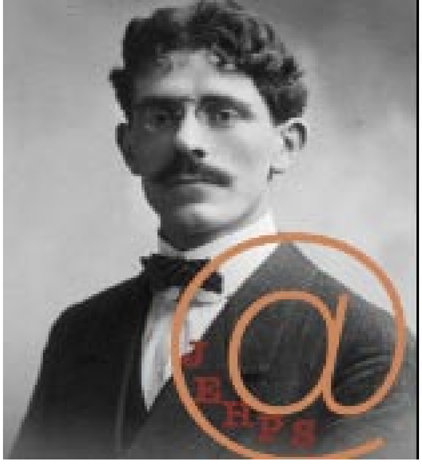


Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 3, n°1; Juin/June 2007

www.jehps.net

Ten letters from Wolfgang Doeblin to Bohuslav Hostinský

Laurent MAZLIAK[1]

Observation: We present the 10 letters sent by Doeblin to Hostinský between 1936 and 1938, found in Hostinský's correspondence in the Archives of Masaryk University in Brno. This publication is related to my paper (in English) entitled *On the exchanges between Wolfgang Doeblin and Bohuslav Hostinský*, to be published in the **Revue d'Histoire des Mathématiques** in 2007. For the reader's comfort, we also provide the bibliography of the aforementioned paper which is used in footnotes.

Lettre 1

Paris, Institut Henri Poincaré, 29.6.[2].
Monsieur le professeur,
Je viens de lire votre note sur les mouvements dépendant de l'hasard[3], permettez-moi de vous écrire les remarques suivantes qu'on obtient immédiatement en application de méthodes et de résultats qui seront publiés dans 2 semaines (pour le cas d'un nombre fini d'états) dans une note aux Comptes-Rendus.
D'abord la limite dans le cas régulier de

$$\frac{1}{n}(X^{(1)} + \dots X^{(n)} - nR)^2$$

est évidemment avec les notations de M.Fréchet

$$\sum_k \sum_t P_k \rho_{kt}(x_t - R)^2 + 2 \sum_{k,i} \sum_{n,t} P_k s_{ki} \rho_{it} \rho_{kn} (x_t - R)(x_n - R)$$

On obtient une formule un peu modifiée (mais la limite existera encore) si l'unité est racine simple de l'équation caractéristique. On peut montrer que si cette limite est $\neq 0$

$$\frac{X^{(1)} + \dots X^{(n)} - nR}{\sqrt{n}}$$

suit une loi qui tend vers la loi de Gauss, et ce qui peut être utile pour caractériser la stabilité à la Poisson du mouvement (si elle existe) que le théorème du logarithme itéré sous la forme de M.Paul Lévy sera applicable.
Dans le cas où l'unité est racine multiple de l'équation caractéristique, si l'on désigne par R_j

$$\lim \frac{E[X^{(1)} + \dots X^{(n)}]}{n}$$

[1]Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, and Institut de mathématiques, projet 'Histoire des Sciences Mathématiques', Université Paris VI, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. mazliak@ccr.jussieu.fr

[2]L'année n'est pas précisée mais elle semble clairement être 1936 en raison de la lettre suivante et de l'annonce de la publication de la note [9] présentée ce même jour à l'Académie par Borel.

[3]*sic*

l'état initial étant l'état E_j, alors en général la valeur moyenne de $\frac{[X^{(1)}+\ldots X^{(n)}-nR]^2}{n}$ augmente indéfiniment. Toutefois on peut démontrer que dans tous les cas, on a

$$\frac{1}{n^2}E[X^{(1)}+\ldots X^{(n)}-nR_j]^2 = W_j + \frac{1}{n}V_j + O(\frac{1}{n^2})$$

où W_j et V_j sont bien déterminés et facile[4] à calculer (comme leur forme et leur calcul suppose la connaissance de ma note je les omets ici) Dans le cas particulier où les ρ_{it} sont nulles pour $i \neq t$, on obtient un résultat qui généralise les formules de MM.Potoček et Fréchet qui n'avaient pu établir l'existence de V_j que dans le cas semi-régulier (Ce résultat que j'ai obtenu il y a plusieurs mois ne se trouvera pas dans ma note, car il ne me paraissait pas suffisamment important)
On peut montrer que la loi que suit $\frac{X^{(1)}+\ldots X^{(n)}}{n}$ tend vers une loi discontinue prenant au plus n valeurs, si toutes ces valeurs sont égales à β alors la loi de

$$\frac{\sum X^{(i)} - n\beta}{\sqrt{n}}$$

tendra vers une loi de la forme

$$\sum_{\nu} \theta_\nu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\nu}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\nu}} dx + \sum_{\nu} \theta_\nu \frac{\mid X \mid + X}{2}$$

avec $\sum_\nu \theta_\nu = 1$
Somme toute, on obtient pour les $X^{(1)}+\ldots X^{(n)}$ tous les résultats que j'ai démontré pour des variables liés[5]en chaîne de Markoff proprement dite. Il est possible de généraliser tous ces résultats au cas d'une infinité continue d'états.
Veuillez croire, Monsieur le professeur, à mon plus profond respect.
W.Doeblin

Lettre 2

Monsieur le Professeur,
Je constate en relisant la lettre que je vous ai adressé, qu'elle contient une erreur, j'avais écrit que

$$E[X_1 + \ldots X_n - nR]^2 = n^2 W_j + nV_j + K$$

ce qui n'est point le résultat que j'ai trouvé.
Dans le cas général,

$$\frac{E[X_1 + \ldots X_n - nR]^2 - n^2 W_j}{n} = V_j(n) + O(\frac{1}{n})$$

sera une fonction asymptotiquement périodique de n avec au plus la même période que celle de p_{ik}^n. Mais si $W_j = 0$ alors on peut affirmer que $V_j(n)$ n'est pas périodique et égal à V_j; ce qui est d'ailleurs la seule chose qui m'importait. Comme le reste n'intervenait pas dans mes travaux, et comme c'est il y a assez longtemps que je m'en avais occupé[6], j'ai fait une confusion de mémoire, dont je vous prie de m'excuser.
Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de mon profond respect.
W.Doeblin

[4] *sic*
[5] *sic*
[6] *sic*

Lettre 3

Paris, Institut H.Poincaré
Monsieur le Professeur,
Je m'excuse de vous demander quelques renseignements bibliographiques, ne connaissant à Paris personne qui pourrait me les donner
a) Existe-t-il des travaux de Markoff sur les probabilités en chaîne, autres que ceux que vous énumérez dans les "Méthodes générales…" ?
b) Dans quel travail de Markoff a-t-il étendu la loi de Gauss aux chaînes simples variables avec $p_{ij}^{(n)} > a$?
c) Dans quel travail Markoff a-t-il évalué l'ordre de grandeur de l'écart-type pour les mêmes chaînes simples? A-t-il évalué cet ordre seulement dans le cas de 2 états?
d) Dans les "Méthodes générales…", vous dites que, sous les hypothèses dans lesquelles vous vous placez,les $S^{(n)}$ suivent après réduction à la limite une loi de Gauss.
Ceci est en effet très facile à démontrer, mais par qui (et quand) cela a-t-il été démontré la première fois?
Je vous serais très reconnaissant, si vous pouviez me renseigner sur ces questions Je ne vois en effet (en dehors de M.S.Bernstein) que vous pour pouvoir y répondre.
Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de mon profond respect.
W.Doeblin
En bas de page, de la main de Hostinský: Odp. 20. X: 36[7]

Lettre 4

Monsieur le Professeur,
Je n'ai pas pu vous envoyer autre chose que la note sur les chaînes de Markoff, n'ayant - en dehors du travail avec M.Paul Lévy - publié que cette note là. Avant d'avoir reçu votre lettre je n'avais pas pensé à publier pour l'instant les résultats que je vous avais communiqué[8], Ce ne sont en effet que de simples remarques qui s'obtiennent très facilement peut-être moins à partir des résultats que j'ai trouvé pour les chaînes simples à un nombre fini d'états (et dont j'ai publié ceux qui me paraissent relativement les plus importants) que plutôt à partir des méthodes et lemmes que j'ai employés dans ce cas. J'avais toutefois l'intention de consacrer au schéma que vous avez étudié dans votre note un paragraphe d'un mémoire sur les chaînes variables de Markoff, dans lequel je pense résumer tout ce qu'on sait actuellement sur ce sujet et d'y ajouter quelques résultats que j'ai trouvé dans ce domaine Mais ce mémoire ne paraitra qu'en 1938 après la publication de ma thèse qui ne porte que sur des chaînes de Markoff à éléments indépendants du temps. D'ailleurs je n'ai pas encore eu le temps de m'occuper sérieusement des chaînes variables et des différentes généralisations des chaînes de Markoff.
Maintenant je pense quand même de les publier peut-être encore cette année dans les Comptes-Rendus ensemble avec quelques autres résultats dans la note que vous trouverez à la page suivante. Je ne suis pas sûr, parceque les résultats de cette note ne me paraissent pas trop importants, que

[7] *Odp.* pour *Odpověděl*, répondu.

[8] *sic*. La faute d'accord se reproduira presque systématiquement par la suite et nous ne la signalerons plus. Peut-être Doeblin, malgré l'excellente connaissance du français qu'on constate, ignorait-il cette règle de grammaire?

moi-même je n'aime pas beaucoup de publier souvent[9], et que je connais l'hostilité de M.Fréchet contre les publications avant la thèse.
D'ailleurs dans cette thèse je consacre 3 paragraphes (cas d'un nombre fini d'états, cas continu cas d'équation de Smoluchovsky) aux probabilités inverses et à l'inversion des lois de la nature ou je précise un peu grâce à la théorie des groupes finaux et sous-groupes cycliques - resp. ensembles finaux et sous-ensembles cycliques - les résultats de M.Kolmogoroff. Je ne connais d'ailleurs pas encore vos résultats pour cette question.
Je vous suis très reconnaissant pour vos indications bibliographique; il y a toutefois une question que je me permets de répéter: qui et quand a démontré[10] pour la première fois dans le cas continu qu'on a par exemple dans le cas que vous considérez dans le "Mémorial" la loi de Gauss. Je voudrais en effet placer avant chaque section de chapitre un résumé historique et pour les variables aléatoires simplement enchaîné[11] dans le cas continu je ne connais que les travaux sur l'écart-type de MM.Potocek et Fréchet et le travail de S.Bernstein duquel on peut tirer très facilement le théorème sur la loi de Gauss, mais qui ne l'a donné.
Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de mon profond respect
W.Doeblin

Note. Quelques remarques sur les chaînes de Markoff variables et un problème voisin

1- Envisageons un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états $E_1 \dots E_\nu$ Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité pour que le système passe de l'état E_i à la $(n-1)^{\text{e}}$ épreuve à l'état E_j à la n^{e} épreuve, $p_{ij}^{(n)}$ ne dépendant que de $n\, i$ et j. Une suite d'états ayant (à un certain instant) une probabilité non nulle d'être parcouru nécessairement sera dite un chemin, si $p_{ij}^{(n)}$ est nulle nous supposons qu'il est impossible de passer de E_i à E_j dans la n^{e} épreuve. Supposons que les $p_{ij}^{(n)}$ varient de telle sorte que pour un certain nombre de couples $i, j, p_{ij}^n = 0$ quelque soit n, pour tous les autres $p_{ij}^n > a > 0$, quelque soit n. Alors nous pouvons montrer de nouveau l'existence d'un certain nombre de groupes d'états $\mathcal{G}_1 \dots \mathcal{G}_K$ appelés groupes finaux[12] et jouissant des propriétés suivantes:
a) la probabilité pour que le système se trouve à la n^{e} épreuve à l'extérieur de $\sum \mathcal{G}_i$ tend (exponentiellement) vers zéro si n augmente; b) le système ne peut pas quitter le groupe final dans lequel il est amené; c) il passera avec probabilité 1 par tous les états de ce groupe final d) chaque groupe final $\mathcal{G}_\alpha$ se décompose en un certain nombre de sous-groupes cycliques $\overline{1}, \dots \overline{d(\alpha)}$ tels que le système se trouvant dans $\mathcal{G}_\alpha$ passe nécessairement circulairement d'un sous-groupe cyclique au suivant e) le principe presque ergodique est applicable à l'intérieur d'un groupe final c-à-d si l'on connait la position du système (dans le groupe final) à un certain instant, la connaissance de

[9] La remarque de Doeblin est *a posteriori* assez amusante car son flot de publications est quand même soutenu. On pourra trouver dans [15] la liste complète des 27 publications de Doeblin entre 1936 et 1940.

[10] *sic*

[11] *sic*

[12] La nomenclature va hésiter pendant longtemps entre le néologisme *finaux* et la forme correcte mais laide *finals*. Dans sa thèse imprimée, Doeblin adoptera cette dernière solution. Lévy en 1951 aura encore des problèmes de conscience pour dire *finals* (voir Lettre 67 dans [1]). Fréchet, quant à lui, dans le traité [21] où il reprend l'ensemble des résultats connus sur les chaînes à valeurs finies, parle de *groupement final* (et de *groupement de passage*).

la position du système à un instant ultérieur ne donne qu'un renseignement arbitrairement petit sur la position du système à des épreuves suffisamment éloignés[13]. —-

Affectons à chaque état E_i un nombre X_i. Supposons d'abord que l'état initial se trouve dans $\overline{j(\alpha)}$ Soit $\mathcal{E}_{\overline{j(\alpha)}}[\sum X^{(i)}]$ l'espérance mathématique de $\sum X^{(i)}$ dans cette hypothèse ($\mathcal{E}_{j(\alpha)}[\sum X_j^{(i)}]$ ne dépend que d'une quantité finie de la distribution initiale de probabilités dans $\overline{j(\alpha)}$). Soient $\mathcal{E}_{\overline{j(\alpha)}}[\sum X_i]/n = M_{j(\alpha)}(n)$ (borné) et $\mathcal{E}_{\overline{j(\alpha)}}[\sum X^{(i)} - nM_{j(\alpha)}(n)]^2/n = \sigma^2_{j(\alpha)}(n)$ (borné). Alors soit $\mathcal{E}_{j(\alpha)}[\sum X^{(i)} - nM_{\overline{j(\alpha)}}(n)]^2$ reste borné et dans ce cas $\mathcal{E}_{i(\alpha)}[\sum X^i - nM_{i(\alpha)}(n)]^2$ reste borné quelque soit $i(\alpha)(= 1(\alpha)\dots d(\alpha))$ et $X^{(1)} + X^{(n)}$ est (après réduction de chaque X_i ($E_i \in \mathcal{G}_\sigma$) d'un nombre M_α indépendant du système particulier de p^n_{ij} satisfaisant à nos conditions) une fonction bien déterminée de l'état initial (dans $\mathcal{G}_\alpha$) et de l'état final indépendante de n (Condition néc. et suff. Pour tout chemin fermé $E_iE_{i_1}\dots E_{i_{n-1}}E_i\;\; E_i \in \mathcal{G}_\alpha, (X_i - M_\alpha) + (X_{i_1} - M_\alpha) + \dots (X_{i_{n-1}} - M_\alpha) = 0$), soit $\sigma^2_{j(\alpha)}(n)$ est pour $n > N$ borné inférieurement Dans ce cas $[\sum X^{(i)} - \mathcal{E}_{j(\alpha)}[\sum X^{(i)}]]/\sigma_{j(\alpha)}\sqrt{n}$ suit une loi tendant vers la loi de Gauss réduite, tous les moments de cette grandeur tendront vers les moments correspondant de la loi de Gauss, et le théorème du logarithme itéré sous la forme de M.Paul Lévy sera satisfait.

Supposons maintenant que l'état initial E_i se trouve à l'extérieur des groupes finaux. Soit $\Pr[i, \overline{j(\alpha)}]$ la limite si $m \to \infty$ de la probabilité d'être à la $md(\alpha)^{\text{e}}$ épreuve à partir de l'état E_i à l'épreuve 0 dans $\overline{j(\alpha)}$. Si les $n\ M_{j(\alpha)}(n)$ ne diffèrent que d'une quantité très petite par rapport à $\sqrt{n}$, alors $[\sum X^{(i)} - M_{j(\alpha)}(n).n]/\sqrt{n}$ suit une loi très voisine de

$$\sum_\alpha{}^{(1)} \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Pr[i, \overline{j(\alpha)}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\overline{j(\alpha)}}(n)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{\overline{j(\alpha)}(n)}}} dx + \sum_\alpha \sum_{j=1}^{d(\alpha)} \Pr[i, \overline{j(\alpha)}] \frac{X + \mid X \mid}{2X}$$

la première somme $\sum^{(1)}$ étant étendue à tous les groupes finaux pour lesquels les $\sigma_{j(\alpha)}(n)$ ne tendent pas vers zéro, la seconde aux autres. Si les $M_{j(\alpha)}(n)$ sont distincts d'une quantité d'ordre de $\sqrt{n}$ alors si $M(n)$ en est une moyenne quelconque $n(M_{j(\alpha)}(n) - M(n)) = M'_{j(\alpha)}(n)\sqrt{n}$ $\sum X^(i) - nM/\sqrt{n}$ suit une loi voisine de

$$\sum_\alpha{}^{(1)} \sum_{j=1(\alpha)}^{d(\alpha)} \Pr[i, \overline{j(\alpha)}] \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\overline{j(\alpha)}}(n)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{[x - M'_{\overline{j(\alpha)}}(n)]^2}{2\sigma^2_{\overline{j(\alpha)}}(n)}} dx + \sum_\alpha \sum_{j=1}^{d} \frac{(X - M'_{j(\alpha)}(n)) + \mid X - M'_{j(\alpha)}(n) \mid}{2(X - M'_{j(\alpha)}(n))}$$

Enfin si les $M_{\overline{j(\alpha)}}(n)$ se distinguent d'une quantité très grande par rapport à $\sqrt{n}$, après réduction les $\sum X^{(i)}$ suivent une loi voisine d'une loi discontinue. Si n varie la loi de probabilité de $\sum X^{(i)}$ pourra après réduction varier entre ces 3 types.

Si les $p_{ij}^{(n)}$ que nous avons supposées nulles pour tout n, tendent seulement très vite vers zéro, en général le mouvement aura une allure un peu différente, le système pouvant p.e. quitter les groupes finaux etc. Toutefois si ces p^n_{ij} sont $o(\frac{1}{n\log n})$ on aura encore des lois de probabilité de $\sum X^{(i)}$ du même type que celles trouvées précédemment, les constantes ayant des significations légèrement différentes.

[13] *sic*

2- A propos d'une note de M.B.Hostinský[14]. Nous adoptons les notations de M.Hostinský. Si l'on est pour les p_{ij}^n dans le cas régulier $p_{ij}^n \to p_j \ S_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty}(p_{ij}^n - p_j)$ alors l'écart-type de $[\sum_1^n X^{(i)} - nR]/\sqrt{n}$ tend vers

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p_{jk}p_{kj}(\alpha_j - R)[\alpha_j - R + 2\sum_{i=1}^{r} s_{ki}\sum_{t=1}^{s} p_{it}(\alpha_t - R)$$

Lorsqu'il y a un seul groupe final $\mathcal{E}[\sum_1^n X^{(i)}]/n \to R$ et $\mathcal{E}[\sum X^{(i)} - nR]^2/\sqrt{n}$ tend encore vers une limite σ^2 indépendante de l'état initial. Si $\sigma \neq 0$ $X^{(1)} + \cdots + X^{(n)} - nR/\sqrt{n}\sigma$ suit une loi tendant vers une loi de Gauss réduite, le théorème du logarithme itéré sous la forme de M.P.Lévy sera applicable. Dans le cas général $\sum_1^n X^{(i)}/n \to R$, R dépendant cette fois de l'état initial, le carré de l'écart-type de $[X^{(1)} + \cdots + X^{(n)} - nR]$ se mettra sous la forme $n^2W + nV^{(n)} + U^{(n)}$; W_i[15] étant une constante, V une fonction périodique de n et U borné (asymptotiquement périodique). Si $W = 0$, $V^{(n)}$ sera constante. Les lois limites de $\sum X^{(i)}$ seront les mêmes que dans le cas d'une chaîne de Markoff simple à éléments constants (Voir notre note p [16]). Les limites des moments (après réduction) seront les moments de la loi limite. On aura donc un parallèlisme complet pour les variables aléatoires entre ce cas et le cas traité dans notre note qui en est d'ailleurs un cas particulier.
Si l'on avait supposé que les p_{ik} et ρ_{jt} au lieu d'être constants, dépendent de n, leurs variations étant bornées comme sans le cas de <u>1</u> pour les $p_{ik}^{(n)}$, nous aurions obtenu pour les sommes $X^{(1)} + \ldots X^{(n)}$ des lois analogues à celles trouvées dans <u>1</u>
<u>3</u> Les chaînes simples à éléments périodiques par rapport à n se ramènent à des chaînes constantes, en considérant au lieu des r états $E_1 E_r$ les rN états (N période des $p_{ij}^{(n)}$) $E_{1,0} \ldots E_{1,N-1} \ldots E_{r,0} \ldots E_{r,N-1}$, la réalisation de E_{il} signifiant qu'à une épreuve $n \equiv l (\mathrm{mod}\, N)$ le système matériel a pris l'état E_i. Les états E_i ne devront donc être considérés comme identiques lorsqu' ils sont réalisés à des épreuves n et n_1 avec $n - n_1 \not\equiv 0[\mathrm{mod} N]$.

Lettre 5

Monsieur le Professeur[17],
Permettez-moi de vous communiquer une remarque sur les épreuves liées en chaîne par les événements laissés sans observation qui a déjà été faite peut-être par Markoff (je n'ai pas lu son mémoire), mais qui permet de démontrer d'un coup tout ce que je vous avais communiqué et qui rend superflue toute publication de ma part de ces observations.
Vous envisagez dans votre note les points A_i (position de M) et les points B_i (position de N). Si l'on envisage le point T mobile prenant la position $E_{ij}(A_iB_j)$ si le point mobile M prend la position A_i et le point N la position B_j, et si vous désignez par $P'^{(n)}_{(i,j)(k,l)}$ la probabilité pour

---

[14] La présente partie se limitera dans [10] à une remarque finale (10a p.12): voir la lettre suivante.

[15] L'indice i a été probablement oublié par Doeblin lors de sa relecture de la lettre car il avait été mis, puis barré, dans la forme limite précédente.

[16] Doeblin a laissé un blanc, probablement avec l'intention de compléter plus tard la référence.

[17] Il s'agit d'une petite carte postale préimprimée oblitérée le 21 novembre 1936 à 18h30. En rouge, Hostinský a écrit: *Odp. 23.XI.36*.

que le point mobile T parti de $E_{i,j}$ se trouve n épreuves après dans E_{kl}, alors les $P'^{(n)}_{(i,j)(k,l)}$ sont manifestement encore liées en chaîne simple et $P'^{(1)}_{(i,j)(k,l)} = p_{ik}\rho_{kl}$. On peut donc réduire ce schéma au schéma d'une chaîne simple, au même titre que les chaînes multiples ou les chaînes simples à des éléments périodiques. Il en résulte ainsi immédiatement tout ce que je vous avais annoncé.
Veuillez croire, Monsieur le Professeur, à mon profond respect.
W.Doeblin

Lettre 6

21.1.37
Monsieur le Professeur,
Permettez-moi de vous communiquer quelques uns de mes résultats[18], que je n'avais pas considéré suffisemment importants pour les mettre dans ma première note (surtout faute de place), et que j'ai généralisés aux schémata[19] de ma seconde note (presque sans changement au cas continu).
Il s'agit d'abord de démontrer $p^n_{ik} = \Pr^{(n)}[i,k] + \varepsilon^{(n)}(i,k)$, $\Pr^{(n)}[i,k]$ étant périodique en n, $\varepsilon^{(n)}[i,k]$ étant bornée en module par $Ce^{-\lambda n}$, et ensuite de trouver la forme des $\Pr^{(n)}[i,k]$.
Je montre d'abord que je pense grouper les états $E_1 \ldots E_r$ en un certain nombre de groupes $I \ldots N$, ayant la propriété qu'on peut passer de chaque état du groupe L à chaque autre état du groupe L, et qu'on a entre ces groupes un mouvement à sens unique: c'est à dire on peut soit passer de L à M,mais pas de M à L, soit passer de M à L, mais pas de L à M, soit on ne peut ni passer de M à L ni de L à M. Alors je mets en évidence parmi les groupes I ...à N les groupes d'états à l'extérieur, soient $\mathcal{G}_1 \ldots \mathcal{G}_l$ ces groupes, je les nomme groupes finaux, et les autres groupes groupes de passage. Alors en classant les groupes de I... N de façon convenable, on montre que la matrice des p_{ij} peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \ldots & & & & A_{1N} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & & & & & A_{2N} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & \ldots & \ldots & & & A_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{N-l,N-l} & A_{N-l,N-l+1} & 0 & A_{N-l,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{N-l+1,N-l+1} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & A_{NN} \end{vmatrix}$$

les A_{ij} sont des sous-matrices, les dernières sous-matrices de la diagonale principale $A_{N-l+1,N-l+1} \ldots A_{NN}$ sont les sous-matrices des p_{ij} correspondant aux groupes finaux. Alors il est très facile de démontrer par un raisonnement de probabilité: Th. La probabilité pour que le système se trouve encore à la n^{e} épreuve à l'extérieur de l'ensemble $\mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_l$ des groupes finaux tend vers 0 (comme $Ce^{-\lambda x}$) Il en résulte que si $\underline{E_K \overline{\in} \sum_1^l \mathcal{G}_i, p^n_{ik} \to 0}$, $\underline{\Pr^{(n)}[i,k] = 0.}$ Par construction d'un groupe final on ne peut pas le quitter, donc si

$$E_i \in \mathcal{G}_\alpha \quad E_k \overline{\in} \mathcal{G}_\alpha \quad p^{(n)}_{ik} = 0, \quad \Pr^{(n)}[i,k] = 0$$

[18] Le flot qui suit de résultats pour l'analyse générale de la théorie des chaînes de Markov discrètes sera partiellement incorporé à [10].
[19] *sic*

quelque soit n
Il importe maintenant de calculer la forme des $p_{ik}^{(n)}$ lorsque E_i et E_k appartiennent au même groupe final $\mathcal{G}_\alpha$. Sans faire intervenir des méthodes étrangères au calcul des probabilités, on montre que deux cas peuvent se produire, ou l'on peut décomposer le groupe final en un nombre $d(\alpha) > 1$ de sous-groupes cycliques $\overline{1(\alpha)} \dots \overline{d(\alpha)}$ ($d(\alpha)$ a la même signification que dans ma note le nombre R) qu'on peut ranger dans un ordre circulaire tel que le système se trouvant dans $\mathcal{G}_\alpha$ passe nécessairement dans chaque épreuve dans sous-groupe cyclique circulairement au suivant, et alors la sous-matrice des p_{ij} correspondant au groupe final $\mathcal{G}_\alpha$ peut être mise sous la forme cyclique

$$\begin{vmatrix} 0 & B_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & B_{d-1,d} \\ B_{d,1} & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

nous dirons alors que la matrice de p_{ij} correspondant à $\mathcal{G}_\alpha$ est cyclique, ou il est impossible de mettre cette matrice sous une forme cyclique, $d(\alpha) = 1$.
Dans le premier cas

$$\begin{array}{rlll} & p_{ik}^n = 0 & \text{si } E_i \in \overline{l'(\alpha)}, E_k \in \overline{l(\alpha)} \quad \text{et} & n \not\equiv (l - l') \bmod d(\alpha) \\ \text{et} & p_{ik}^n \to p_k > 0 & & n \equiv (l - l') \bmod d(\alpha) \end{array}$$

Dans le second cas $p_{ik}^{(n)} \to p_k > 0 (E_i \in \mathcal{G}_\alpha E_K \in \mathcal{G}_\alpha)$. Ceci nous fait connaître la valeur de $\mathrm{Pr}^{(n)}[i, K]$ lorsque E_i et E_k appartiennent au même groupe final

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{Pr}^{(n)}[i,k] & = 0 & \text{si } E_i \in \overline{l'(\alpha)} & E_k \in \overline{l(\alpha)} \quad \text{et} & n \not\equiv (l - l') \bmod d(\alpha) \\ & = p_k > 0 & \quad '' & \quad '' & n \equiv (l - l') \bmod d(\alpha) \end{array}$$

(Dans le cas $d(\alpha) = 1$, $l'(\alpha) = l(\alpha) = \overline{1(\alpha)} = \mathcal{G}_\alpha$)
Il reste à calculer p_k, on montre sans peine que p_k est la solution unique du système

$$\begin{cases} p_j = \sum p_k p_{kj} & (E_j, E_k \in \mathcal{G}_\alpha) \\ \sum p_j = d(\alpha) & (E_j \in \mathcal{G}_\alpha) \end{cases}$$

On passe de là maintenant sans difficulté au seul cas non résolu $E_i \in \sum \mathcal{G}_\alpha$ et $E_k \in \mathcal{G}_\alpha$. Désignons par $\mathrm{Pr}[i, \overline{j(\alpha)}]$ la limite pour $m \to \infty$ de $\sum p_{ik}^{md(\alpha)}$ la somme étant étendue à tous les états E_k du sous-groupe cyclique $\overline{j(\alpha)}$, cette limite existe en vertu de ce qui précède, on a

$$\sum_{j=1}^{d(\alpha)} \mathrm{Pr}[i, \overline{j(\alpha)}] = \mathrm{Pr}[i, \mathcal{G}_\alpha]$$

$\mathrm{Pr}[i, \mathcal{G}_\alpha]$ étant la probabilité de passer de E_i dans $\mathcal{G}_\alpha$ au cours des épreuves et

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \mathrm{Pr}[i, \mathcal{G}_\alpha] = 1$$

L'équation

$$P_{ik}^{n+m} = \sum_{j=1}^{d} p_{ij}^{n} p_{jk}^{m}$$

où l'on fait tendre n et m en même temps vers ∞, donne

$$p_{ik}^{n} \approx \Pr[i, \overline{l_n(\alpha)}] p_k = p^{(n)}[i,k]$$

si $E_K \in \overline{l(\alpha)}$ et si $\overline{l_n(\alpha)}$ est le sous-groupe cyclique de $\mathcal{G}_\alpha$ déterminé par

$$\underline{n \equiv (l - l_n) \bmod d(\alpha)}$$

Si $\mathcal{G}_\alpha$ contient plusieurs sous-groupes cycliques $\overline{l_n(\alpha)}$ varie périodiquement et c'est cela qui entraîne la périodicité asymptotique de p_{ik}^{n}. La période de $p_\nu^{(n)}[i,K]$ ne dépend donc que du second état E_k. On a le tableau

$$p_{ik}^{n} = p_\nu^{(n)}[i,k] + \varepsilon_{ik}^{(n)} \mid \varepsilon_{ik}^{(n)} \mid < Ce^{-\lambda n}$$

$$\begin{array}{l|cccll}
 & E_k \in \sum \mathcal{G}_\alpha & p_\nu^{(n)}[i,K] = 0 & (1) & & \\
E_i \in \mathcal{G}_\alpha & E_k \in \mathcal{G}_\alpha & \Pr^{(n)}[i,k] = 0 & & & \\
 & E_k \in \overline{l(\alpha)} & p_\nu^{(n)}[i,k] = \Pr[i, \overline{l_n(\alpha)}] p_k & (3) & & \\
E_i \in l'(\alpha) & '' & \Pr[i,k] = 0 & & n \not\equiv (l - l') & \bmod d(\alpha) \\
'' & '' & p_\nu^{(n)}[i,k] = p_k & & n \equiv (l - l') & ''
\end{array}$$

Ce ne sont d'ailleurs que les formules (1) et (3) qui résultent de la forme des $\Pr[i, \overline{l_n(\alpha)}]$. Les p_k étant les $\Pr[i, \overline{j(\alpha)}]$, elles sont solutions uniques du système

$$\Pr[i, \overline{j(\alpha)}] = \sum_{k=1}^{\nu} p_{ik}^{d(\alpha)} \Pr[k, \overline{j(\alpha)}]$$

déterminées par la condition évidente

$$\begin{array}{lll}
\Pr[k, \overline{j(\alpha)}] & = 0 \quad \text{si} & E_k \in \overline{l(\beta)} (\not\equiv \overline{l(\alpha)}) \\
 & = 1 \quad '' & E_k \in \overline{j(\alpha)}
\end{array}$$

On déduit de ce tableau sans peine des critères facilement applicables pour tous les cas. On trouve alors que

$$\begin{aligned}
\pi_{ik} &= 0 \qquad \text{si } E_k \in \sum \mathcal{G}_\alpha \\
\pi_{ik} = \pi_k &= \frac{p_k}{d(\alpha)} \text{ si } E_i \in \mathcal{G}_\alpha, E_k \in \mathcal{G}_\alpha \\
\pi_{ik} &= \Pr[i, \mathcal{G}_\alpha] \pi_k \qquad E_k \in \mathcal{G}_\alpha
\end{aligned}$$

Si l'on ne désire calculer que les π_{ik}, on calculera les π_k par les système[20]

$$\pi_k = \sum \pi_i p_{ik} (E_i, E_k \in \mathcal{G}_\alpha)$$

$$\sum \pi_k = 1 (E_k \in \mathcal{G}_\alpha)$$

[20] *sic*

et les $\Pr[i, \mathcal{G}_\alpha]$ par

$$\Pr[i, \mathcal{G}_\alpha] = \sum_{j=1}^{r} p_{ij} \Pr[j, \mathcal{G}_\alpha]$$

avec

$$\begin{aligned} \Pr[j, \mathcal{G}_\alpha] &= 1 \quad \text{si } E_j \in \mathcal{G}_\alpha \\ &= 0 \qquad\quad \in \mathcal{G}_\beta \end{aligned}$$

Très respectueusement
W.Doeblin

Lettre 7

Paris, le 11 mars 1937
Monsieur le Professeur
Je vous renvoie ci-joint les épreuves[21] en vous remerciant. J'aimerais avoir votre avis sur le schéma suivant :
Considérons un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états $E_1 \dots E_r$. Supposons que la probabilité pour que le système passe dans une épreuve de l'état E_i à l'état E_k dépende en plus de la connaissance de tous les états antérieurs (on peut supposer indifféremment que le système évolue depuis toujours ou depuis un instant déterminé). Soit $p_{ik}\begin{bmatrix} -1 & -2 & \dots & -n & \dots \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n & \dots \end{bmatrix}$ la probabilité pour que le système passe dans une épreuve de E_i à E_k sachant que le système a été une épreuve avant en E_{i_1}, 2 épreuves avant dans E_{i_2} - n épreuves avant dans E_{i_n} -. Je suppose qu'on a si $n > n_0$

$$p_{ik}\begin{bmatrix} -1 & \dots & -n & -(n+1) & \dots & -m \\ i_1 & & i_n & i_{n+1} & \dots & i_m \end{bmatrix} = p_{ik}\begin{bmatrix} -1 & \dots & -n & -(n+1) & \dots & m \\ i_1 & & i_n & j_{n+1} & \dots & j_m \end{bmatrix} (1+\theta\varepsilon_n)$$

où $\mid \theta \mid < 1 \quad \varepsilon_n$ est le terme général d'une série convergente, et ceci quels que soient les états $E_{i_1} \dots E_{i_n}, E_{i_{n+1}} \dots E_m, E_{j_{n+1}} \dots E_{j_m} \dots E_i$ et E_k. Cette hypothèse signifie somme toute que les probabilités de passage en une épreuve de E_i à E_k dépendent de moins en moins des états très éloignés. L'hypothèse que $\sum \varepsilon_n$ est convergente ne me paraît pas très restrictive, il en est autrement de l'hypothèse que $1 + \theta\varepsilon_n$ interviennent en facteur, qui a pour conséquence que pour $n > n_0$, tous les $p_{ik}\begin{vmatrix} -1 & -n \\ i_1 & i_n \end{vmatrix}$ sont pour une suite d'états $E_1 E_k E_{i_1} \dots E_{i_n}$ donnée nuls si un des $p_{ik}\begin{bmatrix} -1 & \dots & -n & -(n+1) & \dots \\ i_1 & & i_n & i_{n+1} & \dots \end{bmatrix}$ est $= 0$. Mais j'ai bien l'impression qu'on ne peut pas en sortir à moins de faire des hypothèses plus restrictives sur les $p_{ik}[\dots]$ et sur les ε_n
Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, mes sentiments respectueux.
W.Doeblin

[21] Il s'agit vraisemblablement des épreuves de [10] mentionné plus haut (voir Lettre 4).

Lettre 8

Monsieur le Professeur[22],
J'ai trouvé, il y a assez exactement 6 mois, la solution $\phi(x, z, s, t)$ de l'équation de Chapman sous l'hypothèse $\phi(x, x, s, t) \to 1$ si $t \to s$. Dans ce cas le mouvement du point mobile qu'on a l'habitude d'attacher aux solutions de l'équation de Chapman est un mouvement discontinu comportant un nombre fini de sauts, le point restant au repos entre les instants auxquels ont lieu les sauts. Je m'occupe uniquement du cas des probabilités et dans ce cas mes hypothèses contiennent évidemment celles de Pospisil. J'ai rédigé maintenant ce travail qui n'est pas long (9 pages) et que j'ai fait dactylographier. Mes méthodes sont un peu différentes des vôtres, mais je me suis inspiré de la remarque que vous avez faite à Genève, qu'il faut que chaque terme de la solution ait une signification stochastique. J'obtiens une solution qui est représentée comme la vôtre par des intégrales multiples, seulement il y a aussi bien des intégrales de Riemann-Stieltjes par rapport au temps et des intégrales de Lebesgue-Stieltjes par rapport au volume, le terme sous le signe d'intégrale est différent. Comme ce travail est très lié à vos recherches je serais heureux si vous pouviez le faire publier dans une revue tchecoslovaque, mais si cela fait des difficultés je pourrai l'envoyer à Cantelli.
Agréez, Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments respectueux.
W.Doeblin

Lettre 9

Paris, 26/8/1938
Monsieur le Professeur,
Je vous remercie d'accepter mon mémoire pour le Ciopis[23], je vous l'enverrai demain. La solution ne contient que des termes positifs.
La plus ou moins grande difficulté (ou impossibilité) de donner une solution de l'équation de Chapman ayant un sens stochastique visible me paraît être due surtout au caractère du mouvement que la solution décrit. Ainsi dans le cas d'une diffusion régi[24] par l'équation de Kolmogoroff (le cas particulier de l'équation de Chapman qu'on obtient en supposant l'existence des limites

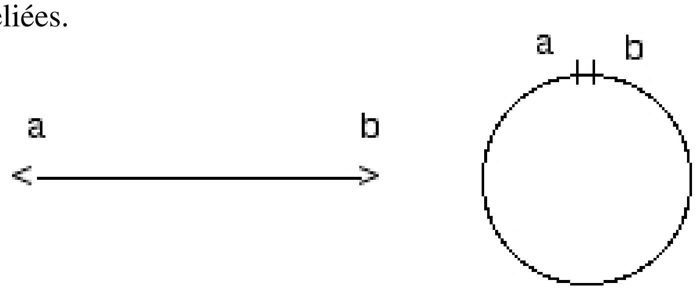
$$\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-x)d_yF(x,y,s,s+\Delta)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-x)^2 d_yF(x,y,s,s+\Delta)$$

et une troisième condition, $F(x, y, s, t)$, probabilité pour que le point mobile se trouvant à l'instant s en x se trouve à gauche de y à l'instant t) où l'on a un mouvement continu sans saut, il apparaît comme très difficile de donner une solution intéressante en elle-même et il faut se borner à des théorèmes d'existence et d'unicité. D'ailleurs dans tout cela les mouvements continus donnent en ce qui concerne la solution de l'équation de Chapman beaucoup plus de fil à retordre que les mouvements purement discontinus.

[22] Il s'agit d'une carte postale préimprimée, postée le 17 juillet 1938 et reçue à Brno le 20 juillet. Doeblin a indiqué son adresse personnelle où il vivait avec sa famille, 5, squ. Delormel, Paris 14e.
[23] *sic*. Il s'agit en fait du journal *Časopis pro Pestovani Matematiky* dont Hostinský était rédacteur.
[24] *sic*

La solution de M.Einstein me paraît être d'après votre lettre un cas très simple de mouvement régi par un schéma de Poisson généralisé tels qu'ils ont été étudié[25] par M.Khinchine (Ergebnisse der Math. Asymptotische Wahrscheinlichkeitsgesetze, Chap I, 3). D'ailleurs ce schéma de Poisson relève à son tour comme cas particulier des 'integrales à termes aléatoires' de M.P.Lévy [càd du cas particulier de l'équation de Chapman où $F(x, y, s, t) = \overline{F}(y - x, s, t)$] pour lesquelles il est possible de donner une solution assez simple décrivant complètement le mouvement et ayant un sens stochastique très clair.
En Avril, j'ai fait une conférence au séminaire de M.Hadamard sur l'équation de Chapman dans la première partie de laquelle j'ai analysé ceux de vos travaux sur la question que je connaissais, ainsi que celui de Pospisil et celui que je vais vous envoyer. J'ai alors indiqué la particularité suivante du mouvement régi par la solution de l'équation de Chapman que vous indiquez dans les Publ.Fac.Sc.Masaryk, et que vous connaissez certainement. Si le point mobile se trouve à l'intérieur de l'intervalle (a, b) la probabilité d'un déplacement brusque dans un intervalle de temps très petit est très petite. Mais si le point mobile se trouve à un instant quelconque dans le voisinage d'une extrêmité de l'intervalle considéré il a une probabilité très voisine de 1 d'apparaître peu après dans le voisinage de l'autre extrêmité et même de passer une infinité de fois dans un intervalle de temps fini d'une extrêmité à l'autre. Ceci résulte de propriétés du mouvement gaussien, du point de vue de continuité tout se passe comme si les extrêmités de l'intervalle étaient reliées.



Or si vous parlez de molécules ou particules ayant subi n déplacements brusques, ce n'est évidemment pas des sauts ci-dessus que vous parlez, mais peut-être serait-il utile de l'énoncer explicitement. Il est d'ailleurs amusant de constater que les mouvements sur un intervalle fermé sont plus difficiles à étudier que ceux dans $(-\infty, \infty)$.
Je lirai avec beaucoup d'intérêt votre mémoire actuellement en impression, j'allais d'ailleurs vous prier de m'envoyer votre note aux C.R., mais puisque c'est publié en mémoire c'est inutile. Par contre vous savez que je m'intéressais à la possibilité de $p_i p_{ik} = p_k p_{ki}$ en dehors du cas symétrique et si Pospisil a un exemplaire disponible de sa note je lui serais reconnaissant s'il pouvais[26] me l'envoyer
Agréez, Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments respectueux
W.Doeblin
En bas de page de la main de Hostinský: Odp.18.IX.38. a mám rukopis s poznámkami (Répondu le 18 IX 38 et j'ai un manuscrit avec des annotations)

[25] *sic*
[26] *sic*

Lettre 10

Monsieur le Professeur,
J'ai reçu votre lettre et mon manuscrit que je publierais ailleurs. Il est à peine besoin d'indiquer que je n'ai rien à ajouter ou à retrancher à ce travail: la décomposition que je donne est démontrée sous mes hypothèses et non admise a priori. Toutefois je comprends très bien qu'une revue tchécoslovaque ne voit[27] pas la nécessité de publier en ce moment un mémoire d'un étranger. Je n'ai jamais eu aussi honte que maintenant et j'aurais préféré la guerre à ce qui se passe maintenant.
Agréez, Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments respectueux.
W.Doeblin

REFERENCES

[1] M.Barbut, B.Locker et L.Mazliak: *Paul Lévy-Maurice Fréchet: 50 ans de correspondance en 107 lettres*, Hermann, Paris, 2004

[2] J.Beránek: *Bohuslav Hostinský, Československý časopis pro fyziku*. 1 (1951), 90-95

[3] S.Bilova, L.Mazliak and P.Šišma: *The Axiomatic melting pot, Teaching probability in Prague in the 1930's* , to appear in *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 2006

[4] B.Bru: Doeblin's life and work from his correspondence, in *Doeblin and Modern Probability*, H.Cohn (editor), American Mathematical Society, 1-64, 1993

[5] B.Bru: La vie et l'œuvre de W.Dœblin (1915-1940) d'après les archives parisiennes, Math.Sci.Hum, 119, 1992

[6] B.Bru: Souvenirs de Bologne, *Jour.Soc.Fr.Stat*, 144, 135-226, 2003

[7] E.Carvallo: *Le calcul des probabilités et ses applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1912

[8] E.Čech: Vědecké pracé Bedřicha Pospíšila, *Časopis Pěst. Mat.*, 72, 1-9, 1947

[9] W.Doeblin: Sur les chaînes discrètes de Markoff, *CRAS Paris*, 203, 24-26, 1936

[10] W.Doeblin: Le cas discontinu des probabilités en chaîne, *Pub.Fac.Sci.Univ.Masaryk*, 236, 1937

[11] W.Doeblin: Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états , *Rev. Math. Union Interbalkan.*, 2, 77-105, 1938

[12] W.Doeblin: Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, *Thèse de doctorat ès Sciences Mathématiques*, Paris, 1938

[13] W.Doeblin: Sur certains mouvements aléatoires discontinus, *Skand.Aktuarietidskr.*, 22, 211-222, 1939

[14] W.Doeblin: Eléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff, *Ann.Sci.E.N.S.*, 57, 61-111, 1940

[15] W.Doeblin: Sur l'équation de Kolmogoroff, *Pli cacheté à l'Académie des Sciences*, édité par B.Bru et M.Yor, numéro spécial des *CRAS Paris*, 331, 2000

[16] W.Doeblin et R.Fortet: Sur deux notes de MM.Kryloff et Bogoliouboff, *CRAS Paris*, 204, 1699-1701, 1937

[17] W.Doeblin et P.Lévy: Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement, *CRAS Paris*, 202, 2027-2029, 1936

[18] T. et P.Ehrenfest : *Mécanique Statistique*, traduit et complété par E.Borel à partir de la version allemande. Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées. Jules Molk, ed., Tome IV, Vol.1, 188-292, 1915

[19] B. de Finetti: *Compte-rendu critique du colloque de Genève sur la théorie des probabilités*, Actualités Scientifiques et Industrielles 766, Hermann, Paris, 1939

[20] M.Fréchet: Compléments à la théorie des probabilités discontinues "en chaîne", *Ann.Sci.Sc.Norm.Sup. Pisa*, Sér.II, II, 131-164, 1932

[21] M.Fréchet: *Méthodes des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Traité de Calcul des Probabilités et de ses Applications (Tome I, Fascicule III), Gauthier-Villars, Paris, 1938

[22] M.Fréchet et J.Hadamard: Sur les probabilités discontinues des événements "en chaîne", *Ann.Sci.Sc.Norm.Sup. Pisa*, Sér.II, II, 131-164, 1932

[27] *sic*

[23] J.Gracq: *Un balcon en forêt*, J.Corti, Paris, 1958 (English Translation: *A Balcony in the Forest*, Harvill paperbacks, 1992)
[24] J.Hadamard: Sur le battage des cartes, *CRAS Paris*, 185, 5-9, 1927
[25] J.Hadamard: Observations sur la note précédente, *CRAS Paris*, 186, 86, 1928
[26] V.Havlova, L.Mazliak et P.Šišma: Le début des relations mathématiques franco-tchécoslovaques vu à travers la correspondance Hostinský-Fréchet, *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, Vol.1, 1, 2005
[27] C.Heyde and E.Seneta (dir.): *Statisticians of the Centuries*, Springer, New-York, 1991
[28] B.Hostinský: Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (New solution of Buffon problem on needle), *Rozpravy Ceské Akademie*, XXVI, II, 13, 1917 (French translation: Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille, *Bull.Sci.Math.*, 44, 126-136, 1920
[29] B.Hostinský: Sur les probabilités relatives aux transformations répétées, *CRAS Paris*, 186, 59-61, 1928
[30] B.Hostinský: Complément à la note sur les probabilités relatives aux transformations répétées, *CRAS Paris*, 186, 187-189, 1928
[31] B.Hostinský: *Méthodes générales du calcul des probabilités*, Mémorial des Sciences Mathématiques, LII, Gauthier-Villars, Paris, 1931
[32] B.Hostinský: *Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement brownien*, Ann.IHP, 3, 1-74, Paris, 1932
[33] B.Hostinský: Sur les probabilités relatives aux probabilités liées entre elles. Applications diverses. *Ann. Inst. H.Poincaré*, 7, 69-119, 1937
[34] B.Hostinský : *O výpočtu pravděpodobností, které se vztahují k časovému vývoji soustav*. Aktuárské vědy. 8 (1949), 61-67.
[35] J.Kaucký : Remarques à la note de M.V.Romanovsky sur les chaînes discrètes de Markoff, *CRAS Paris*, 191, 919-921, 1930
[36] J.Kaucký : Quelques remarques sur les chaînes de Markoff, *Publi.Fac.Sci. Univ.Masaryk*, 131, 1931
[37] A.Khinchin: *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1933
[38] A.Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math.Ann.*, 104, 149-160, 1931
[39] A.Kolmogoroff: Zur Theorie der Markoffschen Ketten, *Math.Ann.*, 112, 155-160, 1936
[40] M.Konečný : Trois théorèmes sur la limite des transformations itérées, *Publi.Fac.Sci. Univ.Masaryk*, 163, 1932
[41] P.Lévy: *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1925
[42] P.Lévy: W.Doeblin (V.Doblin) (1915-1940), *Rev.Hist.Sciences*, 107-115, 1955
[43] T.M.Liggett: The Coupling Technique in Interacting Particle Systems, in *Doeblin and Modern Probability*, H.Cohn (editor), American Mathematical Society, 73-83, 1993
[44] T.Lindvall: W.Doeblin (1915-1940), Ann.Proba., Vol.19, 3, 929-934, 1991
[45] O.Litzman: Bohuslav Hostinský in *Osobnosti Přirodovědecke Fakulty Masarykovy Univerzity*, Folia Historica, Brno, 1997
[46] А.А.Марков: Распространение закона больших чисел на величины зависящия друг от друга (A.A.Markov: Extension of the law of large numbers to quantities dependent on each other), Bulletin de la Société Mathématique de Kazan, Série 2, Tome XV, 1906. On-line at **www.jehps.net**
[47] А.А.Марков: Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь(A.A.Markov: Extension of limit theorems of probability to sums of quantities connected in chain), Bull. Acad. Imp.Sci St Petersbourg, 22,9, 1908
[48] L.Mazliak: Markov et ses chaînes, *Pour la science*, 340, 12-15, 2006
[49] O.Onicescu et G.Mihoc: Sur les chaînes de variables statistiques, *Bull.Sci.Math.*, 59, 174-192, 1935
[50] M.Petit: L' équation de Kolmogoroff , Gallimard, Folio, 2005
[51] H.Poincaré: Calcul des Probabilités, 2ème Edition, Gauthier-Villars, Paris, 1912
[52] B.Pospišil: Sur un problème de MM.S.Bernstein et A.Kolmogoroff, *Časopis Peš. Mat.*, 65, 64-76 1936
[53] J.Potoček: Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markov, *Pub.Fac.Sci.Univ.Masaryk*, 154, 1932
[54] E.Seneta: *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2nd Edition, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New-York, 1981
[55] E.Seneta : Statistical Regularity and Free Will: Quetelet and Nekrasov, *Int.Stat.Review*, 71, 319-334, 2003
[56] P.Šišma: Georg Hamel and Richard von Mises in Brno, *Historia Mathematica*, 29, 176-192, 2002

[57] F.M.Urban: *Grundlagen der Warscheinlichkeitsrechnung und der Theorie des Beobachtungsfehler*, Teubner, Leipzig, 1923

[58] R.von Mises: *Warscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Deuticke, Leipzig-Wien, 1931

[59] J.von Plato: *Creating modern probability*, Cambridge Studies, 1994