauzy Ψ, à partir de l'échange d'intervalles

$\left(\Psi_M^n((l_1^0,l_2^0,l_3^0));\ (321)\right)$ est la permutation (231) et $i_n=0$ si cette permutation est (312). Le coefficient a_n nous renseigne lui sur le nombre d'étapes d'induction additive de Rauzy nécessaires pour obtenir à partir de l'échange d'intervalles $\left(\Psi_M^n((l_1^0,l_2^0,l_3^0));(321)\right)$ un échange d'intervalles dont la permutation est à nouveau (321). Ces coefficients ont ainsi une interprétation géométrique simple dans le graphe G de la figure 4.2.

Notons également $U^{(n)}$ la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $((l_1^n,l_2^n,l_3^n);(321))$. Alors :

$$\begin{aligned} U^{(0)} = & \left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_0}\circ\sigma_3\right)^{i_0}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_0}\circ\sigma_4\right)^{1-i_0}\right)\circ\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_1}\circ\sigma_3\right)^{i_1}\right. \\ & \left.\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_4\right)^{1-i_1}\right) \\ & \circ\ldots\circ\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_n}\circ\sigma_3\right)^{i_n}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_n}\circ\sigma_4\right)^{1-i_n}\right)(U_{n+1}). \end{aligned}$$

Ce résultat est simplement obtenu en itérant la remarque précédente. Le fait que $i_n\in\{0,1\}$ implique que soit $i_n=0$ soit $1-i_n=0$.

Proposition 5.2. *Avec les notations précédentes, il vient :*

$$U^{(0)}=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1).$$

Preuve. Le fait que, pour tout entier n, $U^{(n)}$ commence par la lettre 1 nous permet d'affirmer que

$$\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)$$

est préfixe de $U^{(0)}$. Il nous suffit donc à présent de montrer que l'expression $\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)$ a un sens pour la topologie produit des topologies discrètes sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ et définit bien une suite infinie. Or $(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4)(1)=12^{a_j}$ et $(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3)(1)=13$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &\prod_{j=0}^{n+1}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1) \\ =&\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1W_{n+1}),\ W_{n+1}\in\{1,2,3\}^*. \end{aligned}$$

Donc $\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)$ est un préfixe du mot $\prod_{j=0}^{n+1}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)$ et nous pouvons donner un sens à l'expression $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3)^{i_j} \circ (\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4)^{1-i_j} \right)(1)$. De plus

$$\left| \prod_{j=0}^{n+1} \left((\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3)^{i_j} \circ (\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4)^{1-i_j} \right)(1) \right| \geq \left| \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3)^{i_j} \circ (\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4)^{1-i_j} \right)(1) \right|$$

et l'inégalité est stricte si $i_n = 1$ ou $a_{n+1} > 0$. Ceci ce produit infiniment souvent d'après l'étude menée au début de ce paragaphe sur les graphes G_i, $i \in \{1,2,3\}$. Nous pouvons alors affirmer que le mot

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} \left((\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3)^{i_j} \circ (\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4)^{1-i_j} \right)(1)$$

est infini et ainsi conclure. □

Remarque 5.3. Nous avons proposé un algorithme linéaire dépendant de trois variables pour obtenir les coefficients a_j et i_j. Ceci peut sembler naturel puisqu'il s'agit d'un algorithme de décomposition des longueurs d'échanges de trois intervalles. Cependant, la décomposition est la même pour deux échanges équivalents. C'est pourquoi, nous proposons dans la suite un algorithme de deux variables fournissant ces mêmes coefficients.

Considérons la transformation projectivisée suivante :

$$\mathcal{D} :]0,1[\times\mathbb{R}_+^* \longrightarrow]0,1[\times\mathbb{R}_+^*$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \left(\frac{\{\frac{x}{y-1}\}}{\frac{1}{y-1} - \lfloor \frac{x}{y-1} \rfloor}, \frac{1}{\frac{1}{y-1} - \lfloor \frac{x}{y-1} \rfloor} \right) & si \quad y > 1, \\ \left(\{\frac{x}{1-y}\}, \frac{y}{1-y} - \lfloor \frac{x}{1-y} \rfloor \right) & si \quad y < 1, \\ (0,1) & si \quad y = 1. \end{cases}$$

Si $T = ((l_1,l_2,l_3);(321))$ est un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C., posons $x_0 = \frac{l_2}{l_1+l_2}$, $y_0 = \frac{l_2+l_3}{l_1+l_2}$ ($x_0 \in]0,1[$ et $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$) et $(x_n,y_n) = \mathcal{D}^n(x_0,y_0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le fait que l'échange T vérifie la condition I.D.O.C. assure que $y_n \neq 1$ pour tout entier n et nous permet ainsi de poser $a_n = \left\lfloor \left| \frac{x_n}{y_n - 1} \right| \right\rfloor$ et $i_n = \begin{cases} 1 & si \quad y_n < 1 \\ 0 & si \quad y_n > 1 \end{cases}$.

Proposition 5.4. *La suite de coefficients $(a_n,i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que celle définie dans la proposition précédente.*

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n. $\square$

Définition 5.5. Considérons un couple de paramètres admissibles (α,β) et l'échange de trois intervalles T qui lui est associé. Nous appellerons développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) la suite $(a_n,i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenue comme nous l'avons décrit précédemment à partir de l'échange T.

Si $(\alpha,\beta)\in[0,1[^2$, $\alpha\notin\mathbb{Q}$ et $\beta\notin\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ mais $\alpha>\beta$, nous appellerons développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) le développement $\mathcal{D}$ associé au couple de paramètres admissibles $(1-\alpha,1-\beta)$.

Théorème 5.6. *Si U désigne un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α,β) et $(a_n,i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β), alors :*
si $\alpha<\beta$,

$$U=\lim_{n\to\infty}\phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),$$

si $\alpha>\beta$,

$$U=\lim_{n\to\infty}a\mathcal{S}\left(\overline{\phi_{\lfloor\frac{\beta}{1-\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right)}\right)$$

où les applications $\mathcal{S}$, ϕ_k et — sont celles définies dans le paragraphe 3.

Preuve. La preuve est immédiate d'après les propositions 5.4 et 5.2 et l'équation (3.4). $\square$

Corollaire 5.7. *Avec les notations du théorème précédent, le système dynamique symbolique associé à un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α,β), est engendré par la suite :*

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),\ si\ \alpha<\beta,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}a\mathcal{S}\left(\overline{\phi_{\lfloor\frac{\beta}{1-\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right)}\right),$$

si $\alpha>\beta$.

Preuve. La preuve est immédiate d'après le théorème précédent car le système est minimal si $\alpha\notin\mathbb{Q}$. $\square$

Corollaire 5.8. *Pour tout $x \in [0,1[$ et tout couple de paramètres non dégénérés (α,β), le langage de la suite $\mathcal{C}(x,R_\alpha,\beta)$ définie par l'équation (3.1) est le même que celui de la suite :*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right), \text{ si } \alpha < \beta,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a\mathcal{S} \left(\overline{\phi_{\lfloor \frac{\beta}{1-\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{n} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)(1) \right)} \right),$$

si $\alpha > \beta$.

Preuve. Il suffit d'invoquer la densité de la suite $\{x+n\alpha\}$, pour α irrationnel, et le corollaire 5.7. $\square$

Les deux corollaires précédents sont très proches du résultat de [8]. Cependant le travail de G. Didier présente deux inconvénients majeurs pour notre étude. Tout d'abord, les paramètres (α,β) des codages de rotations considérés dans [8] vérifient $\alpha \leq \min\{\beta, 1-\beta\}$. Cette condition n'est pas du tout adaptée au problème de théorie des nombres qui a motivé notre étude, contrairement à la condition, arithmétiquement et combinatoirement plus naturelle, $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Ensuite, le théorème principal de [8] donne la constuction, pour tout couple (α,β) vérifiant $\alpha \leq \min\{\beta, 1-\beta\}$, d'une suite du système dynamique engendré par le codage de rotation de paramètres (α,β) ; mais ne construit pas le codage de rotation de paramètres (α,β), comme nous le faisons dans le théorème 5.6. Là encore, pour répondre aux problèmes de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, il est nécessaire de construire explicitement ce codage. C'est pourquoi nous n'avons pu utiliser le résultat de [8].

6. Caractérisation des couples (α,β) dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique

Nous cherchons à caractériser les couples pour lesquels le développement $\mathcal{D}$ associé, introduit au paragraphe précédent, est ultimement périodique. Ceci revient à déterminer les couples (α,β) pour lesquels l'orbite, sous l'action de l'induction de Rauzy Ψ, de l'échange de trois intervalles associé à la rotation de paramètres (α,β) peut se représenter par un chemin ultimement périodique dans le graphe G introduit au paragraphe 4.

Proposition 6.1. *Étant donné un couple $(\alpha,\beta) \in [0,1[^2$ vérifiant $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, si α et β appartiennent à un même corps quadratique alors le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est ultimement périodique.*

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du résultat de M. D. Boshernitzan et C. R. Carrol [4], dont une version affaiblie et adaptée aux échanges de trois intervalles peut être donnée sous la forme suivante :

Théorème 6.2 (Boshernitzan et Carrol [4])**.** *Soit T, $T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. Si les longueurs l_1, l_2 et l_3 appartiennent à un même corps quadratique, alors l'orbite de l'échange T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G du paragraphe 4.*

Preuve de la proposition 6.1. Si (α, β) est un couple de paramètres admissibles au sens de la définition 2.2, alors l'échange de trois intervalles associé, par induction, à la rotation de paramètres (α, β) est donné, d'après l'équation (3.2), par :

$$T = \left(\left(\beta - \alpha, 1 - \left\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rfloor \alpha - \beta, \beta + \left(\left\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1 \right) \alpha - 1 \right); (321) \right).$$

Si de plus α et β appartiennent à un même corps quadratique, il en est alors clairement de même pour les longueurs des trois intervalles de l'échange T. Ainsi, l'orbite de T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. C'est- à-dire, le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) est ultimement périodique.

Dans le cas où α et β appartiennent à un même corps quadratique, mais que $\alpha > \beta$, alors le couple $(1-\alpha, 1-\beta)$ vérifie les conditions suivantes : $1-\alpha$ et $1-\beta$ appartiennent à un même corps quadratique et $1-\alpha < 1-\beta$. D'après la définition 5.5, le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α, β) est l à encore ultimement périodique. □

Nous allons à présent démontrer la propriété réciproque, à savoir :

Proposition 6.3. *Étant donné un couple $(\alpha, \beta) \in [0,1[^2$ vérifiant $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, si le développement $\mathcal{D}$ associé à ce couple de paramètres est ultimement périodique, alors α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

Pour établir cette proposition, nous utilisons le résultat suivant démontré dans [4] :

Proposition 6.4. *Soit T, $T = ((l_1, l_2, l_3); \sigma)$, un échange de trois intervalles satisfaisant à la condition I.D.O.C. et dont le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs l_1, l_2 et l_3 est de rang 2. Si l'orbite de l'échange T, sous l'action de Ψ, est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G du paragraphe 4, alors l'échange T est équivalent à un échange dont les longueurs l_1, l_2 et l_3 appartiennent à un même corps quadratique.*

Preuve de la proposition 6.3. Soit (α, β) un couple dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique et tel que $\alpha < \beta$. Notons $T = ((l_1, l_2, l_3); (321))$

l'échange de trois intervalles associé par induction à la rotation de paramètres (α,β). Ainsi, d'après l'équation (3.2) :

(6.1)
$$(l_1,l_2,l_3)=\left(\beta-\alpha,1-\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor\alpha-\beta,\beta+\left(\left\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\right\rfloor+1\right)\alpha-1\right).$$

L'ultime périodicité du développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) implique que l'orbite de T sous l'action de ψ est représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. L'irrationalité de α entraîne que le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs l_1,l_2 et l_3 est de rang supérieur à 2. En normalisant l'échange T, on obtient l'échange $\widetilde{T}$ défini par :

$$\widetilde{T}=\left(\left(\frac{l_1}{l_1+l_2+l_3},\frac{l_2}{l_1+l_2+l_3},\frac{l_3}{l_1+l_2+l_3}\right);(321)\right).$$

Le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs de l'échange $\widetilde{T}$ est encore de rang supérieur à 2, mais le fait d'être normalisé lui interdit évidemment d'être de rang maximum, à savoir 3. Ainsi, le $\mathbb{Z}$-module engendré par les longueurs de l'échange $\widetilde{T}$ est de rang 2. De plus $\widetilde{T}$ est équivalent à T et donc l'orbite de $\widetilde{T}$ sous l'action de ψ est elle aussi représentée par un chemin ultimement périodique dans le graphe G. D'après la proposition 6.4, il existe donc un échange de trois intervalles $T'=((l'_1,l'_2,l'_3);(321))$, équivalent à $\widetilde{T}$, dont les longueurs appartiennent à un même corps quadratique. Mais le fait que $\widetilde{T}$ soit normalisé et qu'il soit équivalent à T' implique l'égalité suivante :

$$\widetilde{T}=\left(\left(\frac{l'_1}{l'_1+l'_2+l'_3},\frac{l'_2}{l'_1+l'_2+l'_3},\frac{l'_3}{l'_1+l'_2+l'_3}\right);(321)\right).$$

Les longueurs des intervalles de l'échange $\widetilde{T}$ appartiennent donc aussi au même corps quadratique. D'après l'équation (6.1), il en est de même pour les quantités $\frac{\beta-\alpha}{\beta}$ et $\frac{1-\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor\alpha-\beta}{\beta}$, ce qui entraîne que α et β appartiennent également au même corps quadratique.

Si le couple (α,β) vérifie $\alpha>\beta$ et que le développement $\mathcal{D}$ associé à ce couple est ultimement périodique, alors le raisonnement précédent conduit à montrer que $(1-\alpha)$ et $(1-\beta)$ appartiennent à un même corps quadratique. On en déduit immédiatement qu'il en est de même pour α et β. □

Nous pouvons, à présent réunir les deux propositions précédentes pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 6.5. *Soit $(\alpha,\beta)\in[0,1[^2$, $\alpha\notin\mathbb{Q}$ et $\beta\notin\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$. Le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est ultimement périodique si et seulement si α et β appartiennent à un même corps quadratique.*

7. Caractérisation des suites primitives substitutives obtenues comme codages de rotations

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer pour quels paramètres, (α,β), le codage de rotation de paramètres (α,β) définit une suite substitutive primitive. Nous pourrons alors déterminer les codages de rotations faisant intervenir des phénomènes d'autosimilarité.

7.1. Le cas des couples de paramètres admissibles dont le développement $\mathcal{D}$ est ultimement périodique. Lorsqu'une famille de suites symboliques peut être engendrée par un système adique, les suites obtenues par un développement ultimement périodique dans ce système sont liées à un point fixe de substitution. Nous allons à présent exploiter cette remarque dans le cas des codages de rotations. Commençons par rappeler quelques définitions liées à la notion de substitution.

Définition 7.1. Une substitution ξ, définie sur un alphabet $\mathcal{A}$, est dite primitive s'il existe un entier k tel que pour tout élément β de $\mathcal{A}$ et tout élément γ de $\mathcal{A}$, γ soit facteur de $\xi^k(\beta)$.

Remarque 7.2. Le fait qu'une substitution ξ soit primitive est équivalent au fait que sa matrice M_ξ d'incidence soit primitive, c'est-à-dire admette une puissance dont tous les coefficients soient strictement positifs.

Définition 7.3. Une suite U définie sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dite primitive substitutive s'il existe une substitution primitive ξ sur un alphabet $\mathcal{B}$ et un morphisme $\phi : \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ tels que $\phi(X_\xi) = U$ où X_ξ est point fixe de la substitution ξ.

Proposition 7.4. *Soit (α,β) un couple de paramètres admissibles au sens de la définition 2.2. Si α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors le codage de rotation de paramètres (α,β) définit une suite substitutive primitive.*

Preuve. Si α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors d'après le théorème 6.5, le développement $\mathcal{D}$, $(a_n,i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associé au couple (α,β) est ultimement périodique. Il vient donc : $\exists\ k \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \geq k$ $(a_{n+T},i_{n+T}) = (a_n,i_n)$. Or le théorème 5.6 entraîne, en notant U le codage de rotation de paramètres (α,β), que :

$$\begin{aligned} U &= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),\\ &= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor\frac{1-\beta}{\alpha}\rfloor}\left(\prod_{j=0}^{Tn+k-1}\left(\left(\sigma_1\circ\sigma_2^{a_j}\circ\sigma_3\right)^{i_j}\circ\left(\sigma_4\circ\sigma_1^{a_j}\circ\sigma_4\right)^{1-i_j}\right)(1)\right),\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) \circ \xi^n(1) \right),$$

où $\xi = \prod_{j=k}^{k+T-1} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right)$. On pose alors :

$$\phi = \phi_{\lfloor \frac{1-\beta}{\alpha} \rfloor} \circ \left(\prod_{j=k}^{k+T-1} \left(\left(\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3\right)^{i_j} \circ \left(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4\right)^{1-i_j} \right) \right),$$

$\phi : \{1,2,3\}^* \longrightarrow \{a,b\}^*$. On obtient

$$U = \phi(\lim_{n\to\infty} \xi^n(1)),$$

ou encore $U = \phi(\xi^\infty(1))$, où $\xi^\infty(1) = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe de la substitution ξ. De plus, $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$, car

$$(\sigma_4 \circ \sigma_1^{a_j} \circ \sigma_4)(1) = 12^{a_j} \text{ et } (\sigma_1 \circ \sigma_2^{a_j} \circ \sigma_3)(1) = 13.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que ξ est une substitution primitive. Notons, pour tout entier k, $\mathcal{A}_k = (A_1 A_2^k A_3)$ et $\mathcal{B}_k = (A_4 A_1^k A_4)$, où les matrices A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, ont été introduites au paragraphe 4. Alors, si l'on note M_ξ la matrice associée à la substitution ξ, on a

$$M_\xi = \prod_{j=k}^{k+T-1} (\mathcal{A}_{a_j}^{i_j})(\mathcal{B}_{a_j}^{1-i_j}).$$

Si $(C,D) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$, $C = (c_{i,j})$, $D = (d_{i,j})$, nous dirons que $C \geq D$ si $c_{i,j} \geq d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$. De même, nous dirons que $C > D$ si $c_{i,j} > d_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$. Si C est positive, alors pour tout entier k, les quatre inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{A}_k C \geq C,\ C\mathcal{A}_k \geq C,\ \mathcal{B}_k C \geq C \text{ et } C\mathcal{B}_k \geq C.$$

Pour cela, il suffit de constater que $\begin{cases} \mathcal{A}_k = I_3 + A'_k & \text{avec } A'_k \geq 0 \\ \mathcal{B}_k = I_3 + B'_k & \text{avec } B'_k \geq 0 \end{cases}$.

Dans le paragraphe 5, nous avons vu que l'orbite d'un échange de trois intervalles associé à une rotation de paramètres admissibles (α,β), sous l'action de l'induction de Rauzy Ψ, n'est pas ultimement contenue dans l'un des sous-graphes G_i, $i \in \{1,2,3\}$, définis dans ce même paragraphe. Ceci entraîne :

$\exists j_1 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $i_{j_1} = 0$,
$\exists j_2 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $i_{j_2} = 1$,
$\exists j_3 \in \{k, k+1, \ldots, k+T-1\}$ tel que $a_{j_3} \geq 1$.

Or, pour deux entiers k et l tels que $k > l$, $\mathcal{A}_k \geq \mathcal{A}_l \geq 0$ et $\mathcal{B}_k \geq \mathcal{B}_l \geq 0$. Les remarques précédentes permettent d'affirmer que l'une au moins des quatre inégalités suivantes est vérifiée :

$M_\xi \geq \mathcal{A}_0\mathcal{B}_1 = P_1 \geq 0,$
$M_\xi \geq \mathcal{A}_1\mathcal{B}_0 = P_2 \geq 0,$
$M_\xi \geq \mathcal{B}_1\mathcal{A}_0 = P_3 \geq 0,$
$M_\xi \geq \mathcal{B}_0\mathcal{A}_1 = P_4 \geq 0.$

Or, on vérifie aisément que $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, $\exists\ k_i \in \mathbb{N}$ tel que $P_i^{k_i} > 0$. Donc $M_\xi^{\max_{i\in\{1,2,3,4\}}(k_i)} > 0$ et ainsi ξ est bien primitive. $\square$

Notons que la primitivité de la substitution ξ est créée par la répétition des blocs de matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$. Les matrices A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ n'étant pas supérieures à l'identité (au sens de l'ordre partiel utilisé dans la preuve), un raisonnement similaire sur ces matrices est impossible. Notre algorithme multiplicatif d'induction permet donc de mettre plus naturellement en évidence la primitivité de la substitution ξ.

7.2. Réciproque. Soit (α,β) un couple de paramètres admissibles ne satisfaisant pas à la condition : α et β appartiennent à un même corps quadratique. Alors le développement $\mathcal{D}$ associé n'est pas ultimement périodique. Autrement dit, la description que nous obtenons du codage de rotation de paramètres (α,β), ne le présente pas comme définissant une suite substitutive primitive. On pourrait pourtant envisager qu'en utilisant un système de recodage différent de l'induction de Rauzy, ce même codage de rotation puisse être décrit comme une suite substitutive primitive. En utilisant un résultat de F. Durand [11], nous allons montrer qu'un tel codage de rotation ne définit pas une suite substitutive primitive.

Si U désigne une suite minimale sur un alphabet $\mathcal{A}$ et $u = u_1u_2\dots u_n$ un préfixe non vide de U, nous appellerons *mot de retour* sur u, tout facteur $u_{[i,j-1]}(= u_iu_{i+1}\dots u_{j-1})$ de U où i et j sont deux occurrences distinctes de u dans U. L'ensemble $\mathcal{H}_{U,u}$ désignant l'ensemble des mots de retour sur u, tout élément de $\mathcal{H}_{U,u}^*$ admet une unique décomposition en éléments de $\mathcal{H}_{U,u}$ concaténés. Ainsi, la suite U peut s'écrire de manière unique sous la forme $U = m_0m_1\dots m_i\dots$, où les m_i sont des mots de retour sur u. La minimalité de U nous permet d'affirmer que $\mathcal{H}_{U,u}$ est un ensemble fini pour tout préfixe non vide u de U. Nous pouvons donc considérer une bijection $\Lambda_{U,u}$ de $\mathcal{H}_{U,u}$ sur l'ensemble $\{1,2,\dots,\mathrm{card}(\mathcal{H}_{U,u})\} = \mathcal{N}_{U,u}$, ce qui revient simplement à numéroter les mots de retour sur u. Posons alors $\mathcal{D}_u(U) = \Lambda_{U,u}(m_0)\Lambda_{U,u}(m_1)\dots\Lambda_{U,u}(m_i)\dots$; cette suite sur l'alphabet $\mathcal{N}_{U,u}$ est appelée *suite dérivée* de U. Ainsi, à tout préfixe v de U, on pourra associer une suite dérivée $\mathcal{D}_v(U)$. Dans [11], F. Durand a obtenu le résultat suivant :

Théorème 7.5 (Durand [11]). *Une suite U est substitutive primitive si et seulement si le nombre de ses différentes suites dérivées est fini.*

Nous proposons maintenant d'établir le résultat suivant :

Proposition 7.6. *Si le codage de rotation de paramètres admissibles* (α, β) *définit une suite substitutive primitive, alors* α *et* β *appartiennent à un même corps quadratique.*

Preuve. L'idée principale de cette démonstration est de remarquer que certaines étapes de l'induction de Rauzy pour un échange d'intervalles consistent à regarder des mots de retour sur la suite codant l'orbite du point 0 sous l'action de cet échange.

Considérons U, un codage de rotation de paramètres admissibles (α, β) dont le développement $\mathcal{D}$ n'est pas ultimement périodique. Nous avons vu au paragraphe 3, qu'il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^*$ vers $\{a,b\}^*$ tel que $\phi(V) = U$, où V désigne la suite de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $T_{\sigma,l}$ induit par la rotation de paramètres (α, β) sur l'intervalle $[0, \beta[$. Alors, par définition même de l'application de premier retour, nous obtenons que

$$V = \mathcal{D}_a(U) \ .$$

Plus précisément, il n'existe que trois mots de retour sur a qui sont $\phi(1)$, $\phi(2)$ et $\phi(3)$. L'échange de trois intervalles $T_{\sigma,l}$ satisfait à la condition I.D.O.C. car (α, β) est un couple de paramètres admissibles. Notons $l = (l_1, l_2, l_3)$, nous savons que $\sigma = (321)$; l'intervalle $[0, l_1[$ est, comme nous l'avons remarqué dans la proposition 4.6, un intervalle admissible pour $T_{\sigma,l}$. De plus, si l'on note $T_{(\sigma',l')}$ l'échange de trois intervalles induit par $T_{(\sigma,l)}$ sur $[0, l_1[$, un argument de G. Rauzy [22] nous permet d'affirmer que $\sigma' = (321)$. Notons V' la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l)}$. Nous savons qu'il existe une substitution θ, définie sur l'alphabet $\{1,2,3\}$, telle que $\theta(V') = V$. Ici encore et par définition même de l'application de premier retour, nous obtenons que :

$$V' = \mathcal{D}_1(V) \ .$$

Plus précisément, il n'existe que trois mots de retour sur 1 qui sont $\theta(1)$, $\theta(2)$ et $\theta(3)$. Introduisons la suite d'échanges de trois intervalles suivante :

$$\begin{cases} T_{\sigma,l_0} = T_{(\sigma,l)}, \\ T_{(\sigma,l_{n+1})} \text{ est l'application de premier retour induite par } T_{(\sigma,l_n)} \\ \text{sur le premier intervalle de } T_{(\sigma,l_n)}. \end{cases}$$

Puis, pour tout entier n, notons $U^{(n)}$ la suite obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de $T_{(\sigma,l_n)}$. Ainsi, $U^{(0)} = V$ et $U^{(1)} = V'$. Alors, $U^{(0)} = \mathcal{D}_a(U)$ et de plus pour tout entier n, $U^{(n+1)} = \mathcal{D}_1(U^{(n)})$. Nous rappelons un résultat de F. Durand [11], concernant les suites dérivées :

Proposition 7.7. *Considérons une suite symbolique* U *et* u *un préfixe non vide de* U*. Si* v *est un préfixe non vide de* $\mathcal{D}_u(U)$ *alors il existe un préfixe* w *de* U*, non vide, tel que* $\mathcal{D}_v(\mathcal{D}_u(U)) = \mathcal{D}_w(U)$.

Cette proposition nous permet donc d'affirmer que la suite $(U^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de suites dérivées de U. De plus, G. Rauzy [22] montre que si $[0,\lambda[$ est un intervalle admissible pour $T_{\sigma,l}$ alors l'application $T_{\sigma_\lambda,l_\lambda}$, induite par $T_{\sigma,l}$ sur $[0,\lambda[$, vérifie :

$$\exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tel que } T_{\sigma_\lambda,l_\lambda} = \Psi^n(T_{\sigma,l}),$$

où Ψ désigne l'induction de Rauzy introduite au paragraphe 4. Autrement dit, l'induction de Rauzy "passe en revue" tous les intervalles admissibles. En particulier, si $\sigma = (321)$ et $\lambda = l_1$, il existe un entier n_1 tel que $l_\lambda = \Psi_M^{n_1}(l)$, où Ψ_M désigne la version multiplicative de l'induction de Rauzy introduite au paragraphe 5. Notamment, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n, $l_n = \Psi_M^{k_n}(l)$. Ainsi, pour tout entier n, la suite $U^{(n)}$ peut être obtenue en codant l'orbite du point 0 sous l'action de l'échange de trois intervalles $((\Psi_M^{k_n}(l));(321))$.

Supposons que la suite U soit substitutive primitive, alors d'après le théorème 7.5, la suite $(U^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs dans $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$. Il existerait donc deux entiers distincts n_1 et n_2 tels que $U^{(n_1)} = U^{(n_2)}$, et donc deux entiers k_{n_1} et k_{n_2} tels que $\Psi_M^{k_{n_1}}(l)$ et $\Psi_M^{k_{n_2}}(l)$ soient homothétiques. Ainsi, les deux échanges $((\Psi_M^{k_{n_1}}(l));(321))$ et $((\Psi_M^{k_{n_2}}(l));(321))$ seraient équivalents. Ceci entraînerait que le chemin, dans le graphe G du paragraphe 4, suivi par l'orbite de $T_{\sigma,l}$ sous l'action de Ψ serait ultimement périodique de période inférieure ou égale à $|k_{n_1}-k_{n_2}|$, car deux échanges équivalents suivent le même chemin dans le graphe G. Ceci implique que le développement $\mathcal{D}$ associé au couple (α,β) est ultimement périodique. Finalement, le théorème 6.5 entraîne que α et β appartiennent à un même corps quadratique. $\square$

Nous sommes, à présent, en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 7.8. *Le codage de rotation de paramètres admissibles* (α,β), *définit une suite substitutive primitive si et seulement si* α *et* β *appartiennent à un même corps quadratique.*

Preuve. La preuve est immédiate d'après les propositions 7.4 et 7.6. $\square$

Remarque 7.9. D. Crisp, W. Moran, A. Pollington et P. Shiue [7] caractérisent les suites sturmiennes caractéristiques qui sont points fixes de substitutions non triviales en fonction du développement en fraction continue de leur angle. En utilisant les arguments que nous avons développés dans ce paragraphe, on peut montrer qu'une suite sturmienne caractéristique est substitutive primitive si et seulement si son angle est un nombre quadratique.

La méthode basée sur l'étude des mots de retour, développée pour démontrer la proposition 7.6, pourrait également se généraliser au cas de l'induction de Rauzy pour les échanges de n intervalles.

8. Application

Nous allons maintenant établir une version précisée du théorème 7.8 que nous utilisons dans [1] pour obtenir des résultats sur la répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous déduirons alors d'un de ces résultats une propriété de déséquilibre pour les codages de rotations étudiés au paragraphe 7.

8.1. Application à la répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Le théorème suivant représente d'une certaine façon une synthèse de l'étude que nous avons menée sur les codages de rotations non dégénérés. Il montre que lorsque les paramètres d'un codage de rotation non dégénéré appartiennent à un même corps quadratique, des phénomènes d'autosimilarité interviennent dans ce codage. Il permet ainsi d'établir le bon cadre d'étude du problème de répartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous traitons dans [1].

Théorème 8.1. *Soit U un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α,β). Supposons que α et β appartiennent à un même corps quadratique, alors :*
si $\alpha \leq \beta$ (respectivement $\alpha > \beta$), il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ et une substitution ξ sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$U = \phi(X_\xi) \ \textit{(respectivement } U = a\mathcal{S}(\phi(X_\xi))\textit{)},$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe non périodique de ξ et $\mathcal{S}$ désigne le shift usuel sur $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$.

De plus, dans les deux cas, ξ vérifie :
i) ξ est une substitution primitive, $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$,
ii) la matrice d'incidence de ξ admet trois valeurs propres simples réelles θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$, avec $\theta > 1$.

Preuve. Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 7.4 que si $\alpha \leq \beta$, il existe un morphisme de monoïde libre ϕ de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$ et une substitution primitive ξ sur $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$U = \phi(X_\xi)$$

où $X_\xi = \lim_{n\to\infty} \xi^n(1)$ est point fixe non périodique de ξ. De plus, ξ est une substitution primitive telle que $\xi(1)$ commence par 1 et $|\xi(1)| \geq 2$.

Lorsque $\alpha > \beta$, nous rappelons que l'équation (3.3) entraîne que $U = aS(\overline{V})$, où V est le codage de rotation de paramètres $(1-\alpha, 1-\beta)$. Ainsi, $V = \phi(X_\xi)$, où ϕ et X_ξ sont donnés comme précédemment car $1-\alpha \geq 1-\beta$. Finalement, on obtient que $\overline{V} = \phi'(X_\xi)$, où ϕ' est un morphisme de monoïde libre de $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ vers $\{a,b\}^{\mathbb{N}}$, puisque l'application $\overline{}$ est également un morphisme de monoïde libre.

Démontrons à présent la partie ii) du théorème. Notons M_ξ la matrice d'incidence de la substitution ξ. Le polynôme caractéristique de M_ξ, $P_{M_\xi}(t)$, est de degré trois et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, car $M_\xi \in \mathcal{M}_3(\mathbb{N})$. Il existe donc trois entiers relatifs a, b et c tels que $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 + bt + c$. Dans la preuve de la proposition 7.4, nous avons introduit des matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ et montré que la matrice M_ξ est obtenue comme produit de matrices de cette forme. Comme pour tout entier k, le déterminant des matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ est égal à 1, le déterminant de la matrice M_ξ est lui aussi égal à 1. Ainsi $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 + bt + 1$. Or, il est facile de vérifier que pour tout entier k, les matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ admettent le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme point fixe et ainsi 1 est valeur propre de M_ξ. Il vient donc $P_{M_\xi}(1) = 0$, d'où $a = -b$. Finalement $P_{M_\xi}(t) = -t^3 + at^2 - at + 1$, avec $a \in \mathbb{Z}$. Le polynôme P_{M_ξ} est donc un polynôme réciproque à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et admettant 1 comme racine. Comme de plus M_ξ est une matrice primitive positive, d'après le théorème de Perron-Frobenius, une des valeurs propres de M_ξ est réelle positive et domine strictement toutes les autres en module ; notons la θ. Il suit que M_ξ admet trois valeurs propres réelles disctinctes (et donc simples) θ, 1 et $\frac{1}{\theta}$. $\square$

Le fait que, dans le théorème 8.1, 1 soit valeur propre de la matrice d'incidence de la substitution ξ est capital pour l'obtention des résultats que nous exposons dans la suite. Bien qu'il existe des arguments géométriques profonds pour le justifier (voir [27]), il est intéressant d'en obtenir une démonstration matricielle élémentaire. Celle que nous donnons dans cette preuve utilise le fait que les matrices $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ ont un point fixe commun, ce qui n'est pas le cas des matrices A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ainsi, comme pour la preuve de la primitivité de la substitution ξ, notre algorithme multiplicatif d'induction permet l'obtention d'une preuve naturelle et simple. A l'aide notamment du théorème 8.1, nous montrons dans [1] le résultat suivant :

Théorème 8.2. *Considérons un couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$ tel que α soit un nombre irrationnel et $\beta \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Supposons de plus que α et β appartiennent à un même corps quadratique, il existe alors une constante c strictement positive telle que :*

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta \right) \right| > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

La démonstration de ce théorème est basée sur l'utilisation du théorème 8.1 et d'un système de numération généralisé associé à un point fixe de substitution, introduit par J.-M. Dumont et A. Thomas [10] et G. Rauzy [21]. Ce résultat est à rapprocher de celui de V. T. Sós [25], que nous rappelons ici :

Théorème 8.3 (Sós [25]). *Soit α un nombre irrationnel. Il existe une constante c, strictement positive et indépendante de α, telle que pour presque tout β au sens de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$, on ait :*

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1}\left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\})-\beta\right)\right|>c\log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

D'après un résultat de H. Kesten [15], notons que pour tout α irrationnel et $\beta\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ la suite $\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\})-\beta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

8.2. Propriété de déséquilibre pour les codages de rotations non dégénérés. Nous allons à présent utiliser le théorème 8.2 pour prouver que le langage de certains codages de rotations non dégénérés est assez irrégulier en un sens que nous précisons.

Définition 8.4. Considérons un alphabet fini $\mathcal{A}$ et un mot infini ω, $\omega\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On dit que ω est C-équilibré si :

$$\forall i\in\mathcal{A},\ \forall(v,w)\in\mathcal{L}(\omega),\ |v|=|w|\Rightarrow -C\leq|v|_i-|w|_i\leq C.$$

On dit que ω est équilibré lorsque ω est 1-équilibré.

Les suites équilibrées apériodiques sur un alphabet binaire ont été caractérisées par E. M. Coven et G. A. Hedlund [6], ce sont les suites sturmiennes. Une généralisation de ce résultat au cas d'un alphabet fini quelconque est donnée par P. Hubert [13] qui utilise un résultat de R. L. Graham [12]. Un théorème de H. Kesten [15] implique que la condition $\beta\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ est équivalente au fait que le codage de rotation de paramètres (α,β) est c-équilibré, pour un certain c. Dans le même esprit, les auteurs de [5] exhibent des suites d'Arnoux-Rauzy qui ne sont pas des codages naturels de rotations bi-dimensionnelles (au sens de [2]) en montrant qu'elles ne satisfont pas à la propriété de c-équilibre (pour aucun c). Dans [3], V. Berthé et R. Tijdeman introduisent une mesure d'équilibre pour des suites multi-dimensionnelles dont une version unidimensionnelle est donnée par la définition suivante :

Définition 8.5. Étant donnée une suite U définie sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, on définit la fonction d'équilibre de U de la façon suivante :

$$B_U(n)=\max_{a\in\mathcal{A}}\max_{w,w'\in\mathcal{L}_n(U)}\left\{\left||w|_a-|w'|_a\right|\right\}.$$

Ainsi une suite est c-équilibrée si et seulement si sa fonction d'équilibre est majorée par c. Notamment, lorsque $\beta\notin\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, la fonction d'équilibre du codage de rotation de paramètres (α,β) n'est pas bornée. Nous allons à présent préciser ce résultat.

Théorème 8.6. *Soit U un codage de rotation non dégénéré de paramètres (α, β). Supposons que α et β appartiennent à un même corps quadratique, il existe alors une constante c strictement positive telle que :*

$$B_U(N) > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N.

Preuve. Considérons c un réel strictement positif vérifiant les hypothèses du théorème 8.2. Il vient alors :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \left(\chi_{[0,\beta[}(\{n\alpha\}) - \beta \right) \right| > c \log N,$$

pour une infinité d'entiers N. Ceci implique, d'après la définition 2.1, que :

$$(8.1) \qquad ||U_N|_a - N\beta| > c \log N \text{ pour une infinité d'entiers } N,$$

où $U_N = u_0 u_1 \dots u_{N-1}$ désigne le préfixe de longueur N de U.
Raisonnons par l'absurde en supposant que :

$$(8.2) \qquad \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_0, \quad B_U(n) \leq c \log n.$$

Pour tout $k \geq N_0$, notons w_k, $w_k \in \mathcal{L}_k(U)$, un mot vérifiant :

$$\forall w \in \mathcal{L}_k(U), \quad |w|_a \geq |w_k|_a.$$

Alors, pour $n \geq N_0$, $l \geq N_0$ et $w \in \mathcal{L}_{nl}(U)$, il vient d'après (8.2) :

$$0 \leq |w|_a - l|w_n|_a \leq l(c \log n)$$

et

$$0 \leq |w|_a - n|w_l|_a \leq n(c \log l).$$

En soustrayant, on obtient :

$$-n(c \log l) \leq n|w_l|_a - l|w_n|_a \leq l(c \log n),$$

puis

$$-c\frac{\log l}{l} \leq \frac{|w_l|_a}{l} - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}.$$

La suite $\left(\frac{|w_n|_a}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy. Il existe ainsi un réel λ, limite de cette suite, vérifiant :

$$(8.3) \qquad 0 \leq \lambda - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}.$$

Souvenons-nous que l'équation (8.2) entraîne, pour $n \geq N_0$:

$$0 \leq |U_n|_a - |w_n|_a \leq c \log n,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \frac{|w_n|_a}{n} \leq c\frac{\log n}{n}.$$

En retranchant l'équation (8.3), il suit :

$$-c\frac{\log n}{n} \leq \frac{|U_n|_a}{n} - \lambda \leq c\frac{\log n}{n}.$$

La suite $\left(\frac{|U_n|_a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers λ. Mais l'équirépartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ implique alors que $\lambda = \beta$. Finalement, on obtient :

$$\forall n \geq N_0, \;\; ||U_n|_a - n\beta| \leq c\log n,$$

ce qui contredit l'équation (8.1). □

Dans ce paragraphe nous avons obtenu des propriétés arithmétiques et combinatoires pour certains codages de rotations non dégénérés. La comparaison de ces résultats aux différentes traductions que nous avons données, dans ce même paragraphe, du théorème de H. Kesten [15], met en évidence la différence des comportements arithmétiques et combinatoires des codages de rotations suivant que leurs paramètres (α, β) vérifient ou non $\beta \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$.

Bibliographie

[1] B. Adamczewski, *Répartitions des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et substitutions.* Acta Arith., à paraître.

[2] P. Arnoux, G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$.* Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 199–215.

[3] V. Berthé, R. Tijdeman, *Balance properties of multi-dimensional words.* Theoret. Comput. Sci. **273** (2002), 197–224.

[4] M. D. Boshernitzan, C. R. Carroll, *An extension of Lagrange's theorem to interval exchange transformations over quadratic fields.* J. Anal. Math. **72** (1997), 21–44.

[5] J. Cassaigne, S. Ferenczi, L. Q. Zamboni, *Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), 1265–1276.

[6] E. M. Coven, G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth.* Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[7] D. Crisp, W. Moran, A. Pollington, P. Shiue, *Substitution invariant cutting sequences.* J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 123–137.

[8] G. Didier, *Codages de rotations et fractions continues.* J. Number Theory **71** (1998), 275–306.

[9] G. Didier, *Combinatoire des codages de rotations.* Acta Arith. **85** (1998), 157–177.

[10] J.-M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theoret. Comput. Sci. **65** (1989), 153–169.

[11] F. Durand, *A characterization of substitutive sequences using return words.* Discrete Math. **179** (1998), 89–101.

[12] R. L. Graham, *Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \ldots\}$.* J. Combinatorial Theory Ser. A **15** (1973), 354–358.

[13] P. Hubert, *Suites équilibrées.* Theoret. Comput. Sci. **242** (2000), 91–108.

[14] M. Keane, *Interval exchange transformations.* Math. Z. **141** (1975), 25–31.

[15] H. Kesten, *On a conjecture of Erdős and Szüsz related to uniform distribution* mod 1. Acta Arith. **12** (1966/1967), 193–212.

[16] L.-M. Lopez, P. Narbel, *D0L-systems and surface automorphisms.* Mathematical foundations of computer science, 1998 (Brno), Lecture Notes in Comput. Sci. **1450**, Springer, Berlin, 1998, pp. 522–532.

[17] L.-M. Lopez, P. Narbel, *Substitutions from Rauzy induction (extended abstract).* Developments in language theory (Aachen, 1999), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000, pp. 200–209.

[18] L.-M. Lopez, P. Narbel, *Substitutions and interval exchange transformations of rotation class.* Theoret. Comput. Sci. **255** (2001), 323–344.

[19] M. LOTHAIRE, *Algebraic combinatorics on words.* Cambridge University Press, 2002.
[20] M. MORSE, G. A. HEDLUND, *Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories.* Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
[21] G. RAUZY, *Sequences defined by iterated morphisms.* Sequences (Naples/Positano, 1988), Springer, New York, 1990, pp. 275–286.
[22] G. RAUZY, *Échanges d'intervalles et transformations induites.* Acta Arith. **34** (1979), 315–328.
[23] G. ROTE, *Sequences with subword complexity* $2n$. J. Number Theory **46** (1994), 196–213.
[24] F. SCHWEIGER, *Multidimensional continued fractions.* Oxford University Press, 2000.
[25] V. T. SÓS, *On strong irregularities of the distribution of* $\{n\alpha\}$ *sequences.* Studies in pure mathematics, Birkhäuser, Basel, 1983, pp. 685–700.
[26] W. A. VEECH, *Interval exchange transformations.* J. Analyse Math. **33** (1978), 222–272.
[27] W. A. VEECH, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps.* Ann. of Math. **115** (1982), 201–242.
[28] A. ZORICH, *Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), 325–370.

Boris ADAMCZEWSKI
Institut de Mathématiques de Luminy - CNRS
Case 907
163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
E-mail : adamczew@iml.univ-mrs.fr