Journal of Lie Theory
Volume **6** (1996) 271–289

Opérateurs différentiels invariants hyperboliques sur un espace symétrique ordonné

Jacques Faraut

Communicated by K.-H. Neeb

Abstract. Let $\mathcal{M}$ be a homogeneous and globally causal manifold and D an invariant differential operator on $\mathcal{M}$. We study conditions under which D permits a causal fundamental solution. For the cases that M is an ordered symmetric space of Ol'shanskiĭ type or an ordered symmetric space of rank 1 we show that an invariant hyperbolic operator admits a causal fundamental solution.

Soit $\mathcal{M}$ une variété causale globale et homogène, et soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$. La question que nous étudions est de savoir à quelle condition l'opérateur D admet une solution élémentaire causale. Lorsque $\mathcal{M}$ est un espace symétrique ordonné de type Ol'shanskiĭ, ou un espace symétrique ordonné de rang un, nous montrons qu'un opérateur différentiel invariant hyperbolique admet une solution élémentaire causale.

Ce travail a été achevé pendant un séjour que j'ai fait à l'Institut Mittag-Leffler en mai 1996, et je remercie les organisateurs de l'année spéciale *Analysis on Lie groups* de m'y avoir invité.

1. Variété causale et solution élémentaire causale

Soit $\mathcal{M}$ une *variété causale*, c'est à dire une variété $\mathcal{M}$ munie d'un champ de cônes : pour tout $x \in \mathcal{M}$, C_x est un *cône régulier* dans l'espace tangent $T_x(\mathcal{M})$ (régulier signifie convexe, fermé, pointu et d'intérieur non vide). On suppose que la variété causale $\mathcal{M}$ est homogène : $\mathcal{M} = G/H$ où G est un groupe de Lie connexe, H est un sous-groupe fermé, et le champ de cônes (C_x) est invariant par G, c'est à dire que

$$C_{gx} = \big(D\tau(g)\big)_x(C_x)$$

($\tau(g)$ désigne l'application $x \mapsto g \cdot x$). Une structure causale invariante sur $\mathcal{M}$ est déterminée par la donnée d'un cône $C_{x_0} \subset T_{x_0}(\mathcal{M})$ invariant par H (x_0 est le point de base, $x_0 = eH$). Nous supposons que la structure causale est *globale*, c'est à dire qu'il n'existe pas de courbe causale fermée non triviale. Elle définit

ISSN 0949–5932 / \$2.50

alors un ordre sur $\mathcal{M}$: on note $x \leq y$ s'il existe une courbe causale allant de x à y.

Soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$. Une *solution élémentaire* de D est une distribution E sur $\mathcal{M}$ invariante par H telle que

$$DE = \delta_0,$$

où δ_0 désigne la distribution de Dirac au point x_0. Elle permet de résoudre l'équation

$$Du = f, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty.$$

Une solution de cette équation est en effet donnée formellement par

$$u(x) = \int_{G/H} E(\dot{y}^{-1}x)f(\dot{y})d\dot{y}.$$

La solution élémentaire E est dite causale si son support est contenu dans $\{x \geq x_0\}$. Notons que, dans ce cas, la valeur de u au point x ne dépend que des valeurs de f sur l'ensemble $\{y \leq x\}$ (le 'passé' de x).

Dans cet article nous considérons la question suivante : à quelle condition l'opérateur différentiel invariant D possède-t-il une solution élémentaire causale ?

Nous rappelons dans la section 2 des résultats classiques sur les opérateurs différentiels à coefficients constants hyperboliques. Ceux-ci utilisent la caractérisation des transformées de Laplace de distributions tempérées et un théorème de Hörmander sur la minoration d'un polynôme par une puissance de la distance à l'ensemble de ses zéros. Dans la section 3 nous proposons une définition de l'hyperbolicité pour un opérateur différentiel invariant sur un espace symétrique ordonné. Dans le cas d'un espace symétrique de type Ol'shanskiĭ (section 4) et dans le cas d'un espace symétrique ordonné de rang un (section 5) la méthode des intégrales orbitales permet de se ramener à l'étude d'un opérateur différentiel à coefficients constants sur un sous-espace de Cartan. Nous montrons alors que tout opérateur différentiel invariant hyperbolique admet une solution élémentaire causale.

2. Opérateurs différentiels hyperboliques à coefficients constants

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $V \simeq \mathbb{R}^n$, et soit G le groupe des translations. Une structure causale invariante sur V est définie par un cône régulier $C \subset V$. Un opérateur différentiel invariant D est un opérateur différentiel à coefficients constants,

$$D = P\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big),$$

où P est un polynôme. Une solution élémentaire de D est une distribution E telle que

$$DE = \delta.$$

Elle est causale si $\mathrm{supp}(E) \subset C$. Le cône dual C^* est défini par

$$C^* = \{\lambda \in V^* \mid \forall x \in C,\ \langle \lambda, x\rangle \geq 0\}.$$

Si D admet une solution élémentaire causale E elle est unique. En effet si T est une distribution solution de $DT = 0$ et dont le support est contenu dans C, alors $T = 0$, car le produit de convolution $E * T$ est bien défini et

$$\begin{aligned} D(E * T) &= DE * T = T \\ &= E * DT = 0. \end{aligned}$$

Notons Ω l'intérieur de C^*. Nous dirons qu'un opérateur différentiel à coefficients constants $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ est *hyperbolique* par rapport au cône Ω s'il existe $\lambda_0 \in V$ tel que $P(\lambda)$ ne s'annule pas dans le tube $\lambda_0 + \Omega + iV$.

Théorème 2.1. *Si $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ est hyperbolique par rapport à Ω, alors il possède une solution élémentaire dont le support est contenu dans C.*

Si $n = 1$ tout opérateur différentiel à coefficients constants $D = P(\frac{d}{dx})$ non nul est hyperbolique (par rapport à $\Omega =]0, \infty[$). Si le polynôme P est unitaire la solution élémentaire causale E de D s'écrit

$$\langle E, \varphi\rangle = \int_0^\infty u(x)\varphi(x)dx,$$

où u est la solution de *Jean Mineur* de l'équation différentielle

$$Du = 0,$$

c'est à dire la solution qui vérifie les conditions de Cauchy $(0, 0, \ldots, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0, \\ u'(0) &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ u^{(k-2)}(0) &= 0, \\ u^{(k-1)}(0) &= 1, \end{aligned}$$

si $\deg P = k$.

La démonstration du théorème 2.1 utilise la transformation de Laplace. Celle que nous présentons ici est inspirée de Vladimirov [14]. Nous en avons simplifié certains points. (Voir aussi Atiyah-Bott-Gårding [1], Bogoljubov-Vladimirov [2].)

Fixons un produit scalaire euclidien sur V, et notons d la distance euclidienne associée. Pour $y \in C^*$ on note $\delta(y)$ la distance de y au bord ∂C^* de C^*,

$$\delta(y) = d(y, \partial C^*) = \inf_{z \in \partial C^*} d(y, z).$$

Lemme 2.2. *Pour* $y \in C^*$,

(i)
$$\inf_{x\in C, \|x\|=1} (x|y) = \delta(y),$$

et, pour $k > 0$, $y \in (C^*)^0$,

(ii)
$$\sup_{x\in C} \|x\|^k e^{-(x|y)} = \left(\frac{k}{e}\right)^k \delta(y)^{-k}.$$

Démonstration. (a) Le cône C^* est l'intersection des demi-espaces fermés

$$H_x = \{y \in V \mid (y|x) \geq 0\} \quad (x \in C, \|x\| = 1)$$

et son complémentaire est la réunion des demi-espaces ouverts

$$H_x^c = \{y \in V \mid (y|x) < 0\}.$$

Pour $y \in C^*$,

$$\delta(y) = \inf_{x\in C, \|x\|=1} d(y, H_x^c).$$

Puisque

$$d(y, H_x^c) = (x|y),$$

(i) s'en déduit.

(b) Soit $k > 0$ et $y \in (C^*)^0$, et fixons $x \in C$, $\|x\| = 1$, alors $(x|y) > 0$. Soit f la fonction définie sur $[0, \infty[$ par

$$f(t) = t^k e^{-t(x|y)}.$$

Le maximum de f est atteint en $t_0 = \frac{k}{(x|y)}$ et

$$f(t_0) = \left(\frac{k}{e}\right)^k (x|y)^{-k}.$$

Par suite

$$\sup_{x\in C} \|x\|^k e^{-(x|y)} = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sup_{x\in C, \|x\|=1} (x|y)^{-k}$$
$$= \left(\frac{k}{e}\right)^k \delta(y)^{-k}. \qquad \blacksquare$$

Exemples. Si C est le cône de Lorentz,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 \geq 0,\ x_1 \geq 0\},$$

alors $C = C^*$ et

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2}).$$

Soit $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ l'espace des matrices symétriques réelles $m \times m$ $(n = \frac{1}{2}m(m+1))$, muni du produit scalaire $(x|y) = \operatorname{tr} xy$, et soit $\Omega = (C^*)^0$ le cône des matrices symétriques définies positives. Alors $\delta(x)$ est égal à la plus petite valeur propre de x, ce qui peut aussi s'écrire

$$\delta(x) = |x^{-1}|^{-1},$$

où $|u|$ désigne la norme spectrale de u.

Ce dernier résultat se généralise au cas des cônes symétriques (voir J. Unterberger [12]).

Lemme 2.3. *Il existe un polynôme p sur V tel que, pour $\lambda \in C^* + iV$,*

$$|p(\lambda)|^2 \geq (1 + \|\lambda\|^2).$$

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V constituée de vecteurs appartenant à C^0. Posons

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \big(1 + (\lambda|e_j)\big).$$

Pour $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu \in C^*$,

$$\begin{aligned} |p(\mu + i\nu)|^2 &= \prod_{j=1}^{n} \Big(\big(1 + (\mu|e_j)\big)^2 + (\nu|e_j)^2 \Big) \\ &\geq \prod_{j=1}^{n} \big(1 + (\mu|e_j)^2 + (\nu|e_j)^2\big) \geq 1 + A\|\lambda\|^2. \end{aligned}$$ ■

On note $\mathcal{S}'(C)$ l'espace des distributions tempérées de support contenu dans C. C'est le dual de l'espace $\mathcal{S}(C)$ des fonctions φ sur C qui sont restrictions à C de fonctions de $\mathcal{S}(V)$. Si $T \in \mathcal{S}'(C)$ il existe M, k, ℓ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{x \in C, |\alpha| \leq \ell} (1 + \|x\|^2)^{\frac{k}{2}} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Si $\lambda \in \Omega + iV$, alors la fonction $\varphi_\lambda(x) = e^{-(\lambda, x)}$ appartient à $\mathcal{S}(C)$. Soit $T \in \mathcal{S}'(C)$. La transformée de Laplace de T est la fonction $\hat{T} = \mathcal{L}(T)$ définie sur $\Omega + iV$ par

$$\hat{T}(\lambda) = \langle T, \varphi_\lambda \rangle,$$

ce qu'on peut écrire formellement

$$\hat{T}(\lambda) = \int_C e^{-(\lambda|x)} T(x) dx.$$

On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes f dans le tube $\Omega + iV$ vérifiant la propriété suivante : il existe M, α, et $\beta \geq 0$ tels que

$$|f(\lambda)| \leq M(1 + \|\lambda\|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \big(1 + \delta(\mu)^{-\beta}\big) \quad (\lambda = \mu + i\nu, \mu \in \Omega).$$

Théorème 2.4. *La transformation de Laplace établit un isomorphisme entre les espaces $\mathcal{S}'(C)$ et $H(\Omega)$.*

Démonstration. (a) Soit $T \in \mathcal{S}'(C)$. Posons

$$f(\lambda) = \hat{T}(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega + iV).$$

Alors il existe M, k, ℓ tels que

$$|f(\lambda)| \leq M \sup_{x \in C, |\alpha| \leq \ell} (1 + \|x\|^2)^{\frac{k}{2}} |D^\alpha \varphi_\lambda(x)|.$$

D'une part

$$D^\alpha\varphi_\lambda(x) = (-\lambda)^\alpha e^{-(\lambda|x)},$$

et

$$|D^\alpha\varphi_\lambda(x)| \le M_1(1+\|\lambda\|^2)^{\frac{\ell}{2}} e^{-(\mu|x)}.$$

D'autre part, pour $x \in C$,

$$(1+\|x\|^2)^{\frac{k}{2}} e^{-(\mu|x)} \le M_2(1+\|x\|^k)e^{-(\mu|x)} \le M_3\big(1+\delta(\mu)^{-k}\big),$$

d'après le lemme 2.2.

(b) Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega + iV$ vérifiant

$$|f(\lambda)| \le M(1+\|\lambda\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\big(1+\delta(\mu)^{-\beta}\big).$$

Supposons d'abord $\alpha < -n$. Alors $(1+\|\nu\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ est intégrable sur V. Posons

$$g_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_V f(\mu+i\nu)e^{i(\nu|x)}d\nu.$$

A l'aide du lemme IX.3.2 de Faraut-Korányi [6] on montre que

$$g_\mu(x) = e^{-(\mu|x)}g(x),$$

où g est une fonction qui ne dépend pas de μ. De la majoration vérifiée par f on déduit que

$$|g(x)| \le M_1 e^{(\mu|x)}\big(1+\delta(\mu)^{-\beta}\big) \quad (\mu \in \Omega),$$

avec

$$M_1 = M\int_V (1+\|\nu\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}d\nu.$$

Si $x \notin C$, il existe $\mu \in \Omega$ tel que $(\mu|x) < 0$, et, pour tout $t > 0$,

$$|g(x)| \le M_1 e^{t(\mu|x)}\big(1+t^{-\beta}\delta(\mu)^{-\beta}\big),$$

donc $g(x) = 0$.

Si $\|\mu\| = 1$, alors $(x|\mu) \le \|x\|$, donc

$$|g(x)| \le M_1 e^{t\|x\|}\big(1+t^{-\beta}\delta(\mu)^{-\beta}\big),$$

et, pour $t = \frac{1}{\|x\|}$,

$$|g(x)| \le M_1 e\big(1+\delta(\mu)^{-\beta}\|x\|^\beta\big) \le M_1(1+\|x\|^\beta).$$

Ainsi la fonction g définit une distribution tempérée de support contenu dans C et on vérifie que f est la transformée de Laplace de g.

Si $\alpha \ge -n$, choisissons $N \ge \frac{1}{2}(\alpha+n)$ et posons

$$f_N(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{p(\lambda)^N},$$

où p est le polynôme du lemme 2.3. La fonction f_N vérifie une majoration semblable avec $\alpha_1 = \alpha - 2N$. On se trouve donc dans la situation précédente. Soit g_N la fonction correspondante. Finalement f est la transformée de Laplace de la distribution

$$T = p\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^N g_N. \qquad \blacksquare$$

Exemple. Soit $\Omega \subset V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ le cône des matrices symétriques définies positives. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ la fonction f définie sur $\Omega + iV$ par

$$f(\lambda) = \det(\lambda)^s$$

appartient à $H(\Omega)$. Il existe en effet une constante C telle que

$$|\det(\lambda)| \leq C\|\lambda\|^n.$$

D'autre part, si $\mu \in \Omega$, il existe $\gamma \in GL(n, \mathbb{R})$ tel que $\mu = \gamma\gamma^T$. Ainsi, si $\lambda = \mu + i\nu$,

$$\det(\lambda) = \det \mu \det(I + i\gamma^{-1}\nu(\gamma^{-1})^T),$$

et

$$|\det(I + i\gamma^{-1}\nu(\gamma^{-1})^T)| \geq 1, \ \det(\mu) \geq \delta(\mu)^n.$$

Par suite, si $\Re s \geq 0$,

$$|\det(\lambda)^s| \leq M(1 + \|\lambda\|^2)^{\frac{1}{2}n\Re s},$$

et si $\Re s \leq 0$,

$$|\det(\lambda)^s| \leq 1 + \delta(\mu)^{-n\Re s}.$$

Soit $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur V. Supposons que D possède une solution élémentaire tempérée E de support contenu dans C. La transformée de Laplace $f = \hat{E}$ de E est

$$f(\lambda) = \frac{1}{P(\lambda)} \quad (\lambda \in \Omega + iV).$$

En particulier cela implique que P ne s'annule pas dans le tube $\Omega + iV$. Ainsi, d'après le théorème 2.4, l'opérateur D admet une solution élémentaire tempérée de support contenu dans C si et seulement si $f = \frac{1}{P}$ appartient à l'espace $H(\Omega)$.

Pour démontrer le théorème 2.1 nous utiliserons le

Théorème 2.5. *Soit P un polynôme qui ne s'annule pas sur $\Omega + iV$, alors $f = \frac{1}{P}$ appartient à $H(\Omega)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 2 de Hörmander [8] (qui lui-même résulte du théorème de Seidenberg-Tarski), qu'on applique à $P(\mu + i\nu)$ considéré comme polynôme de $2n$ variables. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de P, et soit $d(\lambda, \mathcal{N})$ la distance du point λ à l'ensemble $\mathcal{N}$. Alors il existe des constantes C, α, β telles que

$$|P(\lambda)| \geq C(1 + \|\lambda\|^2)^{\frac{\alpha}{2}} d(\lambda, \mathcal{N})^\beta.$$

Puisque $\mathcal{N} \subset (\Omega + iV)^c$, pour $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu \in \Omega$,

$$d(\lambda, \mathcal{N}) \geq \delta(\mu),$$

et par suite

$$\frac{1}{|P(\lambda)|} \leq \frac{1}{C}(1 + \|\lambda\|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}(1 + \delta(\mu)^{-\beta}). \qquad \blacksquare$$

Exemple. Soient $V = \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$, et Ω le cône des matrices symétriques définies positives. Le polynôme P, $P(\lambda) = \det \lambda$ se n'annule pas dans le tube $\Omega + iV$.

Démonstration du théorème 2.1. Soit $D = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur hyperbolique par rapport au cône Ω. Il existe $\lambda_0 \in V$ tel que $P_1(\lambda) = P(\lambda_0 + \lambda)$ ne s'annule pas dans le tube $\Omega + iV$. D'après le théorème 2.5 la fonction $f = \frac{1}{P_1}$ appartient à $H(\Omega)$, et, d'après le théorème 2.4, f est la transformée de Laplace d'une distribution $E_1 \in \mathcal{S}'(C)$. La distribution $E = e^{(\lambda_0|x)} E_1$ est une solution élémentaire de D dont le support est contenu dans C. ∎

3. Opérateurs hyperboliques invariants sur un espace symétrique ordonné

Nous supposons maintenant que $\mathcal{M}$ est un espace symétrique : il existe un automorphisme involutif σ de G tel que

$$(G^\sigma)_0 \subset H \subset G^\sigma,$$

où $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ et $(G^\sigma)_0$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G^σ. Notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H,

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\},$$

et

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\} \simeq T_{x_0}(\mathcal{M}).$$

Une structure causale invariante sur $\mathcal{M} = G/H$ est déterminée par un cône régulier $C \subset \mathfrak{q}$ qui est invariant par $\mathrm{Ad}(H)$. Nous supposons que G est semi-simple de centre fini, et que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une paire symétrique irréductible. Il existe une involution de Cartan θ qui commute avec σ, $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. Nous fixons un cône régulier $C \subset \mathfrak{q}$ invariant par $\mathrm{Ad}(H)$ tel que $C \cap \mathfrak{k} = \{0\}$. La structure causale invariante correspondante est globale, et définit un ordre sur $\mathcal{M}$ (Faraut-Hilgert-Ólafsson [5], Theorem 4.1).

Il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ qui est contenu dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Soit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ le système de racines associé. On choisit dans Δ un système positif Δ^+ et on pose

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha, \ \rho = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} m_\alpha \alpha,$$
$$A = \exp \mathfrak{a}, \ N = \exp \mathfrak{n}.$$

L'ensemble NAH est un ouvert de G, et, pour un choix convenable de Δ^+, $\exp C \subset NAH$ ([5], Theorem 4.2). Pour $x \in NA \cdot x_0$ on pose

$$x = n \exp A(x) \cdot x_0 \quad (n \in N, \ A(x) \in \mathfrak{a}).$$

L'homomorphisme de Harish-Chandra associe à tout opérateur différentiel invariant D un polynôme $\gamma_D \in S(\mathfrak{a})$ invariant par le groupe de Weyl W du système Δ. La partie horisphérique de D s'exprime à l'aide de γ_D. Soit en effet f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $NA \cdot x_0 \subset \mathcal{M}$ invariante par N. Une telle fonction peut s'écrire

$$f(x) = f_0\big(A(x)\big),$$

où f_0 est une fonction définie sur $\mathfrak{a}$. La fonction Df est aussi invariante par N et s'écrit

$$Df(x) = e^{\langle \rho, X\rangle} \gamma_D\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big) e^{-\langle \rho, X\rangle} f_0(X)\big|_{X=A(x)}.$$

En particulier, si

$$f_0(X) = e^{\langle \rho - \lambda, X\rangle}, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*,$$

alors f est une fonction propre de D,

$$Df = \gamma_D(-\lambda) f.$$

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{M}$ invariante par H et dont le support est contenu dans $\{x \geq x_0\}$. La transformée de Laplace sphérique de f est définie par

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \int_{\mathcal{M}} e^{\langle \rho - \lambda, A(x)\rangle} f(x) dx,$$

si toutefois l'intégrale converge. La transformation de Laplace sphérique possède la propriété fondamentale suivante. Soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$. Sous des hypothèses convenables de différentiabilité et d'intégrabilité sur la fonction f,

$$\mathcal{L}(Df)(\lambda) = \gamma_D(\lambda)\mathcal{L}(f)(\lambda).$$

Ainsi, si E est une solution élémentaire causale de D, et s'il est possible de définir la transformée de Laplace sphérique de E, on doit avoir

$$\mathcal{L}(E)(\lambda) = \frac{1}{\gamma_D(\lambda)}.$$

Notons $\Omega \subset \mathfrak{a}^*$ l'intérieur du cône dual de $C \cap \mathfrak{a}$. Nous dirons qu'un opérateur différentiel invariant D sur $\mathcal{M} = G/H$ est *hyperbolique* par rapport à Ω s'il existe $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\gamma_D(\lambda)$ ne s'annule pas dans le tube $\lambda_0 + \Omega + i\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, et nous énonçons la conjecture suivante : *si D est un opérateur différentiel invariant hyperbolique par rapport à Ω, alors D possède une solution élémentaire causale.* Dans la section 4 nous démontrons cette conjecture dans le cas d'un espace symétrique ordonné de type Ol'shanskiĭ, et dans la section 5 pour un espace symétrique ordonné de rang un.

Terminons cette section par une remarque concernant la transformation d'Abel. Si f est une fonction continue sur $\{x \geq x_0\}$, nulle en dehors de $\{x \geq x_0\}$ et invariante par H, la transformée d'Abel de f est définie sur $\mathfrak{a}$ par

$$\mathcal{A}f(X) = e^{-\langle \rho, X\rangle} \int_N f(n \exp X) dn,$$

Soit D un opérateur différentiel invariant. Sous des hypothèses convenables de différentiabilité et d'intégrabilité,

$$\mathcal{A}(Df) = \gamma_D\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)\mathcal{A}f.$$

Si E est une solution élémentaire causale de D, et s'il est possible de définir la transformée d'Abel de E, alors $E_0 = \mathcal{A}(E)$ doit être une solution élémentaire de l'opérateur différentiel à coefficients constants

$$D_0 = \gamma_D\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big).$$

4. Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique de type Ol'shanskiĭ

Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie simple hermitienne, G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, et H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. L'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ est un espace symétrique de type Ol'shanskiĭ ([5], section 3). On note $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{h}$, et $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ il existe $T_\lambda \in \mathfrak{a}$ tel que $\lambda(X) = B(X, T_\lambda)$, où B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, et, pour $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$, on pose $\langle\lambda,\mu\rangle = B(T_\lambda, T_\mu)$. Il existe $X_0 \in \mathfrak{a}$ tel que $\operatorname{ad} X_0$ aient pour valeurs propres $-1, 0, 1$. On note

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres de $\operatorname{ad} X_0$. Soient $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, et

$$\Delta_i = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_i\}, \quad (i = -1, 0, 1).$$

Soit Δ^+ un système positif contenant Δ_1. On fixe dans la suite un cône régulier $C \subset i\mathfrak{h}$ invariant par $\operatorname{Ad}(H)$ tel que $X_0 \in C$. L'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$ sera noté $\mathfrak{a}'$,

$$\mathfrak{a}' = \{X \in \mathfrak{a} \mid \forall\alpha \in \Delta,\ \alpha(X) \neq 0\}.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on pose

$$\varpi(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \langle\alpha, \lambda\rangle,$$

et pour $X \in \mathfrak{a}$

$$J(X) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \operatorname{sh}\alpha(X).$$

Soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$. La partie radiale de D relativement à $\mathfrak{a}$ s'écrit

$$Df(h\exp X) = \frac{1}{J(X)}\gamma_D(\frac{\partial}{\partial X})(Jf)(X),$$

pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})^H$, $X \in \mathfrak{a}'$.

Théorème 4.1. *Si D un opérateur différentiel invariant hyperbolique par rapport à Ω, alors D possède une solution élémentaire causale.*
La démonstration utilise le théorème 2.1 et les propriétés des intégrales orbitales. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$, la fonction Mf est définie pour $X \in C^0 \cap \mathfrak{a}'$ par

$$Mf(X) = J(X) \int_H f(h \exp X) dh.$$

La définition habituelle utilise une intégrale sur le quotient $H/Z_H(\mathfrak{a})$, mais, dans la situation présente, $Z_H(\mathfrak{a})$ est un sous-groupe compact ([5], Lemma 5.1), et elle fait intervenir un facteur $\varepsilon(X)$ qui serait ici

$$\varepsilon(X) = \operatorname{sgn} \prod_{\alpha \in \Delta_1} \alpha(X),$$

mais les racines $\alpha \in \Delta_1$ sont positives sur $C^0 \cap \mathfrak{a}$. En effet

$$C^0 \cap \mathfrak{a} \subset C^0_{\max} \cap \mathfrak{a},$$

et

$$C^0_{\max} \cap \mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{a} \mid \forall \alpha \in \Delta_1,\ \alpha(X) > 0\}.$$

Proposition 4.2. (i) *Mf se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $C \cap \mathfrak{a}$.*
(ii) *Si D est un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$,*

$$M(Df) = \gamma_D(\frac{\partial}{\partial X}) Mf.$$

(iii) *Il existe une constante $c \neq 0$ telle que*

$$\varpi(\frac{\partial}{\partial X}) Mf(0) = cf(x_0).$$

Démonstration. L'application

$$X \mapsto \exp X,\ C \to \exp(C),$$

est un homéomorphisme, dont la restriction à C^0 est un difféomorphisme (Ol'shanskiĭ [10], Theorem 3.5). Par suite la proposition se déduit des propriétés des intégrales orbitales qui ont été établies par Harish-Chandra dans le cas d'une algèbre de Lie. On peut trouver ces résultats dans Varadarajan [13]. La propriété (i) est une conséquence du théorème 23, Part I, Section 3, p.47. En effet la fonction Mf est définie sur $C_{\max} \cap \mathfrak{a}'$. De ce théorème on déduit les faits suivants. Si Γ est une composante connexe de $C_{\max} \cap \mathfrak{a}'$, alors la fonction Mf, ainsi que ses dérivées, se prolongent continuement à l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ. De plus la fonction Mf, ainsi que ses dérivées, n'admettent pas de discontinuité le long d'un mur d'équation $\langle \alpha, X \rangle = 0$ si $\alpha \in \Delta_0$. Il en résulte que Mf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $C^0_{\max} \cap \mathfrak{a}$ et se prolonge par continuité à $C_{\max} \cap \mathfrak{a}$ ainsi que ses dérivées. Par suite Mf est égale à la restriction à $C_{\max} \cap \mathfrak{a}$ d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{a}$. En effet, du théorème de prolongement de Whitney, on déduit que si U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et si $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se prolonge par continuité à $\bar{U}$ ainsi que chacune de ses dérivées, alors F est égale à la restriction à U d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

La propriété (ii) se déduit du théorème 9, Part I, Section 3, p.37, et la propriété (iii) du théorème 11, Part I, section 8, p.126 car $\mathfrak{t} = i\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{g}$. (Voir aussi Bouaziz [3].) ∎

Démonstration du théorème 4.1. D'après le théorème 2.1 l'opérateur $\gamma_D(\frac{\partial}{\partial X})$ possède une solution élémentaire E_0 de support contenu dans $C \cap \mathfrak{a}$, qu'on peut supposer W_0-invariante, $W_0 = N_H(\mathfrak{a})/Z_H(\mathfrak{a})$. Pour une fonction f de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ on pose

$$\langle E, f\rangle = \frac{1}{c}\langle E_0, \varpi(\frac{\partial}{\partial X})Mf\rangle.$$

Ceci est bien défini puisque Mf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $C \cap \mathfrak{a}$ (Proposition 3.1 (i)). Ainsi E est une distribution H-invariante sur $\mathcal{M}$ dont le support est contenu dans $\{x \in \mathcal{M} \mid x \geq x_0\}$. Montrons que E est une solution élémentaire de l'opérateur D :

$$\begin{aligned}\langle DE, f\rangle &= \langle E, D^T f\rangle \\ &= \frac{1}{c}\langle E_0, \varpi(\frac{\partial}{\partial X})M(D^T f)\rangle.\end{aligned}$$

D'après la propriété (ii) de la proposition 3.1,

$$= \frac{1}{c}\langle E_0, \varpi(\frac{\partial}{\partial X})\gamma_{D^T}(\frac{\partial}{\partial X})Mf\rangle.$$

Puisque $\gamma_{D^T}(\lambda) = \gamma_D(-\lambda)$,

$$= \frac{1}{c}\langle \gamma_D(\frac{\partial}{\partial X})E_0, \varpi(\frac{\partial}{\partial X})Mf\rangle.$$

On utilise maintenant la propriété (iii) de la proposition 3.1,

$$= f(x_0).$$

■

Exemple. Soient $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ et $H = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SU}(n, n)$. On peut prendre pour $\mathfrak{a}$ l'espace des matrices

$$X = \begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_n & & & \\ & & & -t_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -t_n \end{pmatrix} \qquad (t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}),$$

et $C \subset \mathfrak{q}$ est le cône invariant par $\mathrm{Ad}\, H$ tel que $C \cap \mathfrak{q}$ soit défini par $t_1 \geq 0$, $\ldots$, $t_n \geq 0$. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ nous notons

$$\lambda(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ il existe un opérateur différentiel invariant D tel que

$$\gamma_D(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i^2 + a).$$

et cet opérateur est hyperbolique par rapport à Ω,

$$\Omega = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0\}.$$

5. Espaces symétriques ordonnés de rang un

Dans cette section $\mathcal{M} = G/H$ avec $G = \mathrm{SO}_0(1,n)$, $H = \mathrm{SO}_0(1,n-1)$. L'espace $\mathcal{M}$ s'identifie à l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1,$$

avec le point de base $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)$. On considère dans $\mathfrak{q}$,

$$\mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^T & 0 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

le cône de Lorentz C défini par

$$(v^0)^2 - (v^1)^2 - \cdots - (v^{n-1})^2 \geq 0, \ v^0 \geq 0.$$

Ce cône, qui est invariant par $\mathrm{Ad}\, H$, définit sur $\mathcal{M}$ une structure causale invariante globale. La forme quadratique lorentzienne ci-dessus définit sur $\mathcal{M}$ une structure pseudo-riemannienne de Lorentz invariante.

Le sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ est de dimension un. Nous le choisisons égal à $\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $A = \{a_t = \exp tX_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Dans le cas de cet espace symétrique ordonné tout opérateur différentiel invariant non nul est hyperbolique.

Théorème 5.1. *Tout opérateur différentiel invariant non nul possède une solution élémentaire causale.*

Comme celle du théorème 4.1 la démonstration utilise les propriétés des intégrales orbitales. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ on note $\mathfrak{M}f$ la fonction définie pour $t > 0$ par

$$\mathfrak{M}f(t) = \int_H f(ha_t \cdot x_0) dh.$$

La fonction $\mathfrak{M}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, de support limité à droite.

Si F est une fonction définie sur $\mathcal{M}$ qui est H-invariante, de support contenu dans $\{x \geq x_0\}$,

$$\int_{\mathcal{M}} F(x) f(x) dx = \int_0^\infty F(a_t \cdot x_0) \mathfrak{M}f(t) (\mathrm{sh}\, t)^{n-1} dt,$$

pour un choix convenable de la mesure de Haar dh sur H.

Si $\square$ désigne le pseudo-laplacien de $\mathcal{M}$, alors

$$\mathfrak{M}(\square f) = L\mathfrak{M}f,$$

où L est la partie radiale de $\square$,

$$L = \frac{1}{(\operatorname{sh} t)^{n-1}} \frac{d}{dt}\Big((\operatorname{sh} t)^{n-1} \frac{d}{dt}\Big).$$

Notons $\mathcal{F}_n$ l'espace des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, de support limité à droite et admettant en 0 un développement asymptotique de la forme suivante : si n est impair,

$$\varphi(t) \sim t^{-n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{2k},$$

et, si n est pair

$$\varphi(t) \sim t^{-n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{2k} + \log t \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^{2k}.$$

Ceci signifie que, si n est impair,

$$t^{n-2}\varphi(t) = \varphi_0(t) + t^{n-2}\varphi_1(t),$$

et, si n est pair,

$$t^{n-2}\varphi(t) = \varphi_0(t) + t^{n-2} \log t \varphi_1(t),$$

où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions paires de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Les coefficients α_k et β_k sont des formes linéaires sur l'espace $\mathcal{F}_n$. Nous noterons $\alpha_k = \alpha_k(\varphi)$, $\beta_k = \beta_k(\varphi)$.

Proposition 5.2. *Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$, alors $\mathfrak{M}f$ appartient à l'espace $\mathcal{F}_n$. De plus*

$$\beta_0(\mathfrak{M}f) = a_n f(x_0),$$

où a_n est une constante non nulle.

Démonstration. C'est une conséquence de résultats de Méthée [9], généralisés par Tengstrand [11]. Voir aussi Faraut [4] p.432. ∎

L'espace $\mathcal{F}_n$ est muni d'une topologie pour laquelle l'application $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{F}_n$ est continue.

Soit D un opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{M}$. Supposons qu'il admette une solution élémentaire causale E. S'il est possible de l'écrire

$$\langle E, f\rangle = \int_{\{x \geq x_0\}} E(x) f(x) dx,$$

où E est une fonction H-invariante, alors

$$\langle E, f\rangle = \int_0^\infty E(a_t \cdot x_0)\varphi(t)(\operatorname{sh} t)^{n-1} dt,$$

où $\varphi = \mathfrak{M}f$. Supposons que la transformée d'Abel $E_0 = \mathcal{A}(E)$ soit bien définie. Pour exprimer la distribution E à l'aide de E_0 nous allons introduire un opérateur $\mathcal{W}$ tel que

$$\langle E, f\rangle = c\int \mathcal{W}\varphi(t)E_0(t)dt.$$

Dans [5] p.963, nous avons montré que, si n est impair, $n = 2m+1$,

$$E(a_t\cdot x_0) = c_n\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m E_0(t),$$

et si n est pair, $n = 2m$,

$$E(a_t\cdot x_0) = c_n\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m \int_0^t E_0(\tau)(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\tau)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\tau d\tau.$$

Ceci conduit à définir l'opérateur $\mathcal{W}$ comme suit : si $n = 2m+1$,

$$\mathcal{W}\varphi = \Big(\frac{d}{dt}\frac{1}{\operatorname{sh} t}\Big)^m\Big((\operatorname{sh} t)^{2m}\varphi\Big),$$

et si $n = 2m$,

$$\mathcal{W}\varphi(t) = \operatorname{sh} t\int_t^\infty(\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} t)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{d}{ds}\frac{1}{\operatorname{sh} s}\Big)^m\Big((\operatorname{sh} s)^{2m-1}\varphi(s)\Big)ds.$$

Théorème 5.3. *L'opérateur $\mathcal{W}$ est une application continue de $\mathcal{F}_n$ dans $\mathcal{C}_c^\infty([0,\infty[)$ vérifiant*

(i) $\mathcal{W}L = \Big(\frac{d^2}{dt^2} - \rho^2\Big)\mathcal{W}$, *où* $\rho = \frac{n-1}{2}$,

(ii) $\big(\mathcal{W}\varphi\big)(0) = b_n\beta_0(\varphi)$, *où* b_n *est une constante non nulle.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{W}$ applique $\mathcal{F}_n$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(]0,\infty[)$. Si le support de φ est contenu dans l'intervalle $[0,\tau]$, il en est de même du support de $\mathcal{W}\varphi$. La propriété (i) résulte du fait que $\mathcal{W}$ est l'opérateur transposé de l'inverse de la transformation d'Abel. Montrons que si $\varphi\in\mathcal{F}_n$ alors $\mathcal{W}\varphi(t)$ a une limite $\mathcal{W}\varphi(0)$ quand $t\to 0$, et que

$$\mathcal{W}\varphi(0) = b_n\beta_0(\varphi).$$

Si $n = 2m+1$,

$$\mathcal{W}\varphi = \operatorname{sh} t\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\Big((\operatorname{sh} t)^{2m-1}\varphi\Big),$$

et

$$(\operatorname{sh} t)^{2m-1}\varphi = \varphi_0 + t^{2m-1}\varphi_1,$$

où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions paires de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. La fonction

$$\psi_0 = \operatorname{sh} t\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\varphi_0$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire. La fonction

$$\psi_1 = \operatorname{sh} t\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\Big(t^{2m-1}\varphi_1\Big)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et paire. De plus

$$\psi_1(0) = (2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1\varphi_1(0).$$

Si $n = 2m$,

$$(\operatorname{sh} t)^{2m-2}\varphi(t) = \varphi_0(t) + t^{2m-2}\log t\varphi_1(t),$$

où φ_0 et φ_1 sont deux fonctions paires de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\Big(\varphi_0\Big) = \psi_0,$$
$$\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\Big(t^{2m-2}\log t\varphi_1\Big) = \frac{1}{t^2}\psi_1 + \log t\psi_2,$$

où ψ_0, ψ_1, et ψ_2 sont des fonctions paires de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus

$$\psi_1(0) = (2m-2)(2m-4)\cdots 2\varphi_1(0).$$

On peut écrire

$$\mathcal{W}\varphi(t) = \operatorname{sh} t\int_t^\infty(\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} t)^{-\frac{1}{2}}\psi(s)\operatorname{sh} s ds,$$

avec

$$\psi(s) = \Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)^m\Big((\operatorname{sh} t)^{2m-2}\varphi\Big).$$

En posant $x = \operatorname{ch} s$, l'intégrale s'écrit

$$\int_{\operatorname{ch} t}^\infty (x - \operatorname{ch} t)^{-\frac{1}{2}}\Psi(x)dx,$$

puis, en posant $\Psi_0(x) = (x-1)\Psi(x)$ on obtient

$$\mathcal{W}\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch} t - 1}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)}\Psi_0\big(\operatorname{ch} t + (\operatorname{ch} t - 1)u\big)du.$$

L'intégrale ci-dessus a une limite quand $t \to 0$. Ceci montre que $\mathcal{W}\varphi$ a une limite quand $t \to 0$, et que

$$\mathcal{W}\varphi(0) = b_n\beta_0(\varphi).$$

En utilisant la propriété (i) on en déduit que toutes les dérivées d'ordre pair de $\mathcal{W}\varphi$ ont des limites quand $t \to 0$. Par suite $\mathcal{W}\varphi$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty([0,\infty[)$. ∎

Démonstration du théorème 5.1. Puisque l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ est engendrée par $\square$, et puisque

$$\gamma_{\square}(\lambda) = \lambda^2 - \rho^2,$$

il résulte du théorème 5.3 que, pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$,

$$\mathcal{W}\mathfrak{M}D = \gamma_D\Big(\frac{d}{dt}\Big)\mathcal{W}\mathfrak{M}.$$

Soit $D \in \mathbb{D}(G/H)$ et soit E_0 la solution élémentaire causale de l'opérateur $\gamma_D(d/dt)$: E_0 est une distribution sur $\mathbb{R}$ de support contenu dans $[0, \infty[$ vérifiant

$$\gamma_D\Big(\frac{d}{dt}\Big)E_0 = \delta.$$

Soit E la distribution sur $\mathcal{M} = G/H$ définie par

$$\langle E, f\rangle = \frac{1}{a_n b_n}\langle E_0, \mathcal{W}\mathfrak{M}f\rangle.$$

Le support de E est contenu dans $\{x \geq x_0\}$ et

$$\begin{aligned}\langle DE, f\rangle &= \langle E, Df\rangle \\ &= \frac{1}{a_n b_n}\langle E_0, \mathcal{W}\mathfrak{M}Df\rangle \\ &= \frac{1}{a_n b_n}\langle E_0, \gamma_D\Big(\frac{d}{dt}\Big)\mathcal{W}\mathfrak{M}f\rangle \\ &= \frac{1}{a_n b_n}\langle \gamma_D\Big(\frac{d}{dt}\Big)E_0, \mathcal{W}\mathfrak{M}f\rangle \\ &= \frac{1}{a_n b_n}\Big(\mathcal{W}\mathfrak{M}f\Big)(0) \\ &= \frac{1}{a_n}\beta_0(\mathfrak{M}f) = f(x_0).\end{aligned}$$ ∎

Exemple. Considérons l'opérateur différentiel invariant $D = \square + aI$ $(a \in \mathbb{C})$. Alors

$$\gamma_D(\lambda) = \lambda^2 - \alpha^2,$$

avec $\alpha^2 = \rho^2 - a$ et

$$E_0(t) = Y(t)\frac{\operatorname{sh}(\alpha t)}{\alpha},$$

où Y est la fonction d'Heaviside.

Pour $n = 3$, la solution élémentaire causale E de D est une fonction localement intégrable,

$$\begin{aligned}E(a_t \cdot x_0) &= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\Big)E_0(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}Y(t)\frac{\operatorname{ch}(\alpha t)}{\operatorname{sh} t}.\end{aligned}$$

Pour $n=2$, la solution élémentaire causale de E est aussi une fonction localement intégrable,

$$E(a_t \cdot x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\mathrm{ch}(\alpha\tau)}{\sqrt{\mathrm{ch}\, t - \mathrm{ch}\, \tau}} d\tau,$$

et s'exprime à l'aide de la fonction de Legendre,

$$E(a_t \cdot x_0) = \tfrac{1}{2} P_s(\mathrm{ch}\, t),$$

avec $s + \frac{1}{2} = \alpha$. En particulier, pour $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\langle E, f \rangle = \tfrac{1}{2} \int_{\{x \geq x_0\}} f(x) dx.$$

References

[1] Atiyah, M., R. Bott, and L. Gårding, *Lacunas for hyperbolic differential equations with constant coefficients*, Acta. Math. **124** (1970), 109–189.

[2] Bogoljubov, N. N., and V. S. Vladimirov, *Representations of n-points functions*, Proc. Steklov Inst. Math. **112** (1971), 1–18.

[3] Bouaziz, A., *Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **27** (1994), 573–609.

[4] Faraut, J., *Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques*, J. Math. pures et appl.**58** (1979), 369–444.

[5] Faraut, J., J. Hilgert and G. Ólafsson, *Spherical functions on ordered symmetric spaces*, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 927–966.

[6] Faraut, J., Korányi, A., „Analysis on symmetric cones," Oxford University Press, 1994.

[7] Helgason, S., „Groups and geometric analysis," Academic Press, 1984.

[8] Hörmander, L., *On the division of distributions by polynomials*, Ark. Math. **3** (1958), 555–568.

[9] Méthée, P. D., *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz*, Comment. Math. Helvetici **28** (1954), 225–269.

[10] Ol'shanskiĭ, G. I., *Invariant cones in Lie algebras, Lie semi-groups and the holomorphic discrete series* Funct. Anal. and Appl. **15** (1981), 275–285.

[11] Tengstrand, A., *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*, Math. Scand. **8** (1960), 201–218.

[12] Unterberger, J., *Inégalités de Carleman sur les cônes symétriques*, J. Math. pures appl. **7** (1992), 527–542.

[13] Varadarajan, V. S., „Harmonic analysis on real reductive groups", Lecture Notes in Math. 576, Springer Verlag, 1977.

[14] Vladimirov, V. S., „Distributions en physique mathématique", Editions Mir, 1979.

Institut de Mathématiques de Jussieu
(UMR 9994 du CNRS)
Université Pierre et Martie Curie
Case 247, 4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
e.mail faraut@mathp6.jussieu.fr

Received May 25, 1996
and in final form September 12, 1996