Chtoucas de Drinfeld et Applications

L. Lafforgue

1. Programme de Drinfeld-Langlands

Drinfeld a introduit un certain nombre de variétés modulaires, d'abord celles classifiant les modules elliptiques puis celles classifiant les chtoucas dans le but de réaliser dans leur cohomologie la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions. Rappelons de quoi il s'agit.

On considère X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, F son corps des fonctions, $|X|$ l'ensemble des points fermés de X identifiés aux places de F et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F. Pour toute place $x \in |X|$, on note $\deg(x)$ le degré sur $\mathbb{F}_q$ de son corps résiduel, F_x le complété de F suivant la valuation associée $\deg_x$ et O_x l'anneau des entiers de F_x. Ainsi, $\mathbb{A}$ est le produit restreint des F_x relativement aux O_x et son anneau des entiers $O_{\mathbb{A}}$ est le produit des O_x.

Fixons un nombre premier ℓ ne divisant pas q et notons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Pour tout entier $r \geq 1$, soit Π_r l'espace des fonctions $\varphi : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ localement constantes à support compact modulo $\mathbb{A}^\times$, invariantes par un sous-groupe d'indice fini de $\mathbb{A}^\times$ et telles que pour tout sous-groupe parabolique non trivial P de GL_r on ait

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(n_P g) \cdot dn_P = 0 \ , \ \forall g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \ ,$$

pour N_P le radical unipotent de P et dn_P une mesure de Haar rationnelle sur $N_P(\mathbb{A})$. Le groupe $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ agit sur Π_r par translation à droite. La représentation Π_r est somme d'une famille $\{\pi\}_r$ de représentations irréductibles π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dites automorphes cuspidales. Chacune s'écrit de manière unique comme le produit restreint de représentations irréductibles π_x des groupes $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui, en toutes les places $x \in |X|$ sauf un nombre fini, sont non ramifiées au sens qu'elles ont un vecteur non nul invariant par $\mathrm{GL}_r(O_x)$; en ces places, il existe r nombres $z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, bien définis à permutation près, tels que π_x soit un sous-quotient de l'induite du caractère $z_1(\pi_x)^{\deg_x(\cdot)} \times \cdots \times z_r(\pi_x)^{\deg_x(\cdot)}$ de $\mathrm{GL}_1(F_x) \times \cdots \times \mathrm{GL}_1(F_x)$ (avec la normalisation unitaire après un choix de $\sqrt{q} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$).

Soit d'autre part $\{\sigma\}_r$ l'ensemble des représentations σ du groupe de Galois G_F de F, continues et irréductibles de dimension r sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, dont le déterminant est un caractère d'ordre fini et qui, en toutes les places $x \in |X|$ sauf un nombre fini, sont non ramifiées au sens que le sous-groupe d'inertie de x agit trivialement ; en chaque telle place x, les éléments de Frobenius induisent alors un automorphisme de l'espace sous-jacent à σ dont on note $\lambda_{1,x}(\sigma), \ldots, \lambda_{r,x}(\sigma)$ les valeurs propres.

Conjecture 1 (Langlands). — *Pour tout entier $r \geq 1$, on a :*

(i) *A toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \{\pi\}_r$, il est possible d'associer une unique représentation galoisienne $\sigma_\pi \in \{\sigma\}_r$ telle que, en toute place $x \in |X|$ où le facteur π_x est non ramifié, σ_π soit non ramifiée et*

$$\{\lambda_{1,x}(\sigma_\pi), \ldots, \lambda_{r,x}(\sigma_\pi)\} = \{z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)\} \ .$$

(ii) *Réproquement, pour toute $\sigma \in \{\sigma\}_r$, il existe une unique $\pi \in \{\pi\}_r$, non ramifiée partout où σ est non ramifiée et telle que $\sigma = \sigma_\pi$ au sens de* (i).

Conjecture 2 (Ramanujan-Petersson). — *Pour tout entier $r \geq 1$, toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \{\pi\}_r$ et toute place $x \in |X|$ où le facteur π_x est non ramifié, les nombres*

$$z_1(\pi_x), \ldots, z_r(\pi_x)$$

sont algébriques et de module 1 *après tout plongement dans $\mathbb{C}$.*

Quand $r = 1$, la conjecture 1 exprime la loi de réciprocité globale sur les corps de fonctions ; une démonstration géométrique en fut donnée par Lang et Rosenlicht (voir [S]). La conjecture 2 pour $r = 1$ est tautologique.

En rang r arbitraire, l'unicité dans la conjecture 1(i) résulte du théorème de densité de Čebotarev et l'unicité dans la conjecture 1(ii) est connue d'après le "théorème de multiplicité un fort".

On montre d'autre part en utilisant la théorie de Hecke inverse et l'équation fonctionnelle des fonctions L de Grothendieck que si la conjecture 1(i) est vraie en tous rangs $< r$, alors la conjecture 1(ii) l'est en tous rangs $\leq r$ (voir [Lau 1]).

L'étude de la cohomologie ℓ-adique des variétés modulaires de Drinfeld classifiant les modules elliptiques [resp. les chtoucas] de rang r permet d'attaquer les conjectures 1(i) et 2 en rang r arbitraire. Il s'agit d'identifier dans la cohomologie de ces variétés des morceaux de la forme $\pi \otimes \sigma_\pi$ [resp. $\pi \otimes \sigma_\pi \otimes \check{\sigma}_\pi$] avec π décrivant une partie de [resp. tout] l'ensemble $\{\pi\}_r$. Pour ce faire, on combine chaque fois le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, la formule des traces d'Arthur-Selberg et, pour la conjecture 2, le théorème de pureté de Deligne.

En étudiant la cohomologie à coefficients constants [resp. à coefficients dans certains systèmes locaux] des variétés de modules elliptiques de rang 2, Drinfeld a d'abord démontré les conjectures 1(i) et 2 quand $r = 2$ et l'une au moins des composantes π_x de π est la représentation de Steinberg [resp. est supercuspidale]. Ce travail a été généralisé en rang arbitraire par Laumon (voir [Lau 2]) [resp. par Flicker et Kazhdan (voir [FK])].

Après cela, Drinfeld a démontré la conjecture 2 puis la conjecture 1(i) pour $r = 2$ et sans restriction sur π en étudiant la cohomologie de certains ouverts de type fini des variétés de chtoucas de rang 2 (voir [D1] et [D2]) puis de compactifications de ces ouverts qu'il a construites (voir [D3]). D'ailleurs, la théorie des chtoucas de rang 1 reformule de façon particulièrement élégante la démonstration de Lang.

Enfin, Stuhler a défini une notion de D-module elliptique, pour D une algèbre centrale simple sur F, généralisant celle de module elliptique. L'étude des variétés modulaires associées a permis à Laumon, Rapoport et Stuhler de démontrer la correspondance de Langlands locale sur les corps de fonctions en tous rangs (voir [LRS]).

2. Chtoucas et conjecture de Ramanujan-Petersson

Rappelons la définition des chtoucas sur la courbe X.
Etant donné S un schéma (sur $\mathbb{F}_q$) et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{X\times S}$-Module localement libre de rang r sur $X \times S$, on appelle modification (à droite) de $\mathcal{E}$ tout diagramme $(\mathcal{E} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{t}{\hookleftarrow} \mathcal{E}'')$ où $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ sont aussi des fibrés localement libres de rang r sur $X \times S$ et j, t sont des homomorphismes injectifs dont les conoyaux sont supportés par les graphes de deux morphismes "pôle" $\infty : S \to X$ et "zéro" $0 : S \to X$ et inversibles comme $\mathcal{O}_S$-Modules.
Notant Frob_S l'endomorphisme de Frobenius d'élévation à la puissance q dans tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$, on appelle chtouca de rang r sur S la donnée d'un $\mathcal{O}_{X\times S}$-Module $\mathcal{E}$ localement libre de rang r sur $X \times S$, d'une modification $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'')$ de $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme ${}^{\tau}\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$.
En associant à tout schéma S le groupoïde des chtoucas de rang r sur S, on définit un champ Cht^r qui est algébrique au sens de Deligne-Mumford. Comme tout chtouca a par définition un "zéro" et un "pôle", le champ Cht^r est muni d'un morphisme sur $X \times X$ qui s'avère lisse (et en particulier localement de type fini) de dimension relative $2r - 2$.
Si maintenant $N = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_N \hookrightarrow X$ est un sous-schéma fermé fini de la courbe X, on appelle structure de niveau N sur un chtouca $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \cong {}^{\tau}\mathcal{E})$ de rang r sur un schéma S dont le zéro et le pôle évitent N tout isomorphisme $g : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^r_{N\times S}$ tel que $\tau(g) = g \circ u$ où $u : {}^{\tau}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ est l'isomorphisme induit. Le champ Cht^r_N des chtoucas de rang r avec structure de niveau N est algébrique au sens de Deligne-Mumford. Le morphisme d'oubli $\mathrm{Cht}^r_N \to \mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} (X - N) \times (X - N)$ est représentable fini étale galoisien de groupe $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.
Notons K_N le noyau de chacun des homomorphismes surjectifs $\mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}}) \to \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$. Prolongeant l'action de $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$, les doubles classes de $K_N \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K_N$ induisent des correspondances dans les Cht^r_N compatibles avec les projections sur $X \times X$. Ce sont les correspondances de Hecke.
D'autre part, Cht^r et les Cht^r_N sont munis d'endomorphismes dits "de Frobenius partiels" Frob_0 et Frob_∞ qui relèvent $\mathrm{Frob}_X \times \mathrm{Id}_X$ et $\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_X$, dont les composés dans un sens ou dans l'autre sont les endomorphismes de Frobenius et qui commutent avec les correspondances de Hecke. D'après la proposition suivante, leur existence fait que la cohomologie ℓ-adique de $\varprojlim_N \mathrm{Cht}^r_N$ sur le point générique de $X \times X$ est munie d'une action de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \mathrm{G}_F \times \mathrm{G}_F$:

Proposition (Drinfeld). — *Pour tout ouvert X' de X et notant $\pi(X')$ et $\pi(X' \times X')$ les groupes fondamentaux de X' et $X' \times X'$, il y a équivalencce entre la catégorie des représentations continues de $\pi(X') \times \pi(X')$ et celle des* *représentations continues H de $\pi(X' \times X')$ qui sont munies d'un isomorphisme équivariant* $(\mathrm{Frob}_{X'} \times \mathrm{Id}_{X'})^* H \cong H$.

De voir cette cohomologie comme une représentation de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \times \mathrm{G}_F \times \mathrm{G}_F$ donne un sens à la conjecture qu'elle contient comme facteurs irréductibles les $\pi \otimes \sigma_\pi \otimes \check{\sigma}_\pi$ avec π décrivant $\{\pi\}_r$.

Afin de calculer la cohomologie d'une variété définie en termes modulaires, on dispose du théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. Mais comme Cht^r n'est pas quasi-compact ni même ses composantes connexes quand $r \geq 2$, ce théorème ne peut s'appliquer dans Chr^r (et les Chr^r_N) qu'à des ouverts de type fini qu'il faut donc définir. On le fait en tronquant par le polygone canonique de Harder-Narasimhan (voir [L1]) :
Si $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' = {}^\tau\mathcal{E})$ est un chtouca de rang r sur un corps, on appelle sous-objet $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ tout couple de sous-fibrés $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ tels que $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$, ${}^\tau\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ induisent deux homomorphismes $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$, ${}^\tau\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'$ génériquement bijectifs. Un tel sous-objet a un rang $\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{rg}\mathcal{F} = \mathrm{rg}\mathcal{F}'$ et il a par exemple le degré $\deg \widetilde{\mathcal{F}} = \deg \mathcal{F}$. A toute filtration $0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_i \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_k = \widetilde{\mathcal{E}}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ par des sous-objets, on peut associer son polygone c'est-à-dire l'unique application $[0,r] \to \mathbb{R}$ affine sur les intervalles $[\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}_{i-1}, \mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}_i]$ et qui vaut $\deg \widetilde{\mathcal{F}}_i - \frac{\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}_i}{r} \deg \widetilde{\mathcal{E}}$ en chaque $\mathrm{rg}\widetilde{\mathcal{F}}_i$. La famille des polygones de toutes les filtrations de $\widetilde{\mathcal{E}}$ a un plus grand élément qu'on appelle le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\widetilde{\mathcal{E}}$.
Pour tout entier $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$, les chtoucas de rang r, de degré d et dont le polygone canonique est majoré par p sont les points d'un ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ de Cht^r. Cet ouvert est de type fini et il en est de même des $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_N = \mathrm{Cht}^{r,d,p} \times_{\mathrm{Cht}^r} \mathrm{Cht}^r_N$.
Les $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_N$ ne sont plus stables par les correspondances de Hecke ni par les endomorphismes de Frobenius partiels mais on peut malgré tout considérer l'action sur leur cohomologie des puissances de l'endomorphisme de Frobenius et leur appliquer le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. Le lien avec la formule des traces d'Arthur-Selberg s'établit en montrant en particulier que lorsqu'on identifie le quotient $\mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/ \mathrm{GL}_r(O_{\mathbb{A}})$ avec le groupoïde des fibrés de rang r sur la courbe X, les troncatures d'Arthur sur les groupes adéliques correspondent exactement aux troncatures par le polygone canonique de Harder-Narasimhan des fibrés. Pour $0, \infty \in |X|$ deux places distinctes, u un multiple commun de $\deg(0)$ et $\deg(\infty)$ et $\pi \in \{\pi\}_r$ une représentation automorphe cuspidale non ramifiée en 0 et ∞, les nombres $q^{(r-1)u} z_i(\pi_0)^{\frac{u}{\deg(0)}} z_j(\pi_\infty)^{\frac{-u}{\deg(\infty)}}$, $1 \leq i,j \leq r$, apparaissent parmi les valeurs propres de Frob^u agissant sur la cohomologie des fibres des ouverts $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_N$ au-dessus des points de $X \times X$ supportés par $(0,\infty)$ et on peut leur appliquer le théorème de pureté de Deligne. On obtient (voir [L1]) :

Théorème. — (i) *Pour tout entier $r \geq 1$ et toute représentation automorphe cuspidale $\pi \in \{\pi\}_r$, on a :*

- *Si r est impair, π vérifie la conjecture 2 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$.*
- *Si r est pair, ou bien π vérifie la conjecture 2 et on pose $\varepsilon_\pi = 0$, ou bien pour toute place x où π est non ramifiée et tout isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$, la*

moitié des $z_i(\pi_x)$, $1 \leq i \leq r$, *sont de module* $q^{\frac{1}{4}\deg(x)}$ *et l'autre moitié de module* $q^{-\frac{1}{4}\deg(x)}$ *et on pose* $\varepsilon_\pi = \frac{1}{4}$.

(ii) *Pour deux telles représentations* $\pi \in \{\pi\}_r$, $\pi' \in \{\pi\}_{r'}$, *tous les zéros de la fonction de Rankin-Selberg* $L(s, \pi \otimes \check{\pi}')$ *sont sur la droite* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ *si* $\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi'}$ *et sur les droites* $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Re}\, s = \frac{3}{4}$ *si* $\varepsilon_\pi \neq \varepsilon_{\pi'}$.

3. Compactifications

En passant des Cht_N^r aux ouverts de type fini $\mathrm{Cht}_N^{r,d,p}$, nous avons perdu l'action des correspondances de Hecke et des endomorphismes de Frobenius partiels. Afin de la retrouver, nous construisons des compactifications des $\mathrm{Cht}_N^{r,d,p}$, comme Drinfeld a fait en rang $r = 2$.

a) Dégénérescence des chtoucas sans structures de niveau

L'idée est d'élargir la notion de chtoucas en remplaçant dans leurs diagrammes de définition ($\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \cong {}^\tau\mathcal{E}$) les isomorphismes ${}^\tau\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$ par les "homomorphismes complets".

Le schéma Ω^r des homomorphismes complets est celui déduit du schéma des matrices carrées non nulles de rang r en éclatant les $r-1$ fermés des matrices de rang $\leq 1, \leq 2, \ldots, \leq r-1$. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_r^2 / \mathbb{G}_m$ et son quotient $\overline{\Omega}^r$ par l'action du centre $\mathbb{G}_m^2/\mathbb{G}_m$ est le compactifié de De Concini et Procesi de $\mathrm{PGL}_r^2 / \mathrm{PGL}_r$.

Soit $\mathcal{P}^r$ le champ torique quotient de l'espace affine $\mathbb{A}^{r-1}$ par $\mathbb{G}_m^{r-1}$. Ses points correspondent aux orbites de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ agissant sur $\mathbb{A}^{r-1}$; celles-ci sont indexées par les partitions $\underline{r} = (0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = r)$ de l'entier r et chacune contient le point distingué $\alpha_{\underline{r}}$ dont la s-ième coordonnée, $1 \leq s < r$, vaut 0 si $s \in \underline{r}$ et 1 si $s \notin \underline{r}$. Le schéma Ω^r est muni d'un morphisme lisse de dimension relative r^2 sur $\mathcal{P}^r$ et sa fibre $\Omega^r_{\underline{r}}$ au-dessus de chaque $\alpha_{\underline{r}}$ classifie les familles constituées d'une filtration croissante (E_s) de $\mathbb{A}^r$ par des sous-espaces de dimension s, $s \in \underline{r}$, d'une filtration décroissante $(\overline{E}_s)$ de $\mathbb{A}^r$ par des sous-espaces de codimension s, $s \in \underline{r}$, et d'isomorphismes $\overline{E}_{s^-}/\overline{E}_s \xrightarrow{\sim} E_s/E_{s^-}$ où s^- désigne le prédécesseur de tout élément $s > 0$ de $\underline{r}$.

On appelle chtouca itéré de rang r sur un schéma S la donnée d'un $\mathcal{O}_{X\times S}$-Module $\mathcal{E}$ localement libre de rang r, d'une modification ($\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$) de celui-ci et d'un homomorphisme complet ${}^\tau\mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}''$ sur $X \times S$ dont le point image dans $\mathcal{P}^r$ provient d'un point à valeurs dans S et qui est soumis à certaines conditions ouvertes. Le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ des chtoucas itérés de rang r est algébrique au sens de Deligne-Mumford (mais non séparé) et localement de type fini sur $X \times X \times \mathcal{P}^r$.

Pour $\underline{r} = (0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = r)$ une partition de r, soit $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ le champ des familles de chtoucas de rangs $s - s^-$, $s \in \underline{r}$, $s > 0$, tels que le zéro de chacun soit égal au pôle du suivant ; il est lisse de dimension relative $2r - 2k$ sur $X \times X \times X^{k-1}$. La fibre $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$ de $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ au-dessus du point $\mathbb{G}_m^{r-1}\backslash\mathbb{G}_m^{r-1}\alpha_{\underline{r}}$ de $\mathcal{P}^r$ est munie d'un morphisme fini, surjectif et radiciel sur $\mathrm{Cht}^{\underline{r}}$ (d'où le nom de "chtoucas itérés").

Disons qu'un polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ est T-grand, pour $T \geq 0$ une constante, si $[p(r'+1) - p(r')] - [p(r') - p(r'-1)] \geq T$, $1 \leq r' < r$. On a (voir [L2]) :

THÉORÈME. — *A tout entier $d \in \mathbb{Z}$ et tout polygone 2-grand $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ on peut associer un ouvert $\overline{\mathrm{Chr}}^{r,d,p}$ de $\overline{\mathrm{Cht}}^r$ dont la trace dans l'ouvert Cht^r est $\mathrm{Chr}^{r,d,p}$ et qui est propre (en particulier séparé et de type fini) sur $X \times X$.*
Si de plus p est T_X-grand, pour $T_X \geq 2$ une constante ne dépendant que de X, $\overline{\mathrm{Chr}}^{r,d,p}$ est lisse de dimension relative $2r - 2$ sur $X \times X \times \mathcal{P}^r$.

Cette construction généralise celle de Drinfeld en rang $r = 2$.

B) DÉGÉNÉRESCENCE DES STRUCTURES DE NIVEAU DES CHTOUCAS

En rang $r = 2$, Drinfeld a compactifié les variétés de chtoucas avec structures de niveau N en prenant simplement les normalisations dans le corps des fonctions de Cht_N^r des compactifications sans structures de niveau. En rang arbitraire, nous procédons différemment afin de garder une description modulaire et un contrôle sur les singularités.

COMPACTIFICATION DU CLASSIFIANT DE PGL_r : Considérant de façon générale $N = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_N$ un schéma fini sur $\mathbb{F}_q$ et $N_0 = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{N_0}$ le schéma réduit associé, on note GL_r^N et $\mathbb{G}_m^{N_0}$ les groupes algébriques déduits de GL_r et $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires à la Weil de $\mathcal{O}_N$ et $\mathcal{O}_{N_0}$ à $\mathbb{F}_q$ et aussi $\overline{\mathrm{GL}}_r^N = \mathrm{GL}_r^N / \mathbb{G}_m^{N_0}$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous construisons (voir [L3] et [L4]) une compactification équivariante $\overline{\Omega}^{r,N,n}$ du quotient diagonal $(\overline{\mathrm{GL}}_r^N)^{n+1} / \overline{\mathrm{GL}}_r^N$ qui est lisse au-dessus du champ $\mathcal{P}^{r,N,n}$ quotient d'une variété torique $\mathcal{A}^{r,N,n}$ par son tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N,n}$. Les points de ce champ torique c'est-à-dire les orbites de $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N,n}$ agissant sur $\mathcal{A}^{r,N,n}$ sont naturellement indexées par une famille de pavages d'un polyèdre convexe $S^{r,N,n}$ (qui est le simplexe $\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} | x_0 + \cdots + x_n = r\}$ quand $\mathcal{O}_N = \mathbb{F}_q$) et ce de telle façon qu'une orbite est dans l'adhérence d'une autre si et seulement si son pavage associé raffine celui de l'autre.
Il y a sur chaque $\overline{\Omega}^{r,N,n}$ un torseur $\Omega^{r,N,n}$ pour le tore $(\mathbb{G}_m^{N_0})^{n+1} / \mathbb{G}_m^{N_0}$ muni d'une action compatible de $(\mathrm{GL}_r^N)^{n+1}$ et dont la restriction à l'ouvert $(\overline{\mathrm{GL}}_r^N)^{n+1} / \overline{\mathrm{GL}}_r^N$ est $(\mathrm{GL}_r^N)^{n+1} / \mathrm{GL}_r^N$. Les fibres de $\Omega^{r,N,n}$ au-dessus des points de $\mathcal{P}^{r,N,n}$ ont une description modulaire en termes des pavages de $S^{r,N,n}$ associés à ces points qui généralise celle des fibres $\Omega_{\underline{r}}^r$ de Ω^r.
Les applications $\iota : \{0, 1, \ldots, m\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ induisent des morphismes $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N,n} \to \mathcal{A}_\emptyset^{r,N,m}$, $\mathcal{A}^{r,N,n} \to \mathcal{A}^{r,N,m}$ et $\Omega^{r,N,n} \to \Omega^{r,N,m}$ compatibles entre eux et avec les $(\mathrm{GL}_r^N)^{n+1} \to (\mathrm{GL}_r^N)^{m+1}$ si bien que les $\Omega^{r,N,n}$ constituent un schéma simplicial qui prolonge le classifiant $((\mathrm{GL}_r^N)^{n+1} / \mathrm{GL}_r^N)_{n \geq 1}$ du groupe GL_r^N et que les $\overline{\Omega}^{r,N,n}$ réalisent une sorte de compactification du classifiant de $\overline{\mathrm{GL}}_r^N$. Quand ι est injective, le morphisme induit $\Omega^{r,N,n} \to \Omega^{r,N,m} \times_{\mathcal{P}^{r,N,m}} \mathcal{P}^{r,N,n}$ est lisse.

APPLICATION AUX CHTOUCAS : Faisons le lien avec les chtoucas :

LEMME. — *Etant donné $N \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé fini de X, faisons agir GL_r^N sur $\Omega^{r,N,n}$ via l'action de $(\mathrm{GL}_r^N)^2$ et le plongement $\mathrm{GL}_r^N \hookrightarrow (\mathrm{GL}_r^N)^2$, $g \mapsto (\tau(g), g)$.*
Alors le foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ définit un morphisme

$$\overline{\mathrm{Cht}^r} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) \to \mathrm{GL}_r^N \backslash \Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{P}^{r,N,1}} \mathcal{P}^r$$

et pour tout entier d et tout polygone T_X-grand p, le morphisme induit

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N) \to \mathrm{GL}_r^N \backslash \Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{P}^{r,N,1}} \mathcal{P}^r \times (X\times X)$$

est lisse.

Notons p_0, p_1, p_2 les morphismes $\Omega^{r,N,2} \to \Omega^{r,N,1}$ ou $\mathcal{A}^{r,N,2} \to \mathcal{A}^{r,N,1}$ induits par les trois injections croissantes $\{0,1\} \to \{0,1,2\}$ d'images $\{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1\}$.
Dans la catégorie des variétés toriques et de leurs morphismes équivariants, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{r-1} \arrow[r] & \mathcal{A}^{r,N,1} \\ \mathcal{A}^{r,N,2} \arrow[ur, "p_2"] \arrow[r, shift left, "\tau\circ p_1"] \arrow[r, shift right, "p_0"'] & \mathcal{A}^{r,N,1} \end{tikzcd}$$

a une limite projective $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ de tore $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N,\tau}$. Notant $\mathcal{P}^{r,N,\tau}$ le champ torique quotient de $\mathcal{A}^{r,N,\tau}$ par $\mathcal{A}_\emptyset^{r,N,\tau}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Omega^{r,N,2} \times_{\mathcal{P}^{r,N,2}} \mathcal{P}^{r,N,\tau} \arrow[r, shift left, "\tau\circ p_1"] \arrow[r, shift right, "p_0"'] & \Omega^{r,N,1} \end{tikzcd}$$

a un noyau $\Omega^{r,N,\tau}$ qui est lisse sur $\mathcal{P}^{r,N,\tau}$ puisque $p_0 : \Omega^{r,N,2} \to \Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{P}^{r,N,1}} \mathcal{P}^{r,N,2}$ est lisse. De plus, $p_2 : \Omega^{r,N,\tau} \to \Omega^{r,N,1} \times_{\mathcal{P}^{r,N,1}} \mathcal{P}^r$ est représentable et projectif et sa restriction au-dessus de $(\mathrm{GL}_r^N)^2/\,\mathrm{GL}_r^N \cong \mathrm{GL}_r^N$ est l'isogénie de Lang $g \mapsto g^{-1} \circ \tau(g)$.
Pour tout entier d et tout polygone T_X-grand p, le produit fibré

$$\overline{\mathrm{Cht}_N^{r,d,p}} = (\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)) \times_{\mathrm{GL}_r^N \backslash \Omega^{r,N,1} \times \mathcal{P}^r} \mathrm{GL}_r^N \backslash \Omega^{r,N,\tau}$$

est donc représentable et projectif sur $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$. Sa restriction au-dessus de l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ est $\mathrm{Cht}_N^{r,d,p}$. Et d'après le lemme, il est lisse sur $X \times X \times \mathcal{P}^{r,N,\tau}$.

Références bibliographiques

[D1] V.G. Drinfeld, "Varieties of modules of F-sheaves", p. 107-122, Funct. Anal. and its Appl. 21, 1987.

[D2] V.G. Drinfeld, "The proof of Petersson's conjecture for GL(2) over a global field of characteristic p", p. 28-43, Funct. Anal. and its Appl. 22, 1988.

[D3] V.G. Drinfeld, "Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2", p. 1789-1821, J. of Soviet Math. 46, 1989.

[FK] Y. Flicker et D. Kazhdan, "Geometric Ramanujan conjecture and Drinfeld reciprocity law", p. 201-218, dans "Number theory, trace formula and discrete groups", Academic Press, 1989.

[L1] L. Lafforgue, "Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson", Astérisque 243, SMF, 1997.

[L2] L. Lafforgue, "Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld", à paraître dans le Journal of the AMS.

[L3] L. Lafforgue, "Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1} / \mathrm{PGL}_r$", prépublication d'Orsay, 1998.

[L4] L. Lafforgue, "Compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1} / \mathrm{PGL}_r$ et restriction des scalaires à la Weil", prépublication d'Orsay, 1998.

[Lau 1] G. Laumon, "Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil", p. 131-210, Publ. Math. I.H.E.S. 65, 1987.

[Lau 2] G. Laumon, "Cohomology of Drinfeld Modular Varieties I, II", Cambridge University Press, 1996-97.

[LRS] G. Laumon, M. Rapoport et U. Stuhler "D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence", p. 217-338, Inv. Math. 113, 1993.

[S] J.-P. Serre, "Groupes algébriques et corps de classes", Hermannn, 1959.

Laurent Lafforgue
Mathématique
Université Paris-Sud
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
France