Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 2, n°1; Juin/June 2006

www.jehps.net

The Bernoulli Code

Bernard BRU[0]

Introduction

Le texte qui suit aurait pu faire l'objet d'une communication au Colloque CAC 2005. Il n'en a rien été pour au moins deux raisons. La première est que son auteur n'a malheureusement pas pu être présent au colloque dont il s'agit. La seconde est que, s'il avait pu être présent, il n'aurait vraisemblablement pas traité des mêmes sujets, et aurait probablement soutenu des thèses diamétralement opposées à celles présentées ici. Si, cependant, l'auteur a souhaité contribuer aux actes, ce n'est pas pour édifier et convaincre ses éventuels lecteurs, mais pour rendre un hommage chaleureux et amical au principal organisateur du colloque, Norbert Meusnier, l'un des membres historiques du séminaire d'histoire du calcul des probabilités de l'EHESS et, pour faire court, l'auteur de la meilleure

[0] Bru est la forme catalane du français brun, déformation du bas latin brunus, qui vient du germanique brun, également à l'origine de l'allemand braun et de l'anglais brown, ce qui explique en partie le titre de cet exposé. On ne doit pas confondre bru, dérivé de brunus, avec bru, la belle-fille, qui vient du latin bruta, d'après le Gaffiot, lequel viendrait du gotique bruths selon le Robert, et non du latin brutus, comme on le croit généralement. A part cela, l'adresse de l'auteur est bernard.bru@univ-paris5.fr

édition existante à ce jour (et pour longtemps encore) des première et quatrième parties de l'*Ars conjectandi* (1/2)[1].

Comme le disait naguère Guilbaud, qui parlait d'expérience : « Norbert Meusnier est un véritable escrimeur». C'est incontestablement lui qui donnait (et donne sans doute encore) au séminaire Barbut-Coumet(3/4) ses couleurs et son piment. L'art de l'escrime s'apparente, on le sait, à l'art de la conjecture, et Norbert en connaît les finesses et les pièges. Il ne s'agit pas de tuer, mais de jouer et de préférence mieux que l'adversaire, quoique cela ne soit pas absolument nécessaire, pourvu que la partie soit belle. Ajoutons que, par conviction philosophique, Norbert Meusnier, comme d'ailleurs notre maître Coumet, s'est toujours tenu à l'écart du pouvoir, de ses ors et de ses pompes, et, comme lui (1), possède le don de l'amitié, cette vertu philosophique majeure. Voilà des raisons suffisantes pour présenter ici quelques réflexions conjecturales sur l'art de Jacques Bernoulli, grand escrimeur devant l'éternel.

I Silence ?

Comme on sait, Cournot, l'un des plus profonds philosophes de la science moderne, est avare de citations explicites et d'éloges, qu'il réserve presque tous à son maître Leibniz (et encore ?). En particulier, ses allusions à Jacques Bernoulli sont rares et parfois peu élogieuses. Nous commencerons cependant par une citation de Cournot, extraite de son dernier ouvrage philosophique, qui d'une certaine façon résume toute son œuvre, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Études sur l'emploi des données de la science en philosophie,* publié chez Hachette en 1875 (2). Augustin Cournot écrit, page 182 de l'édition Vrin, à propos du Théorème de Bernoulli : «On doit cette généralisation à Jacques Bernoulli, l'illustre auteur de l'*Ars conjectandi,* et, s'il y a eu en mathématiques des découvertes plus difficiles, il n'y en a pas eu de plus importante au point de vue de la philosophie naturelle. »

La barre est donc assez haute, et nous n'essaierons pas de la franchir dans ce premier paragraphe, ni d'ailleurs dans le second. Il faudrait en effet préciser en quoi le théorème de Bernoulli est le plus important au point de vue de la philosophie naturelle, du moins aux yeux de Cournot, une tâche moralement et physiquement impossible. Nous n'examinerons ici qu'un aspect très mineur de la question : ce qui à notre avis, aussi naïf que peu autorisé, constitue la principale nouveauté du théorème, au point de vue de la philosophie naturelle.

---

[1] Les numéros entre parenthèses renvoient à des Notes qui se trouvent p.15 *et seq*. dans une partie séparée.

Pour Jacques Bernoulli, on le sait, la nouveauté radicale de son théorème ne fait aucun doute, son utilité non plus. Pourtant, elles ne vont pas de soi. Fontenelle, se faisant l'écho de la rumeur du temps, considère, dans son « Eloge de M. Bernoulli », en 1705 (3), qu'il semble « qu'il n'y ait pas de difficulté pour l'affirmative » d'une proposition qui reviendrait à soutenir que moins il y a de cas inconnus, plus grand est le « degré de certitude » auquel on parviendra. Quelle nouveauté y aurait-il dans le fait d'affirmer que moins on est ignorant, plus on est savant ? Comme le souligne N. Meusnier dans sa présentation de la quatrième partie, l'énoncé de Fontenelle est aussi erroné que possible. Il peut cependant refléter quelque peu l'opinion commune, et celle des plus grands, Leibniz, Montmort, voire de Moivre, au début du XVIIIe siècle : M. Bernoulli est un savant illustre, mais il s'illusionne tout à fait lorsqu'il croit que son résultat permet d'étendre aux « choses morales et politiques » et même aux « choses de la vie » l'art de conjecturer dans les jeux de hasard. Fontenelle, certes, se trompe sur l'énoncé de Bernoulli, mais il faut bien reconnaître que, vu de loin ou de près, ce dernier n'a rien pour surprendre : une urne contient en nombre égal des boules rouges et noires. On en tire un grand nombre au hasard, en les remettant à chaque fois, pour ne rien perturber. Il n'y a aucune difficulté à admettre qu'au bout d'un certain moment, on aura probablement tiré à peu près autant de boules rouges que de noires, et qu'il n'y a pas lieu d'en faire un théorème, même en considérant le cas, guère plus difficile à concevoir, où les boules de l'urne au lieu d'être en proportion égale, le sont dans une proportion donnée. À cela s'ajoute que le théorème de Bernoulli tombe sous la critique radicale de toute la physique mathématique : les théorèmes mathématiques concluent dans l'abstrait et ne concernent en rien, ou si peu, les choses matérielles ! Que dire alors des choses de la vie, qui cumulent les approximations du monde sublunaire (« une sphère d'airain ne touche pas seulement en un point »), et les désordres anarchiques de l'histoire des hommes : les épidémies, les guerres, les changements dans les mœurs, qui bouleversent sans cesse l'urne trop géométrique de Bernoulli. Ces critiques remontent aux anciens Grecs, Aristote s'en fait l'écho, et nombre d'autres. Elles ont été reprises dès la Renaissance contre les prétentions excessives des modernes. Galilée s'en défend brillamment au début du XVIIe siècle (4), mais on les trouve aussi virulentes tout au long du siècle par exemple chez Méré ou chez Bayle (5). Le grand Leibniz lui-même, qui pourtant reconnaît à la géométrie une place éminente dans l'ordre du monde (6), doute fort que dans celui des choses humaines les apports de Jacques Bernoulli soient d'un grand intérêt (7).

Bref, le théorème de Bernoulli, qui tombe sous le sens et même sous le bon sens, n'apporte rien de nouveau qu'on ne sache déjà, dans les choses de la nature comme dans celles de la vie. Jacques Bernoulli précise d'ailleurs à l'intention des lecteurs peu informés que la « manière empirique de déterminer par expérience les nombres de cas n'est ni neuve ni insolite », que la *Logique* de Port-Royal la prescrit et qu'il s'agit d'une pratique quotidienne (7,5), celle au moins de l'arithmétique politique anglaise et hollandaise.

S'agit-il là de la découverte la plus importante qu'on ait faite « au point de vue de la philosophie naturelle » ?

Jacques Bernoulli ne donne guère d'indication positive à cet égard, si ce n'est un commentaire énigmatique, à la fin de la quatrième partie. Mais à Bâle, au moins (8), se doutait-on de l'importance philosophique et pratique du théorème? Sans doute, si l'on suit les écrits du neveu Nicolas, le plus au fait de ces questions. On sait en effet que Nicolas Bernoulli a donné la première application véritable du théorème de son oncle, et longtemps la seule, d'une nouveauté évidente, qui aurait pu attirer l'attention de Cournot, et dont il nous faut dire un mot, bien qu'elle ait été fort bien traitée déjà par de nombreux savants.

Rappelons les faits (9). Dans la seconde édition de son *Essay d'analyse sur les jeux de hasard* (10), Montmort reproduit les lettres qu'il a envoyées ou reçues après la parution en 1708 de la première édition de l'ouvrage, et notamment des lettres de Nicolas Bernoulli d'un très grand intérêt historique. Ces lettres ont été rédigées avant la sortie, au début du mois de septembre 1713, de l'*Ars conjectandi*. Nous nous intéressons ici à la lettre du 23 janvier 1713 (11), qui commence ainsi : « Je vous envoie le Catalogue des Enfans de chaque sexe nés à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710, avec mes démonstrations de ce que je vous ai écrit touchant l'argument par lequel on veut prouver que c'est un miracle que les nombres d'enfans de chaque sexe nés à Londres ne se sont pas plus éloignés les uns des autres pendant 82 ans de suite, et que par le hazard il seroit impossible que pendant un si long-temps ils fussent toujours renfermés entre des limites aussi petites que celles qu'on a observées dans le Catalogue de 82 ans. Je prétens qu'il n'y a aucun sujet de s'étonner, et qu'il y a une grande probabilité pour que les nombres des mâles et des femelles tombent entre des limites plus petites que celles qu'on a observées. »

Nous avons rappelé ce texte bien connu, parce que tout ou presque y est dit, et qu'il n'est guère utile d'y ajouter grand chose. L'origine des « démonstrations » de Nicolas y est nettement indiquée : le catalogue des naissances de Londres publié et commenté par John Arbuthnot (ou Arbuthnott) dans les *Philosophical Transactions* de la fin de l'année 1710 (12). Des commentaires d'Arbuthnot, on retient généralement la solution du problème suivant : « A parie contre B qu'il naîtra chaque année plus de garçons que de filles. Trouver la chance (Lot) de A, ou la valeur de son espérance », problème intéressant en lui-même mais que Nicolas

Bernoulli ne mentionne pas. Arbuthnott se place sous l'hypothèse du hasard pur, les sexes ont même chance à la naissance. Un calcul ingénieux, mais classique depuis Pascal, Huygens et Montmort, montre alors que la chance de A pour une année est inférieure à 1/2 (l'inégalité est stricte chez Arbuthnot), de sorte qu'en *n* années, elle sera inférieure à 1/2 élevé à la puissance *n*. Or dans le catalogue de Londres, le nombre de garçons l'a constamment emporté sur celui des filles, de 1629 à 1710. Le « hazard » ne peut produire un tel miracle : « From whence it follows, that it is Art, not Chance, that governs ». On tire généralement de là la conclusion qu'Arbuthnott anticipe de deux siècles au moins les tests de signification de la statistique mathématique de Karl Pearson et de Ronald Fisher. Or Nicolas Bernoulli ne mentionne nulle part dans sa lettre cet exploit statistique (13), il s'intéresse à la première partie de l'article d'Arbuthnot, dans laquelle ce dernier s'étonne que les chiffres du catalogue soient renfermés dans des limites aussi étroites, et affirme qu'il est « visible » que le hasard ne pourrait produire un tel résultat remarquable. Pour étayer cette évidence, Arbuthnot tente une analyse des termes centraux du développement du binôme (M+F) élevé à la puissance *n,* pour *n* égal à 2, 3, …,8. Il estime qu'il faudrait aller plus loin (avec l'aide des logarithmes, dit-il), mais qu'il ne le fera pas ici, s'étant sans doute rendu compte que cela dépassait ses forces. C'est là évidemment ce qu'avait tenté, et réussi d'une certaine façon, Jacques Bernoulli, dix ans auparavant. Nicolas le savait, et sans doute était-il le seul à bien peu près à le savoir, de sorte qu'il a vu immédiatement (dans l'année qui a suivi) tout le parti qu'on pouvait tirer du catalogue de Londres et de la méthode d'Arbuthnot, en les soumettant aux calculs de l'oncle. Utiliser l'encadrement du théorème de Bernoulli pour décider, avec une certaine vraisemblance, si les écarts des chiffres du catalogue sont ou ne sont pas dus aux anomalies du hasard.

Pour cela, suivant la méthode générale de la physique mathématique du XVII^{e} siècle et les suggestions d'Arbuthnot, il suffit de réaliser dans l'abstrait un catalogue de naissances soumis à un hasard judicieusement construit, et de voir si l'abstrait et le concret se ressemblent. Cela donnerait alors du poids à la conclusion d'Arbuthnott : il est visible que le hasard ne peut pas faire aussi bien, ou lui ôterait tout crédit. Le rapport des sexes étant sur le catalogue d'à peu près 18 à 17, on fabriquera un dé (abstrait) à 35 faces marquées de M et de F en nombres convenables, et on le jettera 14000 fois, nombre moyen de naissances à Londres en un an, pour fabriquer une année fictive soumise à ce hasard abstrait. La géométrie dudit hasard est tout entière contenue dans le développement du binôme (18+17) élevé à la puissance 14000. On cherchera la chance d'un écart à la moyenne, 7200, inférieur à 163, chiffre qui n'a été dépassé que 11 fois dans la table de Londres. Au terme d'un calcul calqué sur celui de Jacques Bernoulli, mais ingénieusement précisé, Nicolas Bernoulli trouve que cette probabilité dépasse 0, 978 (exactement 43, 58 à 1). L'approximation normale de Moivre donnerait 0, 994. De sorte que le hasard abstrait ainsi construit fournirait très probablement un catalogue plus resserré encore que celui de Londres : la probabilité de trouver plus de onze écarts supérieurs à 163, en 82 années, est inférieure à 0, 004. Et Nicolas de conclure : « Donc il n'y a point de sujet de s'étonner que les nombres des enfans de chaque sexe tombera chaque année plutôt entre cette limite que dehors ». Le premier argument d'Arbuthnot est erroné, (13, 5).

Commençons par remarquer qu'il n'y a point sujet de s'étonner, a priori, de cette forme de conclusion. C'est un classique de l'argumentation sur le hasard et la Providence. Certaines configurations remarquables ne peuvent être produites par le hasard, d'autres, au contraire, n'ont rien de surprenantes. Pour prendre un exemple bâlois et rappeler une grande figure de l'humanisme de la Renaissance, choisissons le célèbre ouvrage de Sébastien Castellion (14), dont le titre anticipe étrangement celui de Jacques Bernoulli, *De l'art de douter et de croire, d'ignorer et de savoir,* qui doit dater du début des années 1560, et n'a été publié qu'au XX^e^ siècle (15). Examinons le paragraphe I du chapitre premier, intitulé *Qu'il y a un Dieu qui gouverne le monde et qu'Il est juste*. Pour Castellion, la question de l'existence de Dieu est réglée par l'argument stoïcien : « attribuer au hasard le gouvernement du monde, cet ouvrage suprême de toutes choses et qui contient en soi tous les autres ouvrages, cela est pour un homme montrer aussi peu de raison que les bêtes. » La question de la justice de Dieu est plus « épineuse ». En effet, nous dit Castellion (pages 31-32 de l'édition Baudouin), en bonne justice, les bons devraient être récompensés et les méchants punis, or « ces choses arrivent indistinctement aux bons et aux méchants ; de sorte qu'on est en droit d'exiger des exemples plus évidents, qui ne laissent rien au hasard, et qui contraignent les plus difficiles à s'avouer convaincus. » Le hasard ne peut produire d'événement remarquable (de sorte qu'on exclut son intervention lorsqu'un tel événement est observé), mais, à l'inverse, lorsqu'il est à l'œuvre, il a tendance à mêler indistinctement les peines et les récompenses, (si bien que, si l'on observe un tel mélange, il n'y a pas lieu d'exclure l'hypothèse qu'on ait effectivement affaire à un hasard aveugle plutôt qu'à un Dieu juste). On peut ainsi, suivant l'argumentation classique, invoquer le hasard dans certains cas, lorsqu'il y a « mélange » par exemple. On pourrait donc relativiser l'apport de Nicolas Bernoulli, comme nous avons relativisé celui d'Arbuthnot dans la note 13. Toutefois, s'il y avait un doute encore pour Arbuthnot, il faut bien reconnaître qu'avec Bernoulli, on est passé dans une autre dimension, ou dans un autre monde, comme on voudra, et le raisonnement de Nicolas sur le catalogue de Londres pourrait figurer en l'état ou presque dans tous les cours actuels de statistique de toutes les universités du monde.

Il faut alors examiner l'objection de Simplicio (référence de la note 4).

Évidemment, Pascal avait raison : il existe bien une géométrie du hasard, et le théorème de Bernoulli est le premier théorème fondamental du hasard géométrique. Jacques Bernoulli d'ailleurs le comprend ainsi dans un premier temps. Il prend soin de présenter son théorème en une série de lemmes sur les coefficients du binôme, et il ajoute, pour que ce soit plus évident encore, qu'il s'efforce « de tout réduire à la mathématique abstraite » (traduction de Meusnier du latin « conabor omnia reducere ad abstractam Mathesin »), afin que « la chose soit expédiée avec toute la brièveté et toute la clarté possibles ». Cournot, pour sa part, ne s'y trompe pas non plus. Dès son premier article sur le calcul des probabilités, qui remonte à 1828 (16), il indique, en son style doucement sarcastique : «Le calcul des probabilités repose, comme toutes les autres branches des mathématiques, sur certaines notions abstraites, dont la génération dans l'entendement est l'objet des disputes des philosophes, sans que leurs disputes puissent influer en rien sur la rigueur des conséquences que le géomètre déduit, par voie d'identité, de ces notions primitives. » Plus tard dans l'*Exposition* de 1843 (17), à propos du théorème de Bernoulli, qu'il expose de façon strictement combinatoire, Cournot prend soin de préciser (page 43 de l'édition Vrin) : «Il ne faut pas perdre de vue que, dans ces divers énoncés, le terme de *probabilité* n'a pas d'autre sens que le sens mathématique qui lui a été donné par [sa] définition. » Bref, le théorème de Bernoulli est un théorème mathématique tout à fait authentique, d'une branche nouvelle des mathématiques, la géométrie du hasard. Mais alors, il devient silencieux, à la manière des théorèmes, un silence physique en quelque sorte, le silence des reflets dans un miroir, le silence du discours mathématique.

Cependant, nous dit Cournot, pour comprendre l'importance de ce théorème, muet comme une carpe, il faut se placer au point de vue de la philosophie naturelle, et d'ailleurs l'application, qu'en fait Nicolas au catalogue de Londres, nous y invite. Cette copie silencieuse du hasard réel peut se retourner vers la réalité qu'elle copie en un reflet second, qui, lui, est doué de la parole. C'est ce que Galilée déjà avait observé très clairement : la physique mathématique, ce reflet mathématique de la réalité physique, convenablement appliquée, donne à la réalité les règles qui la gouvernent, en première approximation au moins, puis à des ordres d'approximation de plus en plus fins. Jacques et Nicolas Bernoulli paraissent l'avoir compris de la même façon, et après eux Daniel Bernoulli, Laplace et tous les autres, au premier rang desquels il faut placer Cournot : le théorème de Bernoulli a une place dans la philosophie naturelle (la plus importante peut-être, qui sait ?).

Le théorème de Jacques revu par Nicolas (et vingt ans plus tard par Moivre, etc.), est capable de calculer explicitement la probabilité des écarts dans un jeu théorique de pile ou face, de constituer par conséquent des catalogues abstraits, des normes de hasard, qu'il suffira ensuite de comparer aux catalogues physiques ou moraux dont on dispose, pour conclure de façon convaincante si les écarts observés dans les chiffres, ou les alternances plus ou moins indistinctes, sont le fruit du hasard (concret) ou l'indication d'une cause physique ou morale manifeste. Le hasard mathématique des Bernoulli est sans doute un cas très particulier de hasard abstrait, un hasard qui peut se calculer tout entier par la formule du binôme, et qui copie du mieux possible le hasard concret des jeux de dés, ou du tirage d'une urne (concrète) avec remise. Il ne s'applique donc certainement pas à toutes les contingences, en cela Leibniz a raison, mais il permet d'espérer qu'on pourra fabriquer d'autres hasards géométriques aux souplesses plus grandes et d'autres théorèmes de Bernoulli qui copieront plus habilement les hasards éventuels de la nature et de la vie et en calculeront les écarts probables, que l'on confrontera aux catalogues correspondants, de sorte qu'on puisse décider comme Castellion « si l'on a affaire à la divinité ou au hasard », avec une autorité suffisante pour convaincre.

On nous accordera peut-être qu'on a dépassé là le discours classique sur le hasard, celui si éloquent de Cicéron, si humaniste de Castellion, si sensible de Fénelon, si moderne d'Arnauld et Nicole. Il s'agit bien d'une découverte importante et même capitale au point de vue de la philosophie naturelle. Comme on a tenté de l'expliquer, le hasard mathématique copie le hasard naturel, au moins dans les cas les plus simples, et cette copie n'est pas silencieuse, elle peut calculer des probabilités et décrire à sa façon numérique la réalité qu'elle copie. Elle enrichit son modèle, le contrôle et en rend raison, de même qu'un théorème de physique mathématique permet de construire des formules qui rendent raison de la physique ainsi copiée, du moins si le philosophe géomètre a été assez habile pour cela. Sinon, il devra reprendre sa copie et changer de géométrie.

Découverte manifeste donc, que peu de savants ont prise au sérieux dans les années 1710. Un nouveau monde a bel et bien été découvert, mais le temps, les hommes, le climat ont fait qu'il a été laissé en jachère pendant plus d'un demi-siècle, à l'exception notable de Moivre qui a donné au théorème de Bernoulli une forme mathématique optimale. Il serait trop long d'aborder ce sujet fort bien traité ailleurs (18), et nous terminerons ici notre première partie, la plus simple, la moins conjecturale, pour aborder un thème d'une tout autre difficulté. L'*Ars conjectandi* ne se borne pas, en effet, à l'énoncé et à la démonstration du théorème de

Bernoulli. Sa structure est beaucoup plus complexe. Jacques Bernoulli n'hésite pas à aborder globalement le thème de la probabilité mathématique dans l'art de la conjecture et son application aux affaires civiles, morales et économiques, et même, si on le lit bien, à toutes les connaissances humaines, ce que Bernoulli suivant Platon appelle la *stochastique* (19). Ce thème, évidemment fondamental, a été souvent étudié déjà (20), mais il nous faut en dire un mot rapide, si nous voulons éclairer davantage la citation de Cournot dont nous sommes partis, et élever quelque peu le débat. Nous déconseillons cependant le paragraphe suivant aux âmes trop rationnelles. Nous nous engageons sur des terrains difficiles où l'on perd pied facilement, sans même y prendre garde.

II Silence !

Reprenons l'article de Cournot de 1828 (note 16). On peut y lire cette réflexion assez nettement désapprobatrice : «Jacques Bernoulli a employé, le premier que je sache, le terme de probabilité, mais seulement dans la quatrième partie de son *Ars conjectandi,* où il traite des applications du calcul à des questions de philosophie et de morale, et de ce que nous appelons maintenant probabilités *a posteriori* ». Le jeune Cournot, visiblement, trouve que Bernoulli exagère et qu'il aurait mieux fait d'adopter un profil plus bas, pour éviter les débordements sensualistes et empiristes du XVIII^e siècle, dont Lacroix s'est fait l'écho dans son *Traité élémentaire du calcul des probabilités* (21), un écho d'ailleurs brouillé où l'on ne distingue plus que confusions, contradictions et cercles vicieux. Cournot y va un peu fort, et son acte d'accusation est probablement le reflet de son jeune âge et de son inexpérience (22), qu'il corrigera progressivement lorsqu'il se sera fait sa propre conception du hasard et de la probabilité et qu'il l'aura intégrée à un système général de critique philosophique. Il faut cependant reconnaître que Bernoulli fait preuve dans sa quatrième partie d'une sorte de dilettantisme philosophique qui nuit à la reconnaissance de son projet. Quelques allusions à la philosophie scolastique universitaire de toujours qu'il a dû subir à l'Université de Bâle, des références plus solides à la *Logique* de Port-Royal, comme l'a fort bien montré N. Meusnier dans son commentaire, deux évocations de Platon, sans doute à double sens, et puis, ici ou là, des références disparates qui relèvent de l'humour sarcastique de Bayle, plutôt que de la hauteur de vue et de la rigueur intellectuelle des grands systèmes philosophiques (23).

Qu'on ne s'y trompe pas, ce style peu académique en un latin sans grâce, ce mélange de références à la poésie d'Ovide et d'Owen, aux catégories de l'Ecole, au bon sens populaire, tout indique que pour son auteur le nouvel art de conjecturer réduit les références anciennes à n'être que des vestiges sans plus d'utilité, qu'on entasse dans un coin, en désordre. La chose n'est pas si rare, et dans des sphères plus hautes encore. Suivons Balthasar, notre guide bâlois, qui énonce sans crainte, (24) : «les grandes théologies chrétiennes, dignes de rester dans l'histoire, ont été presque toutes construites avec dilettantisme (selon les normes scientifiques d'aujourd'hui) par des amateurs et des enthousiastes », citation dont il suffirait de changer « théologies chrétiennes » en « philosophies scientifiques » pour l'appliquer à l'*Art* de Bernoulli. La *stochastique* bernoullienne bouleverse les catégories anciennes, c'est peut-être ce que l'enthousiaste Bernoulli veut nous faire comprendre. Et, comme il s'agit plutôt d'une intuition forte, d'un projet pharaonique esquissé, ou d'une vision extragalactique, Bernoulli ne peut guère que donner des indices, sans dévoiler le code véritable, qu'il ne possède pas, ni lui, ni personne. Si nous voulons poursuivre, il nous faut donc un guide en matière de philosophie ésotérique, et nous avons choisi de suivre Cournot, qui n'est que marginalement bâlois (25), mais qui en vaut bien d'autres.

Consultons les *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes,* de 1872, qui s'imposent ici naturellement (26). On y lit très nettement ce qui, du point de vue de Cournot, donne à la quatrième partie de l'*Ars conjectandi* sa véritable dimension, que peut-être Bernoulli avait perçue ainsi avant quiconque. Selon Cournot, en effet, la « probabilité mathématique, » telle que la conçoit Bernoulli, loin d'être ce facteur de confusion qu'il dénonçait en 1828, met sur la voie des vrais principes de la philosophie critique, cet auxiliaire précieux de la raison, qui règle nos pensées comme nos actes. Si les Grecs avaient su construire une théorie mathématique du hasard, l'Ecole de l'Académie aurait pu devenir cette véritable école critique qu'elle n'a pas su être, même dans sa forme la plus ouverte, et la plus accomplie, celle que nous a transmise Cicéron (27). Et Cournot de s'étonner que deux siècles après Bernoulli, on ait si peu progressé dans cette voie : « La gent philosophe avait pris un pli qu'il n'était plus si aisé de lui faire perdre, et les conséquences de la théorie mathématique du hasard, quoique indiquées par Pascal et ses amis dans la *Logique* de Port-Royal, et plus tard développées par Jacques Bernoulli, n'ont que faiblement attiré l'attention des contemporains. Leibnitz lui-même, occupé, toute sa vie de la théorie des combinaisons, semble ne pas s'être arrêté à ce qu'elle a effectivement de plus intéressant en soi et pour la conduite de l'esprit humain » (p. 184 de l'édition Vrin).

La « probabilité » bernoullienne mettrait ainsi sur la voie de la véritable critique philosophique, scientifique, politique, etc. Grâce à elle on disposerait d'une méthode générale « pour rendre positive les théories sociales ». Elle permettrait aussi de dépasser les paradoxes académiques et les sophismes de l'esprit humain abandonné à lui-même. Bernoulli étant assez peu explicite sur ce sujet, on l'a dit, nous ne pouvons que nous livrer à un commentaire libre et d'ailleurs très banal de cette thèse. La philosophie et la sagesse communes distinguent depuis toujours plusieurs sortes de certitudes, affectées de qualificatifs plus ou moins restrictifs, depuis la certitude dite absolue jusqu'à la certitude morale (28), dont on se satisfait pour les choses de la vie et qui permet d'échapper aux cercles vicieux de la raison pure. Les tribunaux partagent les certitudes en morceaux et les composent et les cumulent de diverses manières (29). Il y a là un calcul implicite, maladroit, qui ne dit pas son nom. On connaît d'autre part le calcul des chances dans les jeux de hasard, qui, en 1700, est déjà bien avancé, et dont la nature mathématique est reconnue. Il y a enfin le théorème de Bernoulli. Où se situent la philosophie naturelle et la critique philosophique dans tout cela ? Précisément dans l'art de conjecturer. Dans tous les cas énumérés ci-dessus, on construit un hasard géométrique, plus ou moins explicitement, plus ou moins habilement, selon des règles d'ailleurs variables. G. Shafer a montré que les probabilités du chapitre III de l'*Ars conjectandi* ne suivent pas les mêmes règles que celles du chapitre IV (30). Et l'on peut imaginer que Bernoulli n'aurait pas été étonné des règles anarchiques des probabilités quantiques ou des probabilités à valeurs complexes, voire matricielles, ou même, comme le propose Cournot, des probabilités philosophiques essentiellement non numériques. Ce qu'il importe de préciser ce sont les règles de construction et la marche des calculs. On crée ainsi des géométries à l'intérieur desquelles on calcule comme dans le cas du catalogue de Londres jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat significatif, comme on dit maintenant, qui permette la critique du catalogue dont on dispose, qui permette notamment de décider si les écarts observés sont le fruit du hasard ou d'une cause avérée. Les arguments stoïciens antiques peuvent servir d'exemples, quoique de mauvais exemples, parce que les règles utilisées ne sont pas précisées et que, dès lors, tous les coups sont permis, et l'on retombe dans les paradoxes innombrables des fausses coïncidences ou des événements faussement remarquables, par exemple le soi disant resserrement excessif des chiffres des naissances londoniennes. Il faut que la probabilité se développe dans une géométrie appropriée, sinon on perd le fil et on erre sans retour. Bref, les théories mathématiques des probabilités et du hasard fournissent à la philosophie critique, des moyens d'une efficacité renouvelée. C'est le rêve de l'*Ars conjectandi,* selon Cournot, auquel on se reportera pour plus de développements.

On peut naturellement douter que cette conception mathématique de la critique philosophique fasse progresser véritablement des millénaires de réflexions philosophiques sur la certitude, la croyance, l'assentiment, le vrai, etc. Il serait trop long de répondre de façon détaillée à ce doute, qui chez certains s'est mué en véritable hostilité philosophique (30, 5).

Mais, comme il faut répondre quelque chose, nous choisirons de traiter de façon probabiliste les paradoxes les plus rebattus. Prenons, par exemple, le sophisme du tas de blé, le sorite, (31) : un grain de blé n'est pas un tas de blé, deux non plus et ajouter un grain n'y changera rien, le raisonnement se prolonge ainsi à l'infini de grain de blé en grain de blé, donc il n'y a pas de tas de blé. Ce qui, somme toute, ne serait pas gênant, si le même sophisme ne s'appliquait à l'identique à la gradation des certitudes et des probabilités, ou à tout système gradué qu'on voudra. Or le sophisme disparaît tout à fait si l'on observe qu'un tas de blé est un concept probabiliste. Il n'y a pas de tas de blés absolus, il y a des petits tas de blé , des tas de blé moyens, de gros tas de blé, d'énormes tas de blé, toute une hiérarchie de tas de blé qu'on pourrait cataloguer, en notant les opinions des agronomes à ce sujet ou des meuniers, on aurait ainsi un tas de blé 0, 55 ou 0, 004, ou ce qu'on voudra. Et le paradoxe disparaît comme disparaît également le sophisme du menteur, si l'on remarque que la notion de menteur est d'essence probabiliste ; le véritable menteur n'est jamais un menteur absolu, qui, lui, dit simplement la vérité dans une autre langue. Pour ne pas éveiller l'attention, un menteur véritable doit mentir au hasard une fois sur deux et quand il dit «, ' je mens », l'information qu'on a sur lui reste la même, il ment une fois sur deux ou dit la vérité une fois sur deux. Il n'y a plus de cercle vicieux, mais seulement demi-obscurité par nature, demi-obscurité des énoncés probabilisés, (32). Sur ces sujets, il est toujours intéressant de citer Pascal, même à contre-sens (33). Choisissons une des pensées retranchées par Port-Royal, pour qu'il n'y ait pas collusion, la pensée Lafuma 926 : «Je puis bien aimer l'obscurité totale, mais si Dieu m'engage dans un état à demi obscur, ce peu d'obscurité qui y est me déplaît, et parce que je n'y vois pas le mérite d'une entière obscurité il ne me plaît pas. C'est un défaut et une marque que je me fais une idole de l'obscurité séparée de l'ordre de Dieu. Or il ne faut adorer qu'en son ordre. »

D'autant qu'on rend parfois cette demi-obscurité plus lumineuse que l'évidence des démonstrations en forme. C'est le cas lorsqu'on peut appliquer à bon escient un argument stoïcien, c'est-à-dire lorsqu'on réussit à construire un énoncé de très grande ou de très petite probabilité dans le cadre d'une géométrie du hasard de référence, celle de l'urne de Bernoulli par exemple et de son théorème, non pas comme le faisait, par analogie ou par métaphore, Cicéron avec ses osselets lancés cent fois, mais suivant une méthodologie convenablement précisée, critiquée et assumée, autant que possible. Condorcet d'abord, Laplace ensuite et Cournot bien sûr l'ont compris ainsi, quoique pour des raisons opposées, le premier se recommandant du sensualisme philosophique, la permanence de nos sensations, le troisième du rationalisme leibnizien, l'ordre des choses (34), et le second des deux en même temps, par mesure de précaution, (35), ce qui ne change rien à la nature mathématique de leurs raisonnements. On touche là un thème, qui va bien au-delà des quelques réflexions approximatives présentées ci-dessus. Il faut voir les choses de plus haut, et se placer au point de vue de « l'histoire de l'esprit ». Faute de pouvoir le faire nous-même, nous suivrons de nouveau notre guide bâlois, Balthasar (36). La fin du XVII[e] siècle marque l'apogée et en même temps le déclin définitif des dernières grandes tentatives d'unification intellectuelle de la pensée occidentale. Déjà au XIV[e] siècle, les nominalistes avaient tenté de séparer radicalement la philosophie de la théologie toute-puissante (37). Dès l'aube de la Renaissance, on a assisté à des tentatives visant à séparer la philosophie, la science balbutiante et la culture humaine de la perspective totalitaire d'une théologie qui englobe la révélation biblique et la philosophie. Giordano Bruno ou Michel Servet l'ont entrepris, à leurs risques et périls. Mais les humanistes répugnaient aux exclusives, particulièrement les Bâlois. Castellion, qui nous sert de guide, lui aussi, a principalement pour but de réduire par les lumières de la raison les contradictions apparentes des textes sacrés et les obscurités des Mystères de la foi. Son « art de douter » s'applique presque exclusivement à l'interprétation de l'Ecriture sainte. Au XVII[e] siècle encore, siècle de la foi plus que tout autre, les plus grands penseurs n'ont point de cesse qu'ils réussissent à maintenir une unité primordiale entre la science, principalement la nouvelle physique mathématique, la philosophie et la théologie, que l'on réformera, le cas échéant, pour rendre la chose possible. C'est le cas de Descartes qui fait de Dieu le garant de ses pensées mécanistes, quitte à jeter à la poubelle la scolastique et ses prétentions ridicules. Pascal, écartelé au-dessus de l'abîme qu'il a creusé plus que tout autre entre esprit de géométrie et esprit de finesse, fait de Jésus-Christ, l'Homme-Dieu, celui en qui tout s'unit. Balthasar écrit, à ce propos, en une belle envolée (op. cit. p. 60) : « L'homme de Pascal est celui des abîmes intérieurs et des contrastes ; en lui ce n'est pas seulement le frisson des abîmes quantitatifs et extérieurs qui est dominé, ce sont les contradictions irréconciliables de son être qui se trouvent dominées dans la loi unificatrice du monde, celle de l'Homme-Dieu, Jésus-Christ. » L'harmonie de Leibniz, le maître de Bernoulli (et de Cournot), a pour fonction première d'unir physique mathématique, morale et théologie. Il écrit (38) : « Comme nous avons établi ci-dessus une Harmonie parfaite entre deux Règnes naturels, l'un des causes Efficientes, l'autre des Finales, nous devons remarquer ici encore une autre harmonie entre le règne physique de la nature et le règne Moral de la Grâce, c'est-à-dire, entre Dieu considéré comme Architecte de la machine de l'Univers, et Dieu considéré comme Monarque de la Cité divine des Esprits ». Ambitions démesurées s'il en fut, que le XVIII[e] siècle des Lumières oubliera vite.

Déjà l'entreprise de Bernoulli n'a plus cette ambition (et Leibniz ne s'y est pas trompé) : oublions la théologie et la philosophie, les causes efficientes et finales, le règne de la Grâce. Comment alors juger des sciences, toutes les sciences, mais particulièrement des sciences morales et politiques, où l'incertain règne en maître, où les critères usuels d'efficacité pratique sont difficiles à mettre en œuvre, où les principes n'ont pas la simplicité et l'élégance rationnelles qui les rendraient crédibles. La réponse de Bernoulli, à la fois résolument moderne et enracinée dans l'antique philosophie, consiste à proposer dans ce but la stochastique avec ses deux composantes, mathématique et morale, ou si l'on veut, probabiliste et statistique. Il n'est pas utile d'en dire davantage, et l'on comprend que Condorcet, Laplace ou Cournot, quoique parisiens, aient adhéré aux grandes thèses bernoulliennes, qui permettent d'une certaine façon d'utiliser la science pour critiquer la science. Après deux siècles d'un parcours difficile maintes fois interrompu, il faut bien reconnaître avec Cournot que « s'il y a eu en mathématiques des découvertes plus difficiles, il n'y en a pas eu de plus importante au point de vue de la philosophie naturelle ». Dans le ciel vide des mathématiques, où ne brillent que l'obscure clarté des théorèmes silencieux, la stochastique, cette physique mathématique de la contingence, se choisit des modèles et calcule, librement, par exemple les écarts probables d'un jeu de pile ou face. Et ce calcul permet de faire une critique pertinente des catalogues de Londres. Évidemment, cela marche rarement et lorsque cela marche, on ne calcule que des probabilités, et sans doute même pas les véritables probabilités. Et si décidément le calcul est impossible ou s'il est grossièrement faux, il reste encore la possibilité d'en appeler aux mythes. Bernoulli, le premier, montre la voie à la fin de son *Ars conjectandi,* ultime provocation à l'usage de ses contemporains et des siècles futurs. Son théorème serait une image du retour universel des choses à leur état initial après un nombre immense de siècles, l'apocatastase de Platon (39). Lorsque la dialectique est impuissante, on peut faire appel à la poésie, aux mythes éternels, pour forcer le passage. La science moderne invente avec Bernoulli une variante de ce procédé. Un théorème détaché de son contexte et de ses applications naturelles peut servir de mythe de passage. Forte de ce premier exemple, une grande partie de la statistique du XIX^{e} siècle se recommandera du théorème de Bernoulli, comme Platon de l'apocatastase.

Malgré Cournot et les nouvelles philosophies des sciences des XIX^{e} et XX^{e} siècles, acharnés à le décrypter, le Bernoulli Code n'est pas prêt de livrer tous ses mystères. Nous en resterons donc là pour le moment.

NOTES

(1/2) N. Meusnier, *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi,* Rouen, IREM, 1987, *Christian Huygens et Jacques Bernoulli : la première partie de l'Ars Conjectandi (1657-1713),* Paris, CAMS, 1992

(3/4) N.D.L.R : n'en déplaise à la modestie de Bernard Bru, il s'agit en fait du séminaire Bru-Barbut-Coumet autrement dit : « Séminaire B.B.C ».

(1) Quelle chance nous avons eu de le connaître un peu, d'entendre sa voix au téléphone : « Allô, ici Coumet », et de goûter une petite ou une grande heure philosophique ! Lorsque Coumet n'a plus appelé, lorsque son téléphone n'a plus répondu, nous avons compris que c'était grave, ce qu'il avait eu la pudeur et l'amitié de nous cacher. Coumet avait été professeur de philosophie à Oran en 1960. Il avait également connu les déchirements philosophiques de la Sorbonne après 1968. Un seul juste suffit !

L'auteur aimerait associer à cet hommage très amical, le nom du principal fondateur et responsable du séminaire de l'EHESS, sans qui rien n'aurait été possible, Marc Barbut, qui a toujours veillé à ce que les combats soient à fleuret moucheté et se terminent sans qu'aucun des escrimeurs ne se sente blessé, performance inouïe et constamment renouvelée, dont il n'est pas d'autres exemples connus.

(2) *Œuvres complètes de A. A. Cournot,* tome V, Paris, J. Vrin, 1978.

(3) *Histoire de l'Académie royale des sciences,* année 1705, p. 139-150.

(4) *Dialogues sur les deux grands systèmes du monde,* édition originale, Florence, 1632, traduit de l'italien par R. Fréreux avec le concours de F. de Gandt, Paris, Seuil, 1992, p. 221-225. Pour un commentaire éclairé de ce passage, on verra le chapitre II de l'ouvrage de E. Giusti, *La naissance des objets mathématiques,* traduit de l'italien par G. Barthélemy, Paris, Ellipses, 2000.

(5) *Dictionnaire historique et critique de Pierre Bayle,* 1696, nouvelle édition, Paris, Desoer, 1820, édition électronique Gallica, tome XV, article Zénon de Sidon, p. 62-67. Comme on sait, Jacques Bernoulli a rencontré Bayle aux Pays-Bas en 1681. C'est peut-être chez Bayle qu'il a pris ce goût singulier pour l'humour ésotérique. Fontenelle, et tous les auteurs à sa

suite, déplorent le «tempérament bilieux et mélancolique » du savant bâlois, impression accentuée par le portrait qu'on a de lui, œuvre de son frère Nicolas, qui ne l'avantage guère, avec cette fraise imposante, la perruque haute à la Louis XIV, le nez proéminent et une moue dédaigneuse. Certes, Jacques n'a guère apprécié que son frère Jean gagne sur lui en géométrie, mais il ne devait pas détester les fines plaisanteries et les moins fines, comme ses écrits le démontrent. Par exemple son mémoire sur les comètes (publié en 1681) dans lequel il soutient gravement que le corps des comètes a une trajectoire réglée par des lois nécessaires, mais que leur queue manifeste une contingence susceptible d'indiquer des avertissements célestes, morceau d'humour loufoque dirigé contre les bourgeois de Bâle qui, en 1675, avaient interdit à Peter Megerlin, son prédécesseur dans la chaire de mathématiques de Bâle, d'enseigner la théorie copernicienne. On sait que, bien avant Voltaire, Bayle pratiquait avec bonheur l'humour sarcastique et pince-sans-rire sous des formes diverses. On verra par exemple, A. McKenna, « L'ironie de Bayle et son statut dans l'écriture philosophique », in *Regards sur Pierre Bayle,* éd. I. Delpla et Ph. De Robert, Paris, Champion, 2000.

(6) On verra l'édition de M. Parmentier, *L'estime des apparences,* textes de G. W. Leibniz, Paris, Vrin, 1995, p. 269 et 274-276.

(7) Voir la note (52) de l'édition de N. Meusnier, *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi,* Rouen, IREM, 1987. Dorénavant l'*Ars conjectandi,* Basilae, Impensis Thurnisionum, Fratrum, 1713, sera désigné par le sigle AC.

(7,5) AC p. 225 et note (44) de l'édition Meusnier.

(8) Bâle : l'une des thèses non dites les plus contestables de la présente contribution est de souligner l'importance des causes géographiques, ce que naguère on appelait la théorie des climats : «Les idées sont comme des plantes ou des fleurs qui ne viennent pas également bien en toutes sortes de climats », écrivait Fontenelle dans ses *Digressions sur les anciens et les modernes* de 1688. Cette théorie (des climats) a une longue histoire qui remonte certainement aux anciens Grecs. Sur la question des mœurs, Montesquieu lui a donné ses lettres de noblesse. Son application (audacieuse) aux arts, aux lettres et aux sciences est moins classique. Outre Fontenelle, la référence la plus connue est l'abbé Dubos qui développe longuement la thèse selon laquelle ce sont les causes physiques, la qualité de l'air notamment, qui déterminent les progrès des arts et des lettres, les causes morales, l'éducation par exemple,

ne faisant que concourir à ce progrès et n'empêchant en rien les décadences (J. B. Dubos, *Réflexions critiques sur la poésie et la peinture,* 1733, Gallica 1997, partie 2). Vers 1700, il semble que l'air de Bâle ait été particulièrement propice à la théorie des hasards, davantage que celui de Londres ou de Paris. Nous nous attacherons donc particulièrement ici aux auteurs bâlois.

(9) On verra par exemple les ouvrages de A. Hald, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750,* New York, J. Wiley, 1750, chapitre 16 et §17.3, et *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930,* New York, J. Wiley, 1998, p. 13-17, 65-68. La plupart des observations présentées ici ont été déjà exposées à de nombreuses reprises dans des séminaires, à l'EHESS ou ailleurs, notamment aux Journées de statistiques de Vannes, en mai 1993, que nous suivons parfois.

(10) À Paris, chez Jacques Quillau, 1713, reprint New York, Chelsea, 1980, édition électronique Gallica, 2005.

(11) postée « à Paris », elle figure aux pages 388-394, de l'*Essay* de Montmort, note précédente. Il s'agit donc d'une lettre parisienne, qui contredit quelque peu la thèse climatique de la note 8, sans la détruire tout à fait, Nicolas Bernoulli étant natif de Bâle, et, qui plus est, le fils du peintre qui a réalisé le fameux portrait bilieux de Jacques, ce qui en dit long sur toute cette histoire.

Rappelons que Nicolas Bernoulli est né à Bâle, le 21 octobre 1687. Toutefois l'incertitude demeure sur le calendrier utilisé par la famille Bernoulli, les cantons protestants n'ayant adopté la réforme grégorienne qu'au début du XVIII^{e} siècle. Certains auteurs considèrent ainsi que Jacques Bernoulli est né le 27 décembre 1654 du calendrier julien, c'est à dire le 6 janvier 1655 de notre calendrier, ce qui le fait vivre un peu moins longtemps. On verra sur ce point l'intéressant article commémoratif de E. von Collani, « 2005-the Jakob-Bernoulli-year … », *Economic Quality Control,* 20 (2005), p. 155-169.

Quoi qu'il en soit, Nicolas Bernoulli a soutenu sa célèbre thèse de droit à Bâle le 4 juin 1709, thèse tout imprégnée des idées de l'*Ars conjectandi*. On verra évidemment à ce sujet la superbe édition qu'en a faite N. Meusnier, *L'usage de l'art de conjecturer en droit,* Paris, CAMS, 1992.

(12) J. Arbuthnot, « An Argument for Divine providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes », *Phil. Trans.,* 27 (1710-1712), p. 186-190. Cet article figure dans le numéro 328 du tome 27 et est daté du dernier trimestre 1710. Dans le numéro suivant se trouve le « De mensura sortis » de Moivre, premier trimestre 1711, 27 (1710-1712), p. 213-264. Ces textes ont été reproduits à de nombreuses reprises et se trouvent maintenant accessibles facilement sur Gallica.

Sur le docteur Arbuthnott (ou Arbuthnot), et la discussion de l'argument dont il s'agit, on se reportera au travail très complet de N. Meusnier, « Dr Arbuthnot et Mr Hidden. Mathématiques, Providence Divine et Petite vérole ; sur le probable au début du XVIIIème siècle en Angleterre », Paris, CAMS, 1999, qui va bien au-delà du présent exposé.

(13) L'exploit est remarquable, mais il convient de le relativiser. En effet, l'argument d'Arbuthnot ne dépasse pas de beaucoup les limites de l'argument stoïcien, que tous les savants de la Royal Society connaissent depuis leurs années d'université. Cet argument est fort ancien. Il est certainement antérieur aux Grecs de la période classique, et il s'est trouvé mis en avant assez systématiquement par les Stoïciens de la période hellénistique, pour démontrer l'absurdité de la physique épicurienne qui attribue aux hasards des rencontres la formation des mondes. On connaît explicitement la forme de cet argument, et dans de grands détails, grâce aux textes philosophiques de Cicéron, par exemple le *De Natura Deorum,* II, 87-93, ou le *De Divinatione,* I, 13-14, II, 71. L'argument consiste à faire observer que le hasard ne réussit pas à produire d'événement en quelque sorte remarquable, par exemple sortir cent fois de suite le coup de Vénus aux osselets (*De Div.,* I, 13), ou bien obtenir 82 fois de suite pile au jeu de croix ou pile (Arbuthnot). Evidemment Cicéron et les Stoïciens ne mathématisent pas cette impossibilité, mais ils proposent des exemples types, sorte de références ou de normes de hasards impossibles, osselets jetés en grand nombre qui montrent une figure remarquable, on l'a dit, ou bien, plus classique encore, lettres de l'alphabet jetées au sol et formant un vers d'un poète célèbre ou tout un ouvrage, l'Iliade, l'Eneïde, avec des variantes infinies sur la nature du mécanisme aléatoire, pinceaux jetés en l'air dessinant Vénus (encore elle) ou sons mélangés au hasard composant une harmonie parfaite (Grégoire de Nazianze). Il ne s'agit plus alors de la répétition remarquable d'un même événement ordinaire, mais d'un seul événement considéré comme suffisamment remarquable pour défier le hasard. Ce type d'argument repris par les Pères de l'Eglise n'a jamais cessé tout à fait d'être utilisé. C'est la preuve « par les œuvres » de l'existence de Dieu. On le retrouve intact à la Renaissance et encore au XVII^{e} siècle chez Descartes ou dans la *Logique* de Port-Royal et

par exemple chez Fénelon, dont le *Traité de l'existence et des attributs de Dieu,* disponible sur Gallica, est un long développement autour de cet argument. On verra également J. Franklin, *The Science of Conjecture : Evidence and Probability Before Pascal,* Baltimore, John Hopkins University Press, 2001, et surtout J. Loveland, « Buffon, the Certainty of Sunrise, and the Probabilistic Reductio to Absurdum », *Arch. Hist. Exact Sci.,* 55 (2001), p. 465-477.

Si bien que la véritable originalité de l'argument d'Arbuthnot (du second argument au moins) est d'abord l'observation que pendant 82 ans il est toujours né à Londres plus de garçons que de filles, ce qu'évidemment Chrysippe ne pouvait pas savoir, en l'absence de catalogue convenable, et d'évaluer numériquement l'improbabilité d'une telle situation, sous une hypothèse simple de hasard pur, là où Cicéron se serait contenté de construire un jeu d'osselets qui manifeste la même improbabilité avec autant de force de conviction. Ce qui évidemment ne retire rien à la force du mémoire d'Arbuthnot, qui implique presque nécessairement celui de Nicolas Bernoulli et les travaux ultérieurs de Moivre, Laplace et les autres. La conjonction des événements, théorème de Bernoulli, première édition de l'*Essay* de Montmort, catalogue de Londres, *Argument* d'Arbuthnot, lettre de Nicolas, est un exemple assez remarquable d'enchaînement nécessaire et de hasard pur en histoire des mathématiques.

(13, 5) Du second argument d'Arbuthnot, Nicolas ne dit rien, peut-être a-t-il essayé sans succès d'utiliser le théorème de l'oncle, qui n'a pas encore la souplesse d'application que lui donnera Moivre en 1733. Notons que si on applique le théorème de Bernoulli, revu par Moivre et les tables de Cournot, à la probabilité qu'en 14000 jets du dé de Nicolas (18 faces M et 17 F), on obtienne plus de M que de F, on trouve un peu plus de 0, 9997. Si maintenant on recommence 82 fois cette opération, la probabilité que les M l'emporte sur les F, à chaque fois, reste grande, de l'ordre de 0, 97. De sorte que le second argument d'Arbuthnot perd l'essentiel de sa vigueur stoïcienne. La méthode de Nicolas est à la base du test de comparaison d'une proportion théorique à une proportion observée, qui est probablement le test statistique le plus couramment utilisé et enseigné depuis un siècle.

L'analyse des catalogues de naissance a été reprise à plusieurs reprises au cours du XVIII^{e} siècle, notamment par Buffon et surtout Laplace, qui a mis à l'épreuve des naissances sa première théorie analytique des probabilités dans les années 1780. On doit à Poisson (et à Cournot) l'exposé systématique des tests sur les proportions, comme sur les moyennes. Pour des références, on verra le numéro du *Jehps* cité note (16) infra et la note (18) infra.

(14) Sébastien Castellion est né en 1515 à Saint-Martin-du-Fresne, une commune du Haut-Bugey proche de Nantua, à vocation agricole et forestière. Le Bugey a été rattaché à la France par le Traité de Lyon, le 17 janvier 1601. Il appartenait auparavant aux Ducs de Savoie, ce qui l'a mis à l'abri des guerres de religions, mais rend les recherches historiques plus difficiles encore. Il ne semble pas, en effet, que les Ducs de Savoie se soient particulièrement intéressés à l'Etat Civil. Les premiers actes paroissiaux bugistes datent du milieu du XVII[e] siècle, après le rattachement à la France, soumise, elle, à l'Ordonnance de Villers-Cotterets de 1539, faisant obligation aux curés d'enregistrer les naissances, les mariages et les décès, de sorte que la généalogie de Castellion reste largement conjecturale . Indiquons cependant que le patronyme Castellion, sous la forme Chatillon, est courant dans ces régions (comme dans beaucoup d'autres) et qu'on trouve à Saint-Martin-du-Fresne des Chatillon agriculteurs, dès les premiers registres paroissiaux.

Sur les registres paroissiaux de la Combe du Val et de Saint-Martin-du-Fresne, on verra par exemple les intéressantes recherches de F. Deguerry, *Une famille du Bugey, les Deguerry*. *Histoire généalogique de 1608 à 1948,* Lyon, 1948.

Sébastien Castellion est étudiant pauvre au Collège de la Trinité à Lyon, avant que celui-ci ne soit dirigé par les jésuites. Il se convertit au protestantisme et se lie d'amitié avec Calvin qu'il suit à Genève. Castellion est un esprit brillant et érudit, un humaniste véritable. Assez vite il se brouille avec Calvin, notamment sur l'interprétation du *Cantique des cantiques*. La position de Castellion sur ce point est parfois jugé sévèrement. Castellion aurait cherché à détruire l'interprétation mystique du *Cantique,* pour magnifier les débordements coupables de l'éros. En réalité, sa position est humaniste ; elle redonne à l'éros sa dimension esthétique. On verra sur ce point, le paragraphe II.2.e «Eros et la beauté du monde » du volume 3 de *La Gloire et la Croix* du grand théologien bâlois H. U. von Balthasar (traduit de l'allemand par R. Givord, Paris, Aubier, 1974), que l'on pourrait faire servir d'exemple d'utilisation de l'argument stoïcien : l'éros est d'une telle beauté qu'il ne peut être le fruit du hasard, mais celui de la providence divine. Quoi qu'il en soit, Castellion doit fuir Genève. Il se réfugie à Bâle, alors (et pour peu de temps) un foyer humaniste de haute culture. C'est à Bâle qu'il apprend la condamnation et la mort sur le bûcher en 1553 de Michel Servet, contre lesquelles il s'élève, presque seul, se faisant le défenseur éloquent de la tolérance religieuse. Il meurt à Bâle en 1563, laissant plusieurs manuscrits inédits, dont celui que nous examinons ici. On a de lui en particulier une remarquable traduction de la Bible en français, récemment rééditée, Paris, Bayard, 2005. Sur la vie et l'œuvre de Castellion, on verra la thèse de F. Buisson, *Sébastien Castellion, sa vie et son œuvre (1515-1563). Etude sur les origines du* *protestantisme libéral français,* Paris, Hachette, 1891, et S. Zweig, *Conscience contre violence ou Castellion contre Calvin,* 1937, Bordeaux, Le Castor astral, 2004, ou par exemple les travaux du philosophe des sciences polonais W. Voisé, notamment son article de la *Revue de Synthèse* de 1964, etc.

A l'entrée de Saint-Martin-du-Fresne, venant de Nantua, on trouve une stèle à la mémoire de Sébastien Castellion, « défenseur de la liberté de conscience au XVI[e] siècle ».

(15) *De arte dubitandi et confitendi, ignorandi et sciendi,* manuscrit édité avec une introduction et des notes par Elisabeth Feist Hirsch, Leiden, E. J. Brill, 1981. Le *De arte dubitandi* a été traduit en français par Charles Baudouin, et édité à Genève, aux éditions Jeheber, en 1953. Cette édition fort bien faite avec des introductions de J. Schorer et E. Giran, est toujours en vente. L'auteur s'en est procuré un exemplaire neuf, via Internet, à la Librairie dauphinoise de Bourgoin-Jallieu, pour une somme modique.

(16) «De la théorie des probabilités considérée comme la matière d'un enseignement », *Le Lycée,* 2 (1828), p. 243-254, reproduit avec des notes dans le *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique,* Vol. 1, n° 2, novembre 2005, (http://www.jehps.net/), et au tome XI des *Œuvres complètes* de Cournot, à paraître en coédition Vrin-Université de Franche-Comté. On peut considérer que le présent article est une note additionnelle à l'édition de ce texte, une note trop longue pour figurer dans l'édition dont il s'agit, qui ne respectait pas la première règle déontologique des annotateurs selon laquelle : «une note ne doit jamais dépasser le nombre total de mots du texte annoté moins un, de sorte que la longueur totale du texte ainsi pourvu de notes successives suivant la même règle, n'excède pas la factorielle du nombre de mots du texte initial multipliée par *e*, toute règle moins restrictive faisant rapidement exploser le volume annoté. »

(17) *Exposition de la théorie des chances et des probabilités,* Paris, Hachette, 1843, *Œuvres complètes,* tome I, Paris, J. Vrin, 1981.

(18) Sur cette histoire longue et riche, on verra les ouvrages de Hald cités note (9) supra et le beau livre de S. M. Stigler, *The History of Statistics : The Measurement of Uncertainty before 1900,* Cambridge MA, The Belknap Press of Harvard University Press, 1986. On se reportera si besoin à l'annexe, qui donne une version enfantine de la postérité du théorème.

Sur l'application du théorème à la masculinité, la littérature est très riche, on consultera les ouvrages précédents, mais nous recommandons particulièrement la contribution très étonnante de G. Th. Guilbaud, au volume *Arithmétique politique dans la France du XVIII*[e] *siècle,* dirigé par T. Martin, Paris, INED, 2003, intitulée, « La ténébreuse affaire de Corcelles », p. 249-258.

(19) Platon, *Philèbe* 55[e]. Toutefois, l'allusion doit être prise (avec probabilité 0. 55) en un sens polémique et ironique. Platon, en effet, distingue parmi les arts, les arts directeurs, l'art de compter, de mesurer, de peser, qui donnent aux autres arts la plus grande part de leur valeur. Certains arts ne peuvent se recommander de ces arts directeurs. Pour les pratiquer, « il ne restera qu'à recourir à la stochastique et à exercer ses sens par l'expérience et la routine, en y adjoignant ces facultés divinatoires auxquelles beaucoup de gens donnent le nom d'arts, lorsqu'elles ont acquis de la force par l'exercice et le travail » (traduction E. Chambry, qui écrit conjecture là où nous avons mis stochastique, suivant l'original grec). Relèvent ainsi de la stochastique l'art de la flûte, la médecine, l'agriculture, le pilotage (la cybernétique écrit Platon) et l'art du général d'armée (la stratégique en grec), *Philèbe* 56b.

Bernoulli, prenant Platon à contre pied, fonde la stochastique sur la mathématique du hasard et de la probabilité, c'est à dire sur l'un des arts directeurs. Ce point parmi cent autres justifie, (en partie), le titre de l'exposé.

(20) La littérature sur ce sujet est trop abondante et trop connue pour être citée ici. Signalons simplement deux articles qui s'intéressent spécialement au projet bernoullien de « stochastique », vu de l'intérieur, celui de E. von Collani cité note 11, et surtout celui, très remarquable, de G. Shafer, « The Significance of Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi* for the Philosophy of Probability Today », *Journal of Econometrics,* 75 (1996), p. 15-32, par un des meilleurs spécialistes contemporains de Bernoulli et de « l'art de conjecturer », que l'on peut télécharger sur le site www.glennshafer.com/assets/downloads/article55.pdf.

(21) Sur ce point on verra les notes d'édition de l'article de Cournot, publiées dans le *Jehps,* note (16) supra.

(22) Cournot se trompe au moins sur un point. Bernoulli a emprunté le terme probabilité, pris en un sens mathématique, abstrait, à la *Logique* de Port-Royal et sans doute également à Leibniz, qui, dans ses manuscrits de jeunesse, utilise le terme probabilité comme synonyme

d'apparence, et de chance, dans le contexte des jeux de hasard (abstrait). On verra sur ce point Parmentier, op. cit. note (6) supra, e. g. p. 129.

(23) Prenons le chapitre II de la quatrième partie, AC p. 213-217, intitulé en toute simplicité : « Science et conjecture. L'art de conjecturer. Les arguments des conjectures. Axiomes généraux touchant ces points. » Bernoulli énonce 9 « règles ou axiomes généraux ». Chacune de ces règles, nous dit-il, est dictée par la simple raison et est observée dans la vie civile par les plus sages (prudentiores). On pourrait imaginer que Bernoulli va présenter ses règles avec un soin particulier et se recommander des plus sages d'entre les sages de tous les temps. Ce n'est pas véritablement le cas. Norbert Meusnier a relevé les emprunts à la *Logique* de Port-Royal, emprunts le plus souvent non signalés. Pour l'axiome 6, Bernoulli se contente de renvoyer à un proverbe populaire, en allemand, « si ça ne fait pas de bien, ça ne peut pas faire de mal non plus ». L'axiome 7 est justifié par un vers d'Ovide, tiré de l'épître II des *Héroïdes,* où Phyllis, sur le point de se jeter à la mer par désespoir amoureux, invective son amant Démophoon qui l'a trompée, et a précipité sa ruine, la rumeur publique la jugeant indigne de gouverner parce qu'elle a échoué dans son amour. Et pour faire bonne mesure, alors que, de cet axiome, il ne sera plus question ensuite, Bernoulli ajoute une épigramme d'Owen, un poète gallois satyrique du début du XVII[e] siècle, alors plus connu que Shakespeare sur le Continent, où ses épigrammes latines ont été éditées à maintes reprises, dans la seconde moitié du siècle, notamment aux Pays-Bas, et dont son éditrice sur le site www.philological.bham.ac.uk/owen/, Dana F. Sutton, nous dit qu'il était naturellement antipapiste et misogyne, mais aussi « spectacularly obscene ». Enfin, pour que la chose soit dite en toute lettre, Bernoulli conclut son chapitre fondateur par cette phrase remarquable : «Chacun, instruit par l'usage quotidien, pourra se forger par lui-même d'autres Axiomes de ce genre ; quant à nous, l'occasion n'en étant pas offerte, nous ne pouvons nous souvenir de tous qu'avec peine ». Exemple intéressant de style décontracté.

Il semble que ce soit Cramer qui ait entrepris de mettre un peu d'ordre dans les axiomes généraux de Bernoulli, dans son cours inédit de Logique, vers 1745. Ce cours sert de fond à l'article « Probabilité » de l'*Encyclopédie*. On verra à ce sujet l'article de T. Martin, «La logique probabiliste de Gabriel Cramer », à paraître.

(24) Hans Urs von Balthasar, *La Gloire et la Croix,* tome I, traduit de l'allemand par R. Givord, Paris, Aubier, 1965, p. 64.

(25) Rappelons que Cournot était comtois, mais qu'il se rendait assez souvent à Delémont dans le Jura suisse où son fils Pierre gérait le patrimoine de ses filles, héritières d'une partie des Forges d'Undervelier et dépendances. C'est vraisemblablement aux environs de Delémont, à une quarantaine de kilomètres de Bâle, que les Cournot ont séjourné de l'été 1870 à l'été 1871. Delémont a appartenu, depuis l'an mille environ jusqu'en 1815, à la partie francophone de la Principauté de Bâle. Lorsque la ville de Bâle est passée au protestantisme et s'est émancipée, le prince-évêque de Bâle a pris ses quartiers à Porrentruy, avec sa résidence d'été au château de Delémont. La ville fait toujours partie du Diocèse de Bâle. François Finot, le grand-père de Berthe Finot, belle-fille de Cournot, était propriétaire des forges d'Undervelier, acquises par suite de son mariage avec la fille de Jean-Pierre Cugnotet, un industriel français qui avait acheté les usines d'Undervelier et Courrendlin, comme bien national, la France s'étant emparée des possessions du Prince-Evêque. François Finot, originaire de Dijon, avait pris la nationalité suisse et fut maire d'Undervelier. Nous devons ces précisions à François Rais, membre du Cercle généalogique de l'Ancien Evêché de Bâle, que nous remercions très vivement.

Nous considérerons donc ici que Cournot a suffisamment respiré d'air bâlois pour être initié au Bernoulli Code.

(26) A. Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes,* Paris, Hachette, 1872, *Œuvres complètes,* tome IV, Paris, J. Vrin, 1973.

(27) Les écrits philosophiques de Cicéron sont accessibles en latin dans la « Bibliothèque philosophique » du site de l'Académie de Nice, http://www.ac-nice.fr/philo/. On en trouve une traduction française partielle annotée par E. Bréhier dans *Les Stoïciens,* édités sous la direction de P.-M. Schuhl, Paris, *tel* Gallimard, 1997, volume I. On verra particulièrement dans ce volume le livre II des *Premiers académiques,* où Cicéron présente les thèses de la Nouvelle Académie, teintées de stoïcisme moyen, qui tiennent le milieu entre dogmatisme et scepticisme, sans toutefois échapper au paradoxe du sage, qui ne saurait donner son assentiment sur quelque sujet que ce soit et qui cependant ne cesse de trancher et de décider. Cournot doute que Cicéron ait transmis correctement l'enseignement de ses maîtres grecs, mais c'est visiblement l'une de ses sources (*Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique,* Paris, Hachette, 1851, *Œuvres complètes* tome II, Paris, J. Vrin, 1975, p. 413). Comme on sait, c'est à partir de la langue de Cicéron et de César, que les humanistes de la Renaissance ont fabriqué de toute pièce une langue latine

érudite, qui n'est pas à proprement parler une langue morte puisqu'elle ne fut jamais vivante, mais une langue de culture, que Castellion, Descartes, Fénelon, Bernoulli et Cournot ont apprise à l'identique ou presque.

(28) Certitude morale : c'est une des notions dont se recommande Bernoulli (AC p. 211). Elle est mentionnée par tous les auteurs du XVII^{e} siècle, (e. g. Descartes, *Principe de la philosophie,* III 205, Spinoza, *Traité théologico politique,* II, Leibniz, *Correspondance,* lettre à T. Burnett du 2 février 1700, etc.). Il s'agit d'une notion très ancienne ; on verra à ce sujet le mémoire de DEA de A. Glémain, *Croyance et probabilités dans la pensée européenne des XVIIème et XVIIIème siècles,* Paris, EHESS, 1992, qui la fait remonter à la syncatéthèse stoïcienne, l'assentiment, qui peut se concevoir de plusieurs façons, à plusieurs niveaux, le plus élevé débouchant sur la foi religieuse, assentiment total à la présence d'un Dieu vivant rendu possible par la Grâce, et le plus bas réglant nos décisions de la vie courante. Castellion, suivant saint Paul, I Cor XIV 16, distingue quatre niveaux de croyance (*Art de douter,* p. 63-64). Les croyances de plus bas niveaux relèvent de la raison et des probabilités qui en sont les instruments. C'est déjà la thèse principale de la Nouvelle Académie, contre les stoïciens, les sceptiques, les cyniques, les sophistes, les épicuriens, … (Cicéron, *Premiers académiques* II, e. g. 98 sqq.), thèse qui est reprise, d'une certaine façon, par le Bernoulli Code : faire de la certitude morale une notion probabiliste, qui permette de réduire le paradoxe du sage à une question bien posée de critique philosophique et statistique. Mais Bernoulli se démarque nettement du probabilisme ancien, nous l'avons rappelé déjà, par le rôle qu'il fait jouer à la probabilité mathématique et à la théorie du hasard, dont son théorème permet un contrôle partiel. C'est au moins l'opinion de Cournot.

(29) On relira naturellement le célèbre article de Coumet, « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? », *Annales : Economies, Sociétés, Civilisations,* 1970, p. 574-598. On verra également le livre de L. Daston, *Classical Probability in the Enlightement,* Princeton University Press, 1988.

(30) G. Shafer « Non-additive probabilities in the work of Bernoulli and Lambert, *Arch. Hist. Exact Sci.,* 19 (1978), p. 309-370.

(30, 5) On verra sur ce point, E. Coumet, « Auguste Comte. Le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique », *Math. & Sci. Hum.,* 162 (2003), p. 9-17.

(31) sorites : sur l'histoire de ce sophisme et les débats qu'il a suscités entre les Stoïciens, les Sceptiques et les Académiciens, on verra par exemple l'édition Bréhier des Stoïciens citée supra note 27, volume II, p. 1271, 1369, etc. La solution probabiliste du sophisme du tas de blé, que nous présentons ici, a été proposée par Borel dans *Le Hasard,* Paris, Alcan, 1914, V 47. On nous objectera que Borel n'a que peu d'affinités bâloises, que c'est un homme du pays saint-affricain où son père était pasteur. Mais on doit rappeler que le Bernoulli Code s'est dispersé en divers lieux. Vers 1780, il s'est implanté en partie dans les caves de la Sorbonne, où il se trouve toujours, quoiqu'on ne le sache pas avec certitude. (N.D.LR : sa disparition des caves de la Sorbonne après 1975 est moralement certaine et probablement immorale.)

(32) On peut faire les mêmes observations à propos des sciences dures. Il suffit de probabiliser les conditions initiales pour faire disparaître le paradoxe de l'irréversibilité en théorie cinétique des gaz, ou bien de considérer que l'électron est étalé autour du noyau avec une certaine distribution de probabilité pour que disparaissent les difficultés de la théorie atomique, etc. Comme si le Bernoulli Code permettait de dépasser les limites de la physique mathématique classique, certaines d'entre elles au moins, pour décrypter la nature.

(33) Le contresens est ici indubitable. Comme nous l'a indiqué G. Th. Guilbaud, à qui nous devons un commentaire particulièrement lucide de cette pensée « obscure », Lafuma replace la pensée 926 dans un ensemble qui comprend le *Mémorial,* le *Mystère de Jésus,* et quelques fragments divers. De sorte que l'obscurité dont il s'agit ici doit se prendre en un sens spirituel, l'obscurité dont parle les mystiques, Jean de la Croix en particulier, un certain « état d'âme » devant le mystère de la foi. La demi-obscurité serait alors le doute du croyant qui se souvient de l'expérience mystique (pour Pascal celle du 23 novembre 1654 « depuis environ dix heures et demi du soir jusques environ minuit et demi ») et se demande s'il ne s'agissait pas d'une illusion, et ce doute, cette demi-obscurité sont plus cruels que l'obscurité totale.

Nous faisons servir la pensée 926 à un tout autre usage, plus profane, moins tragique, moins violent, le doute devant la probabilité évaluée, la nuit faiblement éclairée par quelques lumignons probabilistes troublant l'obscurité totale, qui a pour elle l'évidence des certitudes. Qu'on fasse donc taire le théorème de Bernoulli ; son silence doctement mathématique est plus reposant et plus transparent (perspicuus, écrit Bernoulli AC p. 228) !

(34) Pour des références, on se reportera aux notes du texte de 1828, cité note 16 supra.

(35) Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités,* 5[e] éd., (1825), Paris, C. Bourgois, 1986.

(36) Dans ce qui suit, nous paraphrasons l'introduction du volume I de *La Gloire et la Croix,* op. cit. note (24) supra, notamment les pages 58-68.

(37) On verra par exemple, E. Bréhier, *La philosophie du Moyen Age*, Paris, Albin Michel, 1937, 1971, cinquième partie, chapitre III.

(38) *La Monadologie,* 1714, III 87.

(39) L'allusion à Platon et à l'apocatastase, peut être vue comme une référence (ironique ?) au salut universel des réformés de Zurich, mais aussi comme un pont entre l'ancienne philosophie et les mathématiques nouvelles, la physique mathématique étendue qui la complète.