# Liberté et accumulation

Emmanuel Peyre[1]

Received: May 5, 2016
Revised: July 4, 2017

Communicated by Takeshi Saito

Résumé. Le principe de Batyrev et Manin et ses variantes donnent une interprétation conjecturale précise pour le terme dominant du nombre de points de hauteur bornée d'une variété algébrique dont l'opposé du faisceau canonique est suffisamment positif. Comme l'a clairement montré le contre-exemple de Batyrev et Tschinkel la mise en œuvre de ce principe nécessite l'exclusion de domaines d'accumulation qui sont le plus souvent déterminés en procédant par récurrence sur la dimension de la variété. Cette méthode ne donne cependant pas de critère direct permettant de dire si un point rationnel donné doit être exclu ou pas. L'ambition de cet article est de définir une mesure de la liberté d'un point rationnel de sorte que les points d'une liberté suffisante se répartissent effectivement de manière uniforme sur la variété, c'est-à-dire qu'ils soient distribués sur l'espace adélique associé à la variété conformément à la mesure de distribution adélique introduite dans un article antérieur de l'auteur. De ce point de vue, les points assez libres devraient être ceux qui respectent le principe de Batyrev et Manin.

Classification mathématique par sujets (2000) : 11D45, 11G50, 14G40
Mots clefs : Programme de Manin, Points de hauteur bornée, Pentes.

Table des matières



[1]Je remercie l'université Grenoble Alpes, le CNRS, l'Institute for Advanced Studies de l'université de Bristol et le projet ANR GARDIO pour leur soutien durant la rédaction de cet article

## 1. Introduction

Le programme développé par Y. I. Manin et ses collaborateurs dans les années 1980 ([BM] et [FMT]) a permis une compréhension en profondeur du comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée sur les variétés algébriques et en particulier sur les variétés dont l'opposé du faisceau canonique est suffisamment positif, telles que les variétés de Fano.

Un des points-clefs de ce programme est le concept de sous-variété accumulatrice [BM, p. 30], qu'on peut décrire, au sens le plus faible, comme une sous-variété stricte de la variété considérée dont la contribution au nombre total de points sur la variété n'est pas négligeable. Lorsque la hauteur choisie n'est pas relative à l'opposé du faisceau canonique, la variété peut être réunion de telles sous-variétés, c'est ainsi le cas pour le produit de deux droites projectives, cette situation est décrite plus en détail par V. V. Batyrev et Y. Tschinkel dans [BT3]. Supposons maintenant que la hauteur est relative à l'opposé du fibré canonique. Le contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel à la question initiale de V. V. Batyrev et Y. I. Manin [BT2] montre que, même dans le cas d'une variété de Fano, la réunion de ces sous-variétés peut, en général, être Zariski dense. Différentes études basées sur la géométrie des variétés ont révélé que cette situation est en fait très générale ([LTT] et [BL]).

L'esprit du programme de Manin est qu'en dehors de ces sous-variétés accumulatrices, le comportement asymptotique du nombre de points de hauteur bornée s'interprète en termes d'invariants globaux de la variété. Dans [Ru], C. Le Rudulier fait sauter un verrou supplémentaire en démontrant que sur certains espaces de Hilbert les sous-variétés accumulatrices au sens précédent sont denses pour la topologie de Zariski, mais le nombre de points de hauteur bornée sur le complémentaire se comporte de la façon espérée. Comme nous le verrons plus loin, C. Le Rudulier donne également un exemple d'un ensemble mince faiblement accumulateur qui ne s'obtient pas à partir d'une réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices.

Dans [Pe1, §3], nous allions plus loin sur la question de la distribution asymptotique, en construisant une mesure de probabilité sur l'espace adélique correspondant à la variété, qui donnerait conjecturalement la distribution asymptotique des points de hauteur bornée en dehors des sous-variétés accumulatrices. Notons au passage que pour cette mesure, les points adéliques d'une sous-variété stricte forment un ensemble de mesure nulle, il en résulte que cette distribution asymptotique ne saurait être valable que sur le complémentaire des sous-variétés accumulatrices au sens précédent.

La méthode décrite dès l'article de V. V. Batyrev et Y. I. Manin pour trouver les sous-variétés accumulatrices est de procéder par réccurence sur la dimension des sous-variétés. En effet, si l'on note $B$ la borne choisie pour la hauteur, le comportement asymptotique attendu sur une variété $V$ en dehors des sous-variétés accumulatrices est de la forme $CB^a\log(V)^{b-1}$, où $a$ et $b$ ont des interprétations géométriques. À partir de ces invariants géométriques, on peut donc définir une notion de sous-variétés *géométriquement* accumulatrices : ce sont celles pour lequel la prédiction pour le nombre de points de la sous-variété est au moins du même ordre de grandeur que celui prédit pour la variété dans son ensemble. Cette approche s'est révelé très efficace dans la plupart des cas connus jusqu'à aujourd'hui.
Toutefois, elle a l'inconvénient de ne pas donner de critère permettant de déterminer directement si un point rationnel donné doit être exclu du dénombrement. Il est alors enrichissant de comparer cette situation avec l'analogue géométrique. Dans l'étude des espaces de morphismes d'une courbe dans une variété donnée, il convient de considérer les morphismes très libres dont les déformations permettent de couvrir la variété. Ces morphismes sont aisément caractérisés à l'aide des pentes de l'image inverse du fibré tangent sur la courbe. Or la géométrie d'Arakelov et notamment la théorie des pentes développée par J.-B. Bost fournissent un analogue arithmétique à ces pentes. Toutefois, comme toujours dans cette traduction, l'invariant obtenu au lieu d'être entier est réel et on peut donc être confronté à des situations où la pente minimale d'une famille de points rationnels tend vers 0.
L'ambition de ce texte est donc d'utiliser les pentes de la géométrie d'Arakelov pour définir un invariant qui mesure la *liberté* d'un point rationnel. L'invariant que nous construisons est un élément de l'interval réel $[0,1]$. Il fait intervenir le choix d'une métrique adélique dont on munit la variété, métrique qui est l'analogue dans notre cadre adélique d'une métrique riemannienne. Dans les exemples étudiés, nous montrons que les points qu'il convient d'exclure ont une liberté qui tend vers 0 lorsque leur hauteur tend vers $+\infty$, ce qui permet d'énoncer une variante de la conjecture raffinée de Batyrev et Manin qui ne semble pas en contradiction avec les exemples considérés ici.
Certes, il convient de relativiser les progrès que permettent ce nouvel invariant en raison de la difficulté de sa détermination en général ; néanmoins c'est un invariant très naturel et les quelques indices qui suivent confirment sa capacité à détecter une obstruction à la distribution uniforme des points rationnels.
Ce texte est organisé de la façon suivante : on commence par fixer le cadre géométrique, avant de préciser la notion de métrique adélique. Le paragraphe suivant consiste en des rappels sur les notions de pentes, ce qui nous permet de définir l'invariant qui est l'objet de cet article. Nous en donnons ensuite quelques propriétés élémentaires avant d'introduire une nouvelle variante du principe de Batyrev et Manin, la formule empirique (F). Le reste de l'article est consacré à l'application de la notion de liberté à divers exemples ou contre-exemples connus : l'espace projectif, le produit de variétés, les quadriques, le

contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel ainsi que ceux de C. Le Rudulier.

Je remercie T. Browning, É. Gaudron et D. Loughran pour plusieures discussions et suggestions qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

## 2. Cadre

On fixe un corps de nombres $\mathbf{K}$. Pour toute $\mathbf{K}$-algèbre commutative $A$ et toute variété $V$ sur $\mathbf{K}$, on note $V_A$ le produit schématique $V \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})} \mathrm{Spec}(A)$ et $V(A)$ l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{K})}(\mathrm{Spec}(A), V)$ des $A$-points de $V$.

On note $\mathrm{Val}(\mathbf{K})$ l'ensemble des places du corps de nombres $\mathbf{K}$. Soit $w$ une place de $\mathbf{K}$. On note $\mathbf{K}_w$ le complété de $\mathbf{K}$ pour $w$. Soit $v$ la place de $\mathbf{Q}$ déduite de $w$ par restriction, on pose

$$|x|_w = |N_{\mathbf{K}_w/\mathbf{Q}_v}(x)|_v$$

pour $x \in \mathbf{K}_w$. Si $\mathbf{K}_w$ est isomorphe au corps des complexes, $|\cdot|_w$ correspond au carré du module, sinon l'application $|\cdot|_w$ est une valeur absolue représentant $w$. Cette normalisation permet d'écrire la formule du produit pour $\mathbf{K}$ sous la forme

$$\prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} |x|_w = 1 \tag{1}$$

pour $x \in \mathbf{K}^\times$.

CONVENTION 2.1. Dans la suite, on ne considère que de *belles* variétés sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire des variétés projectives lisses et géométriquement intègres sur le corps de nombres $\mathbf{K}$.

## 3. Métriques adéliques

3.1. NORMES $w$-ADIQUES. Nous introduisons maintenant une notion de *norme classique* sur les espaces vectoriels sur les complétés du corps de nombres $\mathbf{K}$.

DÉFINITION 3.1. Soit $w$ une place de $\mathbf{K}$. Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps complété $\mathbf{K}_w$. Dans ce texte, on appelle *norme $w$-adique* une application $\|\cdot\|_w : x \mapsto \|x\|_w$ de $E$ dans $\mathbf{R}$ qui vérifie les conditions suivantes

(i) On a la relation $\|\lambda x\|_w = |\lambda|_w \, \|x\|_w$ pour $\lambda \in \mathbf{K}_w$ et $x \in E$ ;

(ii) Si $w$ est une place ultramétrique, alors on a l'inégalité $\|x+y\|_w \leqslant \max(\|x\|_w, \|y\|_w)$ pour $x, y \in E$ ;

(iii) Si $w$ est une place réelle, alors $\|x+y\|_w \leqslant \|x\|_w + \|y\|_w$ ;

(iv) Enfin, si $w$ est complexe, alors $\|x+y\|_w^{1/2} \leqslant \|x\|_w^{1/2} + \|y\|_w^{1/2}$ ;

Nous dirons que cette norme est *classique* si elle vérifie en outre les conditions suivantes :

(ii′) Si $w$ est ultramétrique, l'image de $\|\cdot\|_w$ est contenue dans l'image de la valeur absolue $|\cdot|_w$ ;

(iii′) Si $w$ est réelle, il existe une forme quadratique définie positive $q$ sur $E$ telle que $\|x\|_w = \sqrt{q(x)}$ ;

(iv′) Si $w$ est complexe, il existe une forme hermitienne définie positive $\varphi$ sur $E$ telle que $\|x\|_w = \varphi(x,x)$.

*Remarque* 3.2. On notera que pour une place ultramétrique $w$, la donnée d'une norme classique $\|\cdot\|_w$ sur un $\mathbf{K}_w$-espace vectoriel $E$ est équivalente à la donnée du $\mathscr{O}_w$-module

$$\mathscr{E} = \{\, x \in E \mid \|x\|_w \leqslant 1 \,\},$$

qui est libre de rang la dimension de $E$. En outre, pour tout $x \in E$, on a dans ce cas l'égalité

$$\|x\|_w = \min\{|\lambda|_w^{-1},\ \lambda \in \mathbf{K}_w - \{0\} \text{ tels que } \lambda x \in \mathscr{E}\}.$$

3.2. Normes adéliques. Dans ce paragraphe, la lettre $V$ désigne une *belle* variété sur $\mathbf{K}$. Du point de vue de la géométrie d'Arakelov, une hauteur va être définie à partir d'un fibré en droites muni de normes.

Définition 3.3. Soit $E$ un fibré vectoriel sur $V$. On note $\pi : E \to V$ son morphisme structural. Pour toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ et tout $x \in V(\mathbf{L})$, on note $E(x)$ le $\mathbf{L}$-espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$. Soit $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. Une *norme $w$-adique* sur $E$ est une application $\|\cdot\|_w : x \mapsto \|x\|_w$ de $E(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$, la restriction de $\|\cdot\|_w$ à $E(x)$ est une norme $w$-adique.

(ii) Pour tout ouvert $U$ de $V$ et toute section $s$ de $E$ sur $U$, l'application de $U(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \|s(x)\|_w$ est continue pour la topologie $w$-adique.

Cette norme $\|\cdot\|_w$ est dite *classique* si sa restriction à $E(x)$ est classique pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$.

*Exemple* 3.4. On suppose donné un *modèle* de $V$ sur $\mathscr{O}_w$, c'est-à-dire un schéma $\mathscr{V}$ projectif et lisse sur $\mathscr{O}_w$ muni d'un isomorphisme de $\mathscr{V}_{\mathbf{K}_w}$ sur $V_{\mathbf{K}_w}$ et un modèle de $E$ au-dessus de $\mathscr{V}$, c'est-à-dire un fibré vectoriel $\mathscr{E}$ au-dessus de $\mathscr{V}$ muni d'un isomorphisme de fibrés vectoriels de $\mathscr{E}_{\mathbf{K}_w}$ sur $E_{\mathbf{K}_w}$. Alors, comme $\mathscr{V}$ est projective, l'application naturelle de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_w)$ dans $V(\mathbf{K}_w)$ est bijective. Soit $x \in V(\mathbf{K}_w)$. Soit $\tilde{x}$ le point correspondant de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_w)$. Alors $\tilde{x}^*(\mathscr{E})$ définit un sous-$\mathscr{O}_w$-module de $E(x)$, que l'on notera $\mathscr{E}(x)$, qui est libre de rang la dimension de $E(x)$. Par la remarque 3.2, cela définit une norme classique sur $E(x)$. On obtient ainsi une norme $w$-adique classique sur $E$ qu'on dira *associée au modèle* $\mathscr{E}$ de $E$.

Définition 3.5. Soit $E$ un fibré vectoriel au-dessus de $V$. Une *norme adélique* sur $E$ est une famille $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$, où $\|\cdot\|_w$ est une norme $w$-adique sur $E$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, de sorte que la condition suivante soit vérifiée : il existe un ensemble fini de places $S$ et un modèle $\mathscr{E}$ de $E$ sur l'anneau $\mathscr{O}_S$ des $S$-entiers tels que pour toute place $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) - S$, la norme $\|\cdot\|_w$ soit la norme associée à $\mathscr{E}_{\mathscr{O}_w}$. On dira que cette norme adélique est *classique* si toutes les normes $\|\cdot\|_w$ sont classiques.
Un *fibré vectoriel (*resp. *fibré en droites) adéliquement normé* sur $V$ est la donnée d'un fibré vectoriel (resp. un fibré en droites) $E$ au-dessus de $V$,

muni d'une norme adélique. Un *fibré adélique* désigne, dans ce texte, un fibré adéliquement normé dont la norme est classique.
Dans ce texte, nous réserverons la terminologie ≪ *métrique adélique sur* $V$ ≫[2] à la donnée d'un norme adélique classique sur le fibré tangent $TV$ de $V$.

*Exemples* 3.6. a) Le fibré en droites trivial $V \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{K}}$, muni des normes naturelles $\|\cdot\|_w$ définies par $(x,\lambda) \mapsto |\lambda|_w$ pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ est un fibré vectoriel adéliquement normé qu'on dira également trivial. Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des familles $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$, où $f_w$ est une application continue de $V(\mathbf{K}_w)$ dans $\mathbf{R}_{>0}$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, et où $f_w$ est constante de valeur de 1 en dehors d'un ensemble fini de places. Alors l'application qui à un élément $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$ de $\mathscr{F}$ associe la famille $(f_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ est une bijection de $\mathscr{F}$ sur les normes adéliques sur le fibré en droites trivial.
b) Plus généralement, soit $L$ un fibré en droites et soit $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ une norme adélique sur $L$. Toute norme adélique sur le fibré $L$ est de la forme $(f_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ pour une unique famille $(f_w)_{w\in\mathbf{K}}$ de $\mathscr{F}$. Cela découle du fait que si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont des modèles d'un fibré vectoriel $E$ sur un anneau de $S$-entiers $\mathscr{O}_S$, alors il existe un ensemble fini de places $S'$ contenant $S$ de sorte que l'isomorphisme de $\mathscr{E}_{\mathbf{K}}$ sur $\mathscr{E}'_{\mathbf{K}}$ provienne d'un isomorphisme de $\mathscr{E}_{\mathscr{O}_{S'}}$ sur $\mathscr{E}'_{\mathscr{O}_{S'}}$.
c) Soient $E$ (resp. $E'$) un fibré vectoriel sur la variété $V$ muni d'une norme adélique classique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp.$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$). Alors on définit une norme adélique classique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $E \oplus E'$ par les conditions suivantes :

(i) Si $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$ est une place non archimédienne, alors on pose $\|(y,y')\|''_w = \max(\|y\|_w, \|y'\|'_w)$ pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y \in E(x)$ et tout $y' \in E'(x)$.

(ii) Si $w$ est une place réelle de $\mathbf{K}$, alors on pose

$$\|(y,y')\|''_w = (\|y\|_w^2 + \|y'\|'^{\,2}_w)^{1/2}$$

pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y \in E(x)$ et tout $y' \in E'(x)$.

(iii) Si $w$ est une place complexe, alors on définit $\|(y,y')\|''_w = \|y\|_w + \|y'\|'_w$ pour tout $x \in V(\mathbf{K}_w)$, tout $y \in E(x)$ et tout $y' \in E'(x)$.

Le fibré vectoriel adéliquement normé ainsi obtenu sera appelé la *somme directe* des fibrés vectoriels adéliquement normés $E$ et $E'$.
d) Soient $E$ (resp. $E'$) un fibré vectoriel sur la variété $V$ muni d'une norme adélique classique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp.$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$). Alors il existe une unique norme adélique classique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $E \otimes E'$ qui vérifie :

$$\|y \otimes y'\|''_w = \|y\|_w \|y'\|'_w$$

pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x \in V(\mathbf{K}_w)$, $y \in E(x)$ et $y' \in E'(x)$. Le fibré vectoriel adéliquement normé ainsi obtenu sera appelé le *produit tensoriel* des fibrés vectoriels adéliquement normés $E$ et $E'$.

[2] Dans des textes antérieurs, j'ai appelé métrique adélique ce que j'appelle ici plus justement norme adélique pour éviter des confusions.

e) Soit $E$ un fibré vectoriel sur $V$ muni d'une norme adélique que l'on note $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Soit $F$ un sous-fibré de $E$. La famille de normes $(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $F$ définie par les relations

$$\|y\|'_w = \|y\|_w$$

pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x \in V(\mathbf{K}_w)$ et $y \in F(x)$ est une norme adélique appelée la *restriction* de la norme adélique de $E$ à $F$. Si la norme adélique de $E$ est classique, sa restriction à $F$ l'est également.

f) On conserve les notations de l'exemple précédent. Soit $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, on définit une application $E/F(\mathbf{K}_w) \to \mathbf{R}_+$ par

$$\|\overline{y}\|''_w = \inf_{y\in\overline{y}} \|y\|_w$$

pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, $x \in V(\mathbf{K}_w)$ et $\overline{y} \in E(x)/F(x)$. Mais comme cette borne inférieure est atteinte, $\|\cdot\|''_w$ est une norme sur le fibré $E/F$. En outre, si $\|\cdot\|_w$ est défini par un modèle $\mathscr{E}$ et la restriction $\|\cdot\|'_w$ par un sous-fibré $\mathscr{F}$, alors la norme $\|\cdot\|''_w$ est définie par le quotient $\mathscr{E}/\mathscr{F}$.

La norme adélique $(\|\cdot\|''_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le fibré vectoriel $E/F$ est appelée *norme déduite de la norme adélique de $E$ par passage au quotient*. Supposons que la norme adélique de $E$ soit classique. La norme qui s'en déduit par passage au quotient l'est également. De manière plus précise, soit $w$ une place de $\mathbf{K}$ et soit $x$ un élément de $V(\mathbf{K}_w)$. Si $w$ est une place finie, alors le sous-$\mathscr{O}_w$-module de $E(x)/F(x)$ associé à $\|\cdot\|''_w$ est le quotient du $\mathscr{O}_w$-module associé à $\|\cdot\|_w$ par son intersection avec l'intersection avec $F(x)$ ; si $w$ est réelle (resp. complexe) alors la projection définit un isomorphisme d'espace quadratique (resp. hermitien) de l'orthogonal de $F(x)$ sur $E/F(x)$.

g) Soit $E$ un fibré adélique et $n$ un entier positif. On définit une norme adélique classique sur le fibré $\Lambda^n E$ de façon à obtenir une structure de $\lambda$-anneau sur l'anneau de Grothendieck des fibrés vectoriels munis de normes adéliques classiques (pour la définition de cette structure, voir [Be, §2], pour une telle structure pour les fibrés hermitiens, voir [Ro]). En particulier, si $E$ est une somme directe $F \oplus F'$, les normes choisies doivent être compatibles avec l'isomorphisme canonique de $\Lambda^n E$ sur

$$\bigoplus_{p+q=n} \Lambda^p F \otimes \Lambda^q F'.$$

Soit $w$ une place de $K$ et $x \in V(\mathbf{K}_w)$ si $w$ est non-archimédienne, la restriction de $\|\cdot\|_w$ à $\Lambda^n E(x)$ est donné par le $\mathscr{O}_w$-module engendré par les produits $y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$, où $y_i \in E(x)$ avec $\|y_i\|_w \leqslant 1$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $w$ est une place archimédienne, alors on prend la norme associée à la forme bilinéaire caractérisée par la formule

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y_1 \wedge \cdots \wedge y_n\rangle_{\Lambda^n E} = \det(\langle x_i, y_i\rangle_E),$$

où $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in E(x)$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ désigne la forme définissant la norme sur $E(x)$. En particulier, si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de $E(x)$, alors les produits $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant r$ forment une base orthonormée de $\Lambda^n E(x)$. En prenant pour $n$ le rang de $E$, on munit ainsi le

fibré $\det(E) = \Lambda^n E$ d'une structure de fibré en droite adéliquement normé. En particulier, une métrique adélique sur $V$ permet de définir une norme adélique classique sur le fibré anticanonique $\omega_V^{-1} = \det(TV)$.
h) Soit $X$ une belle variété sur $K$ et soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés. Soit $E$ un fibré vectoriel au-dessus de $Y$ muni d'une norme adélique $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Soit $x \in X(\mathbf{K})$. On peut identifier $f^*(E)(x)$ avec $E(f(x))$. Pour tout place $w$ de $\mathbf{K}$, la norme $\|\cdot\|_w$ sur $E(f(x))$ induit donc une norme sur $f^*(E)(x)$. Le fibré vectoriel $f^*(E)$ muni de la norme adélique ainsi définie est appelé l'*image inverse par* $f$ du fibré vectoriel adéliquement normé $E$.

Définition 3.7. Soient $E$ et $F$ des fibrés adéliquement normés au-dessus de $V$. On note $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (resp. $(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$) la norme adélique sur $E$ (resp. $F$).
Un *plongement de* $E$ *dans* $F$ est un morphisme $\varphi$ de fibrés vectoriels de $E$ dans $F$ tel que pour toute place $w$ de $\mathbf{K}$, tout point $x$ appartenant à $V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y \in E(x)$, on ait $\|\varphi(y)\|'_w = \|y\|_w$.
Les fibrés vectoriels adéliquement normés $E$ et $F$ seront dits *équivalents* si et seulement s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi : E \to F$ et une famille $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de nombres réels tels que

(i) L'ensemble $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1 \,\}$ est fini ;
(ii) Le produit $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} \lambda_w$ vaut 1 ;
(iii) On a la relation $\|\varphi(y)\|'_w = \lambda_w \|y\|_w$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, tout point $x \in V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y \in E(x)$.

L'ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droites munis d'une norme adélique pour la relation d'équivalence précédente forme un groupe pour le produit tensoriel, qu'on note $\mathscr{H}(V)$.

*Exemple* 3.8. Dans le cas où $V = \mathrm{Spec}(\mathbf{K})$, la donnée d'un fibré adélique sur $V$ est équivalente à celle d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ muni d'une famille de normes classiques $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de sorte que, pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$, il existe un ensemble fini de places $S$ tel que

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big\|_w = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|_w)$$

pour toute place $w$ en dehors de $S$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}_w^n$. L'ensemble $M$ des éléments $x$ de $E$ tels que $\|x\|_w \leqslant 1$ pour toute place finie $w$ de $K$ est alors un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module projectif de rang constant $n$. Notons qu'inversement $\|\cdot\|_w$ est la norme $w$-adique définie par $M \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_w$, si bien que la donnée d'un fibré adélique sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ est également équivalente à celle d'un *réseau adélique sur* $\mathbf{K}$, c'est-à-dire d'un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module projectif $M$ de rang fini constant muni, pour tout place archimédienne $w$ d'une norme classique $\|\cdot\|_w$ sur $M_w = M \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathbf{K}_w$.
En particulier, un fibré en droites sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{K})$ muni d'une norme adélique adélique est défini par un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension un muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de sorte que, pour tout élément non nul $e$ de $E$, l'ensemble de places $\{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \|e\|_w \neq 1\}$ soit fini. Par la formule du

produit (1), le produit $\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\|e\|_w$ est indépendant de l'élément non nul $e$ de $E$ et on peut définir le *degré* de $E$ par la formule

$$\widehat{\deg}(E) = -\log\Bigg(\prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\|e\|_w\Bigg). \tag{2}$$

Supposons que le degré de $E$ soit égal à 0. Soit $e$ un élément non nul de $E$ et posons $\lambda_w = \|e\|_w^{-1}$ pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. Alors l'application linéaire $\varphi : \mathbf{K} \to E$ qui envoie 1 sur $e$ définit un isomorphisme de fibré adélique du fibré adélique trivial (exemple 3.6 a)) sur $E$ muni de la norme adélique $(\lambda_w\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$. Par conséquent, le degré définit un isomorphisme de groupes de $\mathscr{H}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K}))$ sur $\mathbf{R}$.

Proposition 3.9. *Soient $E$ et $F$ des fibrés vectoriels adéliquement normés au-dessus de la variété $V$ et soit $\varphi$ un morphisme de fibrés vectoriels de $E$ dans $F$. On note $(\|\cdot\|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ (*resp. *$(\|\cdot\|'_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$) la norme adélique sur $E$ (*resp. *$F$). Alors il existe une famille $(\lambda_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ de nombres réels tels que*

(i) *L'ensemble $\{\, w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K}) \mid \lambda_w \neq 1 \,\}$ est fini ;*

(ii) *On a la relation $\|\varphi(y)\|'_w \leqslant \lambda_w\|y\|_w$ pour tout $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, tout point $x \in V(\mathbf{K}_w)$ et tout $y \in E(x)$.*

*Démonstration.* Soit $\mathbf{P}(E)$ le fibré projectif sur $V$ correspondant aux droites des fibres de $E$. Pour tout $v \in T$, on considère l'application

$$\rho_v : \mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v) \to \mathbf{R}_{>0}$$

définie par la relation $\|\varphi(y)\|'_v = \rho_v(x)\|y\|_v$ pour tout $x \in \mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v)$ et tout $y$ non nul appartenant à la droite correspondante de $E$. Comme $\mathbf{P}(E)(\mathbf{K}_v)$ est compact, l'application $\rho_v$ est majorée et atteint sa borne supérieure qu'on note $\lambda_v$. Pour presque toute place finie $v$ de $\mathbf{K}$, le morphisme $\varphi$ est induit par un morphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{F}$, pour un modèle $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) de $E$ (resp. $F$) définissant la norme considérée. Pour toute telle place, on a $\lambda_v \leqslant 1$. Cela prouve la proposition. $\square$

Notations 3.10. Sous les hypothèses de la proposition, pour toute place $v$ de $\mathbf{K}$ et tout $x$ de $V(K_v)$, on note $|||\varphi_x|||_v$ le plus petit nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$\|\varphi(y)\|_v \leqslant \lambda\|y\|_v$$

pour $y \in E(x)$. Si $x$ appartient à $V(\mathbf{K})$, on pose également

$$|||\varphi_x||| = \prod_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})} |||\varphi_x|||_v.$$

3.3. Hauteurs d'Arakelov. Rappelons maintenant comment un fibré en droites muni d'une norme adélique permet de définir une hauteur sur une variété.

DÉFINITION 3.11. Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres et $V$ une belle variété sur $\mathbf{K}$. On appelle *hauteur d'Arakelov* sur $V$ un fibré en droites sur $V$ muni d'une norme adélique. Soit $L$ une hauteur d'arakelov sur $V$ et $x \in V(\mathbf{K})$ un point rationnel de $V$. L'image inverse $x^*(L)$ de $L$ par $x$ (exemple 3.6 h)) définit un élément du groupe $\mathscr{H}(\mathrm{Spec}(\mathbf{K}))$. La *hauteur logarithmique de $x$ relativement à $L$* est définie par

$$h_L(x) = \widehat{\deg}(x^*(L)).$$

La *hauteur exponentielle de $x$ relativement à $L$* est définie par

$$H_L(x) = \exp(h_L(x)).$$

*Exemple* 3.12. Munissons $\mathbf{R}^{n+1}$ de sa structure euclidienne usuelle et, pour un nombre premier $p$, l'espace vectoriel $\mathbf{Q}_p^{n+1}$ de la norme usuelle :

$$\|(x_0, \dots, x_n)\|_p = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} (|x_i|_p).$$

En identifiant l'ensemble des points de l'espace projectif sur un corps $\mathbf{K}$ à celui des droites de $\mathbf{K}^{n+1}$, l'espace tangent en la droite $L$ peut s'identifier au quotient $L^\vee \otimes \mathbf{K}^{n+1}/L^\vee \otimes L$. Les normes précédentes induisent par restriction, produit tensoriel et quotient une métrique adélique sur l'espace projectif, et donc une norme adélique sur $\omega^{-1}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}}$. La hauteur correspondante est donnée par

$$H_n(x) = \widehat{\deg}(T_x \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})) = \sqrt[n+1]{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}.$$

si $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ avec $x_0, \ldots, x_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble.

## 4. Pentes à la Bost

4.1. PENTES D'UN RÉSEAU ADÉLIQUE. Nous allons tout d'abord rappeler la définition des pentes arithmétiques pour un réseau adélique.

DÉFINITION 4.1. Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une part d'un $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-sous-module $M$ projectif de rang constant égal à la dimension de $E$ et, pour toute place archimédienne $w$ de $\mathbf{K}$, d'une norme classique $\|\cdot\|_w$ sur $E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. Soit $n$ la dimension de $E$, la construction de l'exemple 3.6 g) munit alors $\det(E) = \Lambda^n E$ d'une norme adélique et on définit le *degré arithmétique de $E$* par la relation

$$\widehat{\deg}(E) = \widehat{\deg}(\det(E)),$$

où la définition dans le cas de la dimension 1 est donnée par la formule (2). Par définition, le degré arithmétique de l'espace vectoriel nul est 0.

*Remarque* 4.2. Ce degré peut également être décrit de la façon suivante : les normes sur $E$ définissent une norme euclidienne sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ qui est isomorphe à la somme directe de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels

$\bigoplus_{w|\infty} E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. Notons $\iota$ le plongement canonique de $E$ dans $E_{\mathbf{R}}$. Le module $\iota(M)$ est un réseau de $E_{\mathbf{R}}$ et, d'après [Ga, définition 4.1, lemmes 4.4 et 4.5], le degré est donné par

$$\widehat{\deg}(E) = -\log(\mathrm{Vol}(E_{\mathbf{R}}/\iota(M))) + n\log(\mathrm{Vol}(\mathbf{K}_{\mathbf{R}}/\mathscr{O}_{\mathbf{K}}))$$

où $\mathrm{Vol}(E_{\mathbf{R}}/\iota(M))$ est, par définition, le volume euclidien d'un domaine fondamental pour le réseau $\iota(M)$, et $\mathbf{K}$ est muni des normes $(|\cdot|_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$.

*Exemple* 4.3. Plaçons-nous dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, soit $E$ un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel muni d'un réseau $\Lambda$ et d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour toute droite vectorielle $F$ de $E$, le degré arithmétique de $F$ pour la structure induite est $-\log(\|f\|)$ où $f$ est un des deux générateurs de l'intersection $\Lambda \cap F$.

Définition 4.4. Étant donné un réseau adélique $E$ de dimension $n$, le *polygône de Newton* $\mathscr{P}(E)$ de $E$ est l'enveloppe convexe des points $(\dim(F), \widehat{\deg}(F))$ du plan où $F$ décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $E$ munis des structures adéliques induites. Le covolume des sous-réseaux de $E$ étant minoré, le polygône est borné supérieurement par le graphe d'une application affine par morceaux et on définit une application $m_E$ de $[0, n]$ dans $\mathbf{R}$ par la relation

$$m_E(x) = \sup\{y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in \mathscr{P}(E)\} \tag{3}$$

pour tout $x$ de $[0, n]$. Les *pentes arithmétiques* de $E$ sont alors donnée par

$$\mu_i(E) = m_E(i) - m_E(i-1)$$

pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Ce sont les pentes des segments formant le graphe de $m_E$.

*Remarques* 4.5. a) Notons que nous avons les inégalités

$$\mu_n(E) \leqslant \mu_{n-1}(E) \leqslant \dots \leqslant \mu_1(E)$$

et la relation

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(E) = \widehat{\deg}(E).$$

b) On a également la relation $\mu_i(E) = -\mu_{n+1-i}(E^\vee)$ pour $1 \leqslant i \leqslant \dim(E)$ où $E^\vee$ désigne l'espace dual de $E$ [BK, (3.5)].
c) Dans le cadre du programme de Batyrev et Manin, il est naturel d'utiliser des hauteurs qui ne sont pas normalisées, et donc ne sont pas invariantes par extension de corps. De façon cohérente, nous n'utilisons pas les pentes normalisées : contrairement à Bost [Bos, p. 195] nous ne divisons pas par le degré du corps de nombres. Ces pentes ne sont donc pas invariantes par extension de corps.

Notations 4.6. Avec les notations de la définition précédente, on notera également $\mu_{\max}(E)$ pour $\mu_1(E)$ et $\mu_{\min}(E)$ pour $\mu_n(E)$. La *pente de $E$* est la moyenne des pentes : $\mu(E) = \frac{\widehat{\deg}(E)}{\dim(E)}$.

*Remarques* 4.7. a) La notion de pentes a été généralisée par E. Gaudron aux normes non classiques [Ga].

b) Suivant [Ga, définition 5.18] et [Th], le $i$-ème minima de $E$, noté $\lambda_i(E)$ peut être défini comme la borne inférieure des nombres $\theta \in \mathbf{R}_{>0}$ tels qu'il existe une famille de nombres réels strictement positifs $(\theta_w)_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ presque tout égaux à 1, avec $\theta = \prod_{w\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}\theta_w$, et une famille libre $(x_1,\dots,x_i)$ de $E$ vérifiant les inégalités

$$\|x_i\|_w \leqslant \theta_w$$

pour $i \in \{1,\dots,n\}$ et $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$. Le théorème de Minkowski permet d'obtenir une constante explicite $C_{\mathbf{K}}$ de sorte que

$$0 \leqslant \log(\lambda_i(E)) + \mu_i(E) \leqslant C_{\mathbf{K}}$$

pour $i \in \{1,\dots,n\}$ ; cet encadrement est donné par E. Gaudron dans [Ga, théorème 5.20], compte tenu du fait que $\Delta(\overline{E}) = 1$ dans notre cas, avec une référence à un travail de T. Borek [Bo].

4.2. Pentes d'un point rationnel. Nous allons maintenant appliquer cette construction aux points rationnels d'une variété

Définition 4.8. Soit $V$ une belle variété de dimension $n$ sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. Soit $E$ un fibré adélique sur la variété $V$. Soit $r$ le rang du fibré $E$. Étant donné un point rationnel $x$ de $V$, les *pentes de $x$ relativement à $E$* sont données par la formule $\mu_i^E(x) = \mu_i(E(x))$ où $i \in \{1,\dots,r\}$.
En particulier, lorsque la variété $V$ est muni d'une métrique adélique, les *pentes de $x$* sont les pentes arithmétiques de l'espace tangent $T_xV$. On les note simplement $\mu_i(x)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

*Remarques* 4.9. a) La somme $\sum_{i=1}^n \mu_i(x)$ est le degré arithmétique de l'espace tangent $T_xV$ c'est à dire le degré arithmétique de la fibre en $x$ du fibré anticanonique, qui n'est rien d'autre que la hauteur logarithmique de $x$ relativement à ce fibré.
b) La définition des pentes dans le cadre arithmétique est un analogue de celle introduite pour les fibrés vectoriels sur les courbes algébriques. Plus précisément, soit $\mathscr{C}$ une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps $k$ et soit $V$ une bonne variété sur $k$. Étant donné un morphisme de variétés $\varphi$ de $\mathscr{C}$ dans $V$, le polygône d'Harder-Narasimhan du fibré vectoriel $\phi^*(TV)$ est défini comme l'enveloppe convexe des couples $(\mathrm{rg}(F), \deg(F))$ où $F$ décrit l'ensemble des sous-fibrés de $\phi^*(TV)$. Les pentes d'un point rationnel $\mu_i(x)$ définies ici correspondent donc aux pentes $\mu_i(\phi^*(TV))$. Dans le cas particulier où la courbe $\mathscr{C}$ est la droite projective sur $k$, le fibré $\phi^*(TV)$ est isomorphe à une unique somme directe $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}(a_i)$ avec $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et on a les égalités $\mu_i(\phi^*(TV)) = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Notations 4.10. Avec les notations de la définition précédente, on définit

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \qquad \text{et} \qquad H(x) = \exp(h(x))$$

pour tout point rationel $x$ de $V$. La fonction $H : V(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}$ ainsi définie est donc une hauteur exponentielle relative au fibré anticanonique.

On pose également $\mu_{\min}(x) = \mu_n(x)$, $\mu_{\max}(x) = \mu_1(x)$ et $\mu(x) = \mu(T_xV) = h(x)/n$.

4.3. LIBERTÉ D'UN POINT RATIONNEL. Nous allons utiliser les pentes définies au paragraphe précédent pour définir une notion de liberté pour les points rationnels. Cette notion est inspirée de la notion de courbe très libre. De manière plus précise, le fait d'avoir une liberté strictement positive pour un point rationnel correspond au fait d'être très libre pour un morphisme de la droite projective dans la variété. Notons que cette notion de mesure de la liberté, qui, à la connaissance de l'auteur, n'a pas été formalisé dans le cadre géométrique, pourrait également avoir un intérêt dans ce cadre-là.

DÉFINITION 4.11. Soit $V$ une belle variété de dimension $n > 0$ sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. On suppose que la variété $V$ est munie d'une métrique adélique. Pour tout point rationnel $x$ de $V$, la *liberté de $x$* est le nombre réel

$$l(x) = \frac{\mu_{\min}(x)}{\mu(x)}$$

si $\mu_{\min}(x) > 0$ et vaut 0 sinon.

*Remarques* 4.12. a) Soit $x$ un point rationnel de $V$. Rappelons que $\mu(x) = \frac{h(x)}{n}$ n'est rien d'autre que la moyenne des pentes.
b) Par définition, $l(x) \in [0, 1]$.
c) La liberté $l(x)$ est nulle si et seulement si la pente minimale est négative.
d) On a l'égalité $l(x) = 1$ si et seulement toutes les pentes sont égales :

$$\mu_1(x) = \mu_2(x) = \cdots = \mu_n(x) = \frac{h(x)}{n}.$$

Cela revient à dire que l'espace tangent $T_xV$ est semi-stable (*cf.* [BC, §1.2]). C'est par exemple le cas sur $\mathbf{Q}$ si le réseau dans $T_xV$ est engendré par une base orthonormale.
e) La liberté d'un point rationnel dépend du choix de la métrique sur $V$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette dépendance diminue avec la hauteur du point considéré.
f) Bien que nos conventions font que les pentes d'un point ne sont pas stables par extension de corps, la liberté d'un point rationnel est, quant à elle, stable par extension de corps.
g) La remarque 4.7 b) fournit une constante $C$ de sorte que

$$|\mu_n(x) - \log(\lambda_1(T_xV^\vee))| \leqslant C.$$

Par conséquent, à un terme borné près, la condition $l(x) \leqslant \epsilon$ pour un point $x \in V(\mathbf{K})$ peut être vue comme l'existence d'un élément $y \in T_xV^\vee$ tel que

$$\prod_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})} \|y\|_w \leqslant H(x)^\epsilon.$$

L'objectif du reste de cet article est de motiver le slogan suivant

SLOGAN 4.13. *Les mauvais points d'une variété du point de vue de l'équidistribution sont ceux dont la liberté est réduite.*

## 5. Propriétés élémentaires

5.1. Dépendance de la liberté en la métrique. Nous commençons par un résultat élémentaire concernant les morphismes de fibrés.

Lemme 5.1. *Soit $V$ une belle variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, Soient $E$ et $F$ des fibrés vectoriels adéliquement normés au-dessus de $V$ et soit $\varphi$ un morphisme de fibrés vectoriels de $E$ dans $F$. Alors, il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que, pour tout point $x$ de $V(\mathbf{K})$ en lequel l'application induite $\varphi_x : E(x) \to F(x)$ est surjective, on a*

$$m_{F(x)^\vee}(i) \leqslant m_{E(x)^\vee}(i) + C$$

*pour $i \in \{0, \dots, \mathrm{rg}(F)\}$. En particulier,*

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + C.$$

*Démonstration.* Par dualité, le morphisme $\varphi$ définit un morphisme $\varphi^\vee$ de $F^\vee$ dans $E^\vee$. Soit $x$ un élément de $V(\mathbf{K})$ en lequel $\varphi_x$ est surjectif. L'application linéaire $\varphi_x^\vee$ est injective. Pour tout sous-espace $H$ de $F(x)^\vee$ de dimension $k$ et tout $y \in \Lambda^k H$, en utilisant les notations 3.10, on a les relations

$$\| \wedge^k \varphi(y)\|_w \leqslant \|\!| \wedge^k \varphi_x^\vee \|\!|_w \|y\|_w$$

pour $w \in \mathrm{Val}(\mathbf{K})$, ce qui implique l'inégalité

$$\widehat{\deg}(\varphi_x^\vee(H)) \geqslant \widehat{\deg}(H) - \log(\|\!| \wedge^k \varphi_x^\vee \|\!|).$$

En posant $C_x = \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{rg}(F)}(\log(\|\!| \wedge^k \varphi_x^\vee \|\!|))$, on en déduit que

$$m_{F(x)^\vee}(i) \leqslant m_{E(x)^\vee}(i) + C_x$$

pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}(F)$. Compte tenu de la proposition 3.9, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $C_x \leqslant C$ pour tout $x \in V(K)$. En particulier, on obtient l'inégalité

$$\mu_1(F(x)^\vee) \leqslant \mu_1(E(x)^\vee) + C.$$

La formule de la remarque 4.5 b) donne alors l'inégalité

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + C$$

ce qui permet de conclure. □

*Remarque* 5.2. Notons que la preuve donne en fait une inégalité plus précise :

$$\mu_{\min}(E(x)) \leqslant \mu_{\min}(F(x)) + \max_{1 \leqslant k \leqslant \mathrm{rg}(F)} \Big( \frac{\log(\|\!| \wedge^k \varphi_x^\vee \|\!|)}{k} \Big).$$

Comme annoncé, nous allons maintenant démontrer que la liberté dépend peu de la métrique choisie.

Lemme 5.3. *Soit $V$ une belle variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, soit $E$ un fibré vectoriel de rang $r$ sur $V$. Donnons-nous des normes adéliques classiques $(\| \cdot \|_w)_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})}$ et $(\| \cdot \|'_w)_{w \in \mathrm{Val}(\mathbf{Q})}$ sur $E$. On note $\mu_i^E$ et $\mu_i^{E'}$ les fonctions de pentes associées. Il existe une constante réelle $C \geqslant 0$ telle que*

$$|\mu_i^E(x) - \mu_i^{E'}(x)| \leqslant C$$

*pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $x \in V(\mathbf{K})$.*

*Démonstration.* En appliquant le lemme 5.1 à l'endomorphisme identité, on obtient que les applications $x \mapsto m'_{E(x)}(i) - m_{E(x)}(i)$ sont bornées. Le lemme en résulte. □

Proposition 5.4. *Soit $V$ une belle variété sur le corps $\mathbf{K}$, munie de deux métriques. On note $l$ et $l'$ les fonctions libertés associées à ces métriques et $h$ la fonction hauteur définie par la première d'entre elles. Alors il existe une constante réelle $C > 0$ telle que*

$$|l(x) - l'(x)| < \frac{C}{h(x)}$$

*pour tout $x \in V(\mathbf{K})$ tel que $h(x) > 0$.*

*Démonstration.* Notons $\mu_i$ (resp. $\mu'_i$) les fonctions de pente correspondant à la première métrique (resp. la seconde). On primera de même la notation pour la hauteur. Il résulte du lemme 5.3 qu'il existe des constantes réelles strictement positives $C_1$ et $C_2$ telles que

$$|\mu_n(x) - \mu'_n(x)| \leqslant C_1 \qquad \text{et} \qquad |h(x) - h'(x)| \leqslant C_2$$

pour $x \in V(\mathbf{K})$. Par définition, on a la majoration $|l(x) - l'(x)| \leqslant 1$, il suffit donc de démontrer le résultat lorsque $h(x) > 2C_2$. Notons qu'on a alors les inégalités $h'(x) > h(x) - C_2 > h(x)/2$ et, par conséquent, $1/h'(x) < 2/h(x)$. Si $\mu'_n(x) \leqslant 0$ et $\mu_n(x) \leqslant 0$, on a $l(x) = l'(x) = 0$ ce qui démontre le résultat. Si $\mu'_n(x) < 0$ et $\mu_n(x) > 0$, alors on obtient les relations $l(x) = n\mu_n(x)/h(x) \leqslant nC_1/h(x)$. Si $\mu'_n(x) > 0$ et $\mu_n(x) < 0$, on obtient de même $l'(x) \leqslant 2nC_1/h(x)$. Enfin si les deux pentes minimales sont strictement positives, on a les inégalités

$$|l(x) - l'(x)| = n\left|\frac{\mu_n(x)}{h(x)} - \frac{\mu'_n(x)}{h'(x)}\right| \leqslant \frac{nC_1}{h(x)} + \frac{n\mu'_n(x)C_2}{h(x)h'(x)} \leqslant \frac{nC_1 + C_2}{h(x)}. \qquad \square$$

## 5.2. Liberté et morphismes de variétés

Proposition 5.5. *Soient $X$ et $Y$ de belles variétés sur $\mathbf{K}$ de dimensions respectives $m$ et $n$ et soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de variétés. Alors il existe une constante $C \geqslant 0$ telle qu'en tout $x \in X(\mathbf{K})$ en lequel l'application tangente $T_x\varphi$ est surjective,*

$$\mu_{\min}(x) \leqslant \mu_{\min}(\varphi(x)) + C.$$

*Si, en outre, $h(x)$ est strictement positif, Il en résulte que*

$$l(x) \leqslant \frac{m\,h(\varphi(x))}{n\,h(x)} l(\varphi(x)) + \frac{mC}{h(x)}.$$

*Démonstration.* La première assertion résulte du lemme 5.1 appliqué au morphisme tangent $T\varphi : TX \to \varphi^*(TY)$, la seconde de la définition de la liberté. □

*Remarque* 5.6. Il résulte de cette proposition que, si $y \in Y(\mathbf{K})$ et $X_y$ désigne la fibre de $\varphi$ au-dessus de $y$, alors la liberte $l(x)$ converge vers 0 lorsque $h(x)$ tend vers $+\infty$ dans $X_y(\mathbf{K})$ en dehors des points critiques.

Le résultat suivant montre le lien entre la liberté d'une courbe rationnelle et celle de ses points.

NOTATIONS 5.7. Soit $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ un morphisme de variétés, le fibré $\varphi^*(T_V)$ est isomorphe à un unique fibré de la forme $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(a_i)$ avec $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. On note $\mu_i(\varphi) = a_i$ pour $i \in 1, \ldots, n$ et $\deg(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\varphi)$. On définit alors la liberté de $\varphi$ comme le nombre rationnel $l(\varphi) = n\mu_n(\varphi)/\deg(\varphi)$ si $\mu_n(\varphi) > 0$. On pose $l(\varphi) = 0$, si $\mu_n(\varphi) < 0$.

PROPOSITION 5.8. *Soit $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to V$ un morphisme de variétés non constant, alors*

a) *Si $\mu_n(\varphi) < 0$, alors $l(\varphi(x)) = 0$ pour tout $x$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ en dehors d'une partie finie ;*
b) *Si $\mu_n(\varphi) \geqslant 0$, alors $l(\varphi(x))$ converge vers $l(\varphi)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ pour le filtre de Fréchet du complémentaire des parties finies.*

*Démonstration.* On peut munir $\varphi^*(TV)$ de deux métriques : d'une part de celle déduite par image inverse de la métrique de $V$, et d'autre part de celle issue de l'isomorphisme de $\varphi^*(TV)$ sur $\bigoplus_{i=1}^n \mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(\mu_i(\varphi))$. D'après le lemme 5.3, on en déduit que
$$\mu_n(\varphi(x)) = \mu_n^{\varphi^*(TV)}(x) = \mu_n(\varphi)h_1(x) + O(1)$$
et
$$h(\varphi(x)) = \deg(\varphi)h_1(x) + O(1)$$
où $h_1(x)$ désigne une hauteur sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ relative au fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(1)$. L'assertion a) en résulte par définition de la liberté. D'autre part, comme le morphisme $\varphi$ est non constant, l'application dérivée de $\varphi$ donne un morphisme non trivial de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ dans $\varphi^*(TV)$ ce qui prouve que $\mu_1(\varphi) \geqslant 2$. En particulier, dans le cas b), $\deg(\varphi) > 0$ ce qui complète la preuve. $\square$

## 6. Empirisme

6.1. RAPPELS SUR LA CONSTANTE EMPIRIQUE. Nous allons rappeler ici l'interprétation envisagée pour la constante qui apparaît dans le terme dominant du nombre de bons points rationnels de hauteur bornée. Une première version de cette constante a d'abord été définie dans [Pe1]. Par la suite, Batyrev et Tschinkel dans [BT1] l'ont corrigée en rajoutant le facteur entier $\beta(V)$. Depuis, une réinterprétation de cette constante par Salberger dans [Sal] et les nombreux exemples connus ont confirmé son intérêt. D'autre part, Batyrev et Tschinkel l'ont généralisée dans le cas où la hauteur n'est pas relative au fibré anticanonique [BT3] mais cette généralisation sort du cadre de cet article.
Dans ce paragraphe, la lettre $V$ désigne une belle variété munie d'une métrique adélique. Pour pouvoir définir la constante, nous supposerons en outre que

(i) Les groupes de cohomologie $H^i(V, \mathscr{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou $2$ ;
(ii) Le groupe de Picard géométrique de $\overline{V}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini.

Pour toute place $v$ de $\mathbf{K}$, on note $\mathrm{d}x_v$ la mesure de Haar sur $\mathbf{K}_v$ normalisée de la façon suivante :

- Si $v$ est une place réelle, alors $\mathrm{d}x_v$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbf{R}$ ;
- Si $v$ est une place complexe, alors $\mathrm{d}x_v = i\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ;
- Sinon $\int_{\mathscr{O}_v} \mathrm{d}x_v = 1$.

La métrique adélique sur $V$ induit une norme adélique $(\|\cdot\|_v)_{v\in\mathrm{Val}(\mathbf{K})}$ sur le faisceau anticanonique. Rappelons la construction de la mesure de Tamagawa à partir de cette norme adélique. Pour tout place $v$ de $\mathbf{K}$, on peut alors définir une mesure borélienne sur l'espace $V(\mathbf{K}_v)$ donnée dans un système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par la formule

$$\boldsymbol{\omega}_v = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v}\,.$$

La formule de changement de variables [We, §2.2.1] permet de montrer que cette expression est bien indépendante du système de coordonnées choisi.

Lemme 6.1. *Soit $v$ une place de $\mathbf{K}$. Supposons que la norme $\|\cdot\|_v$ est définie par un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de $V$ sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}_v$ de $\mathbf{K}_v$. Soit $\mathfrak{m}_v$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_v$ et $\mathbf{F}_v$ le corps $\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v$ ; pour tout entier $k$ notons*

$$\pi_k : V(\mathbf{K}_v) \longrightarrow \mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$$

*l'application de réduction modulo $\mathfrak{m}_v^k$. Alors $\boldsymbol{\omega}_v$ est la* mesure naturelle *caractérisée par les relation*

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X)) = \frac{\sharp X}{\sharp \mathbf{F}_v^{nk}} \tag{4}$$

*où $k$ parcourt les entiers strictement positifs et $X$ les parties de l'ensemble fini $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$. En particulier, on a l'égalité*

$$\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v)) = d_v(V) = \frac{\sharp\mathscr{V}(\mathbf{F}_v)}{\sharp\mathbf{F}_v^n}.$$

*Démonstration.* Cette propriété est locale, il suffit donc de démontrer la formule (4) dans le cas où $X$ est un singleton. Comme $\mathscr{V}$ est supposée projective et lisse sur $\mathscr{O}_v$, on choisit un plongement $\mathscr{V} \to \mathbf{P}^N_{\mathscr{O}_v}$ de sorte que les fonctions rationnelles $x_1 = \frac{X_1}{X_0}, \ldots, x_n = \frac{X_n}{X_0}$ forment un système de coordonnées sur l'image inverse $W$ de $X$ dans $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v)$ et que $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ donne la $\mathscr{O}_v$-structure sur le fibré tangent $T\mathscr{V}_{|W}$. L'application $f : W \to \mathbf{K}_v^n$ définie par $(x_1, \ldots, x_n)$ préserve alors la congruence modulo $\mathfrak{m}_v^k$ et $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ est de norme 1 sur $W$. Par conséquent, il existe $x_0 \in \mathbf{K}_v^n$ de sorte que

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X)) = \int_{x_0+\mathfrak{m}_v^k} \mathrm{d}x_{1,v} \ldots \mathrm{d}x_{n,v} = \sharp\mathbf{F}_v^{-nk}. \quad \square$$

Comme dans [Pe1, §2.1], il résulte alors de la formule de Lefschetz et de la conjecture de Weil démontrée par Deligne [De], que, sous les hypothèses (i) et (ii) faites ci-dessus, on a pour presque toute place $v$ de $\mathbf{K}$ la formule

$$\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v)) = d_v(V) = 1 + \frac{1}{\sharp \mathbf{F}_v} \operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}_v \mid \operatorname{Pic}(\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}}_v} \otimes \mathbf{Q})) + O(\sharp \mathbf{F}_v^{-3/2}).$$

Suivant le principe de construction des mesures de Tamagawa sur les espaces adéliques, cela amène à la renormalisation suivante :

DÉFINITION 6.2. On fixe une extension galoisienne $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ qui déploie le groupe de Picard de $V$. Notons $S$ une partie finie de $\operatorname{Val}(\mathbf{K})$ contenant l'ensemble des places archimédiennes ainsi que les places se ramifiant dans l'extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. Pour tout $v \in \operatorname{Val}(\mathbf{K}) - S$, La substitution de Frobenius correspondant à une extension $w$ de $v$ à $\mathbf{K}$ sera notée $(w, \mathbf{L}/\mathbf{K})$ (*cf.* [Se1, §1.8]). On pose alors, pour tout nombre complexe $s$ dont la partie réelle $\Re(s)$ est strictement positive,

$$L_v(s, \operatorname{Pic}(\overline{V})) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - \sharp \mathbf{F}_v^{-s}(w, \mathbf{L}/\mathbf{K}) \mid \operatorname{Pic}(\overline{V}))}.$$

et, pour tout nombre complexe $s$ tel que $\Re(s) > 1$,

$$L_S(s, \operatorname{Pic}(\overline{V})) = \prod_{v \in \operatorname{Val}(\mathbf{K}) - S} L_v(s, \operatorname{Pic}(\overline{V})),$$

se produit convergeant d'après [Art, théorème 7]. La mesure de Tamagawa sur l'espace adélique $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ est alors définie par

$$\boldsymbol{\omega}_V = \frac{\lim_{s \to 1} (s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic}(\overline{V}))}{\sqrt{d_{\mathbf{K}}}^{\dim(V)}} \prod_{v \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \frac{1}{L_v(1, \operatorname{Pic}(\overline{V}))} \boldsymbol{\omega}_v.$$

*Remarque* 6.3. Notons que cette mesure est indépendante du choix de l'ensemble $S$. Par contre, elle dépend de la métrique adélique dont est équipée $V$.

Comme l'a fait remarquer Swinnerton-Dyer, le bon domaine d'intégration pour la valeur de la constante est forcément l'adhérence des points rationnels dans l'espace adélique. Toutefois cette adhérence n'est a priori pas connue, ce qui pourrait empêcher de calculer explicitement la constante dans des cas particuliers. En conséquence, comme c'est maintenant usuel dans l'exploration du programme de Batyrev et Tschinkel, nous allons supposer implicitement que l'obstruction de Brauer-Manin [Ma] à l'approximation faible est la seule. Rappelons rapidement la construction de cette obstruction (*cf.* [Pe3] pour un survol plus détaillé). On note $\operatorname{Br}(F) = H^2(F, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer d'un corps $F$. La théorie du corps de classe global (*cf.* [NSW, theorem 8.1.17]) donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Br}(\mathbf{K}) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \operatorname{Br}(\mathbf{K}_v) \xrightarrow{\sum_{v \in \operatorname{Val}(\mathbf{K})} \operatorname{inv}_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Notons $\operatorname{Br}(V) = H^2_{\text{ét}}(V, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de $V$. Pour toute extension $L$ de $\mathbf{K}$ et tout $L$-point $x$ de $V$, la fonctorialité du groupe de

Brauer donne un morphisme de spécialisation $\text{év}_x : \text{Br}(V) \to \text{Br}(L)$. On peut donc définir un accouplement de $\text{Br}(V) \times V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par

$$\langle A, (x_v)_{v\in\text{Val}(\mathbf{K})}\rangle = \sum_{v\in\text{Val}(\mathbf{K})} \text{inv}_v(\text{év}_{x_v}(A))$$

pour $A \in \text{Br}(V)$ et $(x_v)_{v\in\text{Val}(\mathbf{K})} \in V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$. Autrement dit, pour tout point $x$ de l'espace des adèles, on obtient un morphisme de groupes $\omega_x : \text{Br}(V) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par $A \mapsto \langle A, x\rangle$. Compte tenu de la suite exacte (5), ce morphisme est trivial si le point $x$ provient d'un point rationnel et on appelle $\omega_x$ *l'obstruction de Brauer-Manin en* $x$. Par continuité des applications considérées, l'adhérence des points rationnels dans l'espace adélique est contenue dans *l'espace de Brauer Manin* :

$$V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\text{Br}} = \{\, x \in V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}}) \mid \omega_x = 0 \,\}.$$

Définition 6.4. Rappelons que $V$ désigne une belle variété munie d'une métrique adélique et que $V$ vérifie les conditions (i) et (ii). On définit alors *le nombre de Tamagawa-Brauer-Manin* de $V$ par

$$\tau^{\text{Br}}(V) = \boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\text{Br}}).$$

Pour compléter la définition de la constante empirique, il reste à multiplier ce nombre par deux invariants de la variété, dont nous rappelons maintenant la définition.

Définition 6.5. On définit la constante $\alpha(V)$ par la formule

$$\alpha(V) = \frac{1}{(t-1)!}\int_{C^1_{\text{eff}}(V)^\vee} e^{-\langle\omega_V^{-1}, y\rangle}\mathrm{d}y$$

où on note $C^1_{\text{eff}}(V)$ le cône fermé de $\text{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ engendré par les classes de diviseurs effectifs et $C^1_{\text{eff}}(V)^\vee$ le cône dual :

$$C^1_{\text{eff}}(V)^\vee = \{\, y \in \text{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^\vee \mid \forall x \in C^1_{\text{eff}}(V),\ \langle x, y\rangle \geqslant 0 \,\}.$$

La mesure sur $\text{Pic}(V)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}^\vee$ est normalisée de façon à ce que le réseau défini par $\text{Pic}(V)^\vee$ soit de covolume 1.

*Remarque* 6.6. Un simple changement de variables montre que cette constante $\alpha(V)$ peut être également vue comme le volume, convenablement normalisé, de l'intersection du cône $C^1_{\text{eff}}(V)^\vee$ avec l'hyperplan affine d'équation $\langle\omega_V^{-1}, y\rangle = 1$ (*cf.* [Pe1, définition 2.4]). On en déduit que, dans le cas où le cône effectif $C^1_{\text{eff}}(V)$ est engendré par un nombre fini de classes de diviseurs effectifs, la constante $\alpha(V)$ est rationnelle. C'est le cas dans les exemples considérés ultérieurement.

Définition 6.7. La constante $\beta(V)$ est l'entier

$$\beta(V) = \sharp H^1(\mathbf{K}, \text{Pic}(\overline{V})).$$

*Remarque* 6.8. Rappelons que l'introduction de ce terme est due à Batyrev et Tschinkel [BT1].

Définition 6.9. Dans cet article, la *constante empirique* associée à la variété $V$ munie de sa métrique adélique est

$$C(V) = \alpha(V)\beta(V)\tau^{\mathrm{Br}}(V).$$

*Remarque* 6.10. Salberger dans [Sal] a donné une interprétation naturelle de la constante en termes des torseurs versels au-dessus de la variété, qu'on peut décrire de la façon suivante : les torseurs versels sont munis d'une forme de jauge qui définit une mesure canonique sur l'espace des adèles associé. La constante s'interprète alors en termes de la somme, sur les différentes classes de torseurs versels ayant un point adélique, du volume d'un domaine d'adèles convenable (*cf.* également [Pe2]).

6.2. Formule empirique améliorée. Dans l'étude des espaces de modules de courbes rationnelles, les courbes très libres sont caractérisées par le fait que leurs pentes sont strictement positives. Comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent, dans le contexte arithmétique, les points d'une sous-variété faiblement accumulatrice fixée semblent avoir une liberté qui tend vers 0. Toutefois, les points vérifiant la condition $l(x) < \varepsilon$ pour un nombre réel $\varepsilon < 1$ peuvent contribuer au terme principal du nombre de points de hauteur bornée, même dans le cas d'une variété homogène comme $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Cela nous amène à considérer une condition plus faible dans la formule empirique suivante.

Définitions 6.11. On notera $\mathscr{D}$ l'ensemble des applications $\varepsilon$ de l'intervalle $[1, +\infty[$ dans $]0, 1[$ continues et décroissantes telles que

(i) L'application $\varepsilon$ tend vers 0 en $+\infty$ ;

(ii) Pour tout $\alpha \in\ ]0, 1]$, l'application $t \mapsto \log(t)^\alpha\varepsilon(t)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Soit $V$ une belle variété de dimension $n > 0$ sur le corps de nombres $\mathbf{K}$. On suppose $V$ munie d'une métrique adélique. Soit $\varepsilon$ une application de $\mathscr{D}$. Pour tout $B \geqslant 1$ on définit l'ensemble des points *$\varepsilon$-libres* et de hauteur inférieure à $B$ :

$$V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} = \{\, x \in V(\mathbf{K}) \,|\, H(x) \leqslant B \text{ et } l(x) \geqslant \varepsilon(B) \,\}.$$

Si un multiple de la classe du faisceau anticanonique $\omega_V^{-1}$ peut s'écrire comme la somme d'un faisceau ample et d'un diviseur à croisement normaux stricts, on dira que la variété est *vaste*[3].

*Remarque* 6.12. Les fonctions $\varepsilon$ envisagée sont du type

$$t \mapsto \max(1, \log(\log(t)))^{-\alpha}$$

pour un réel $\alpha > 0$.

Formule empirique 6.13. *Soit $V$ une belle variété sur $\mathbf{K}$ de dimension strictement positive et munie d'une métrique adélique. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *La variété $V$ est vaste ;*

[3]Le terme anglais ≪ big ≫ signifie une grande taille à la fois en hauteur et en largeur, le terme ≪ vaste ≫ convient donc pour traduire une condition plus forte que la simple grosseur.

(ii) *Les groupes de cohomologie* $H^i(V,\mathscr{O}_V)$ *sont nuls pour* $i=1$ *ou* $2$ *;*

(iii) *Le groupe de Picard géométrique de* $\overline{V}$ *est un* $\mathbf{Z}$*-module libre de rang fini ;*

(iv) *Les points rationnels de* $V$ *sont denses pour la topologie de Zariski ;*

*On note* $t$ *le rang de* $\mathrm{Pic}(V)$*. Pour une application* $\varepsilon$ *convenable de l'ensemble* $\mathscr{D}$*,*

$$\sharp V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}\sim C(V)B\log(B)^{t-1} \tag{F}$$

*lorsque* $B$ *tend vers* $+\infty$*.*

*Remarque* 6.14. À la connaissance de l'auteur, on ne dispose à l'heure actuelle d'aucun résultat pour une variété $V$ dont la partie transcendante du groupe de Brauer, c'est-à-dire l'image de l'extension des scalaires $\mathrm{Br}(V)\to\mathrm{Br}(\overline{V})$ est non nulle. On n'a donc pas d'exemple permettant de confirmer que la constante $\beta(V)=H^1(k,\mathrm{Pic}(\overline{V}))$ est la bonne dans une telle situation.

6.3. La distribution asymptotique. Comme déjà expliqué dans [Pe1, §5] la validité de la formule empirique pour tout choix de métrique implique une équidistribution des points rationnels vis-à-vis de la mesure de probabilité à densité continue obtenue en renormalisant la mesure introduite dans la définition de la constante empirique.

Pour parler d'équidistribution nous allons commencer par rappeler quelques notions concernant les mesures de comptage. Pour toute partie finie non vide $X$ de l'espace adélique, la *mesure de comptage associée à* $X$ est la mesure définie sur $V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})$ par

$$\boldsymbol{\delta}_X=\frac{1}{\sharp X}\sum_{x\in X}\delta_x\,,$$

où $\delta_x$ désigne la mesure de Dirac en $x$. Soit $B\geqslant 1$ ; lorsque l'ensemble $V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ est fini et non vide, on note $\boldsymbol{\delta}^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ la mesure ainsi associée à $V(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$.

Définition 6.15. Sur l'espace adélique, sous les hypothèses (i) à (iv) de la formule empirique 6.13, qui garantit en particulier que l'espace de Brauer-Manin n'est pas vide, nous définissons également une mesure de probabilité borélienne supportée par l'espace de Brauer-Manin à partir de la mesure $\boldsymbol{\omega}_V$ :

$$\boldsymbol{\mu}_V(U)=\frac{1}{\boldsymbol{\omega}_V(V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})^{\mathrm{Br}})}\boldsymbol{\omega}_V(U\cap V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})^{\mathrm{Br}}).$$

*Remarque* 6.16. Notons que si $V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})^{\mathrm{Br}}=V(\boldsymbol{A}_\mathbf{K})$, cette mesure est le produit des mesures $\boldsymbol{\mu}_{V,v}=\frac{1}{\boldsymbol{\omega}_v(V(\mathbf{K}_v))}\boldsymbol{\omega}_v$ qui est convergent. Par le lemme 6.1, pour presque toute place finie $v$, la mesure de probabilité $\boldsymbol{\mu}_{V,v}$ est donnée par la *mesure de probabilité* définie par un modèle $\mathscr{V}$ de $V$ sur $\mathscr{O}_v$, caractérisée par la relation

$$\boldsymbol{\omega}_v(\pi_k^{-1}(X))=\frac{\sharp X}{\sharp\mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)} \tag{6}$$

où $k$ parcourt les entiers entiers strictement positif et $X$ les parties de $\mathscr{V}(\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v^k)$, en notant $\pi_k$ la réduction modulo $\mathfrak{m}_v^k$. Cette remarque s'étend sans peine *mutatis mutandis* au cas où $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}} = W \times \prod_{v\notin S} V(\mathbf{K}_v)$, pour un ensemble fini $S$ de places et une partie $W$ ouverte et fermée dans $\prod_{v\in S} V(\mathbf{K}_v)$.

Distribution empirique 6.17. *Sous les hypothèses* (i) *à* (iv) *de la formule empirique, pour toute application $\varepsilon$ de $\mathscr{D}$,*

$$\boldsymbol{\delta}^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_V \tag{E}$$

*au sens faible lorsque $B$ tend vers $\infty$.*

*Remarque* 6.18. Cette distribution empirique implique que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule.

## 7. Compatibilité avec les exemples

### 7.1. L'espace projectif

7.1.1. *Minoration de la liberté.* Nous allons tout d'abord donner une expression pour la liberté d'un point de l'espace projectif et en déduire que cette liberté est minorée par une constante strictement positive. Pour l'expression de la liberté, nous allons d'abord fixer une métrique sur l'espace projectif, qui généralise l'exemple 3.12. Soit $n$ un entier strictement positif. Notons $E = \mathbf{K}^{n+1}$. Soit $w$ une place de $\mathbf{K}$. On définit une norme $\|\cdot\|_w$ sur $E\otimes_{\mathbf{K}}\mathbf{K}_w$ qu'on peut identifier avec $\mathbf{K}_w^{n+1}$ par les formules :

(i) $\|\boldsymbol{y}\|_w = \sqrt{\sum_{i=0}^n y_i^2}$ si $w$ est une place réelle ;
(ii) $\|\boldsymbol{y}\|_w = \sum_{i=0}^n |y_i|^2$ si $w$ est une place complexe ;
(iii) $\|\boldsymbol{y}\|_w = \max_{0\leqslant i\leqslant n}(|y_i|_w)$ sinon

pour tout $\boldsymbol{y} = (y_0,\dots,y_n) \in \mathbf{K}_w^{n+1}$. Aux places non archimédiennes, la norme est donc définie par le $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ et

$$\widehat{\deg}(E) = (n+1)\,\widehat{\deg}(\mathbf{K}) = 0.$$

Notons $s : \mathbf{P}(E) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{K})$ le morphisme structural. Les normes précédentes définissent une norme adélique sur le fibré vectoriel $s^*(E)$. En considérant le fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(-1)$ comme un sous-fibré de $s^*(E)$, on peut munir $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(-1)$ d'une norme adélique. Mais le fibré tangent est canoniquement isomorphe à un quotient de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(1)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}} s^*(E)$, ce qui permet de le munir de la norme adélique induite. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, il est muni de la norme adélique induite.

Proposition 7.1. *Soit $x$ un point de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$. Alors*

$$l(x) = \frac{n}{n+1} + \min_F\left(\frac{-n\,\widehat{\deg}(F)}{\operatorname{codim}_E(F)h(x)}\right),$$

*où $F$ décrit l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de $E$ contenant la droite vectorielle correspondant à $x$ et* $\operatorname{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

*Remarque* 7.2. Si $n = 1$, l'unique $F$ qui intervient est la droite vectorielle correspondant à $x$ ce qui redonne $l(x) = \frac12 + \frac12 = 1$, formule qui découle directement de la définition de la liberté dans ce cas.

Lemme 7.3. *Pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ on a la relation*

$$-\widehat{\deg}(F) \geqslant 0.$$

*Démonstration.* Choisissons une partie $I$ de l'ensemble $\{0,\ldots,n\}$ de sorte que la projection $(x_0,\ldots,x_n) \mapsto (x_i)_{i\in I}$ définisse un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de $F$ sur $\mathbf{K}^{\dim(F)}$. Compte tenu des normes choisies, cette projection induit des projections orthogonales lorsqu'on tensorise par un complété archimédien. L'image de l'intersection $M_F = F \cap \mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ est contenue dans $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{\dim(F)}$. Donc

$$\mathrm{Vol}(F_{\mathbf{R}}/M_F) \geqslant \mathrm{Vol}(\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}/\mathscr{O}_{\mathbf{K}})^{\dim(F)}.$$

On conclut en appliquant la remarque 4.2 □

*Démonstration de la proposition 7.1.* Notons $D$ la droite vectorielle de $E$ correspondant à $x$. L'espace tangent à $\mathbf{P}^n(E)$ en $x$ est canoniquement isomorphe au quotient $D^\vee \otimes E/\mathbf{K}$ où l'injection de $\mathbf{K}$ dans le produit tensoriel $D^\vee\otimes E$ est la composée de l'isomorphisme canonique de $\mathbf{K}$ sur $D^\vee \otimes D$ et du plongement de $D^\vee\otimes D$ dans $D^\vee \otimes E$.

Soit $F'$ un sous-espace vectoriel de $T_x\mathbf{P}^n(E)$. On note $\widetilde{F}'$ son image inverse dans $D^\vee\otimes E$. Il existe un unique sous-espace vectoriel $F$ de $E$ tel que $\widetilde{F}'$ soit $D^\vee\otimes F$. L'espace vectoriel $F'$ est donc isomorphe au quotient $D^\vee\otimes F/\mathbf{K}$. Cet isomorphisme est compatible avec les normes adéliques choisies, il en résulte que

$$\widehat{\deg}(F') = \widehat{\deg}(F) + \dim(F)\,\widehat{\deg}(D^\vee) = \widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D)$$

D'un autre côté, la hauteur de $x$ n'est rien d'autre que le degré arithmétique de l'espace tangent en ce point, c'est à dire qu'elle est donnée par la formule $h(x) = -(n+1)\,\widehat{\deg}(D)$. Par définition du polygône de Newton, on obtient que le valeur de $m_{T_x\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}}(n-1)$ est donnée par

$$\max_F\left(\frac{\widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D) + (n+1)\,\widehat{\deg}(D)}{n+1-\dim(F)}\right) - (n+1)\,\widehat{\deg}(D)$$
$$= -\,n\,\widehat{\deg}(D) + \max_F\left(\frac{\widehat{\deg}(F)}{\mathrm{codim}(F)}\right),$$

où $F$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels stricts de $E$ contenant $D$. Par conséquent,

$$\mu_n(T_x\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}}) = -\,\widehat{\deg}(D) + \min_F\left(\frac{-\,\widehat{\deg}(F)}{\mathrm{codim}(F)}\right).$$

Compte tenu du lemme 7.3, cette quantité est positive. La définition de la liberté de $x$ et l'expression pour la hauteur de $x$ donne les relations

$$l(x) = \frac{n}{h(x)}\mu_n(T_x(\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}})) = \frac{n}{n+1} + \min_F\left(\frac{-n\,\widehat{\deg}(F)}{\mathrm{codim}_E(F)h(x)}\right)$$

comme annoncé. □

COROLLAIRE 7.4. *Avec la norme définie ci-dessus, la liberté d'un point rationnel de l'espace projectif de dimension $n$ est minorée par $\frac{n}{n+1}$.*

*Démonstration.* Cela résulte de la proposition et du lemme 7.3. □

*Remarques* 7.5. a) Ce résultat dépend de la métrique adélique choisie ; en effet, il est possible de modifier une métrique adélique de façon à donner une valeur arbitraire dans $[0,1]$ à la liberté d'un point fixé. Toutefois, compte-tenu du lemme 5.3, pour tout espace projectif $\mathbf{P}$ de dimension $n$ muni d'une métrique adélique et tout $\alpha < \frac{n}{n+1}$, l'ensemble

$$\{\, x \in \mathbf{P}(\mathbf{K}) \mid l(x) < \alpha \,\}$$

est fini.
b) Notons également que si l'on choisit un sous-espace vectoriel strict $F$ de $E$, alors la liberté d'un point $x$ de $\mathbf{P}(F) \subset \mathbf{P}(E)$ tend vers $\frac{n}{n+1}$ lorsque sa hauteur tend vers $+\infty$. Le lemme 7.7 qui suit montre que ce comportement est « atypique ».

COROLLAIRE 7.6. *Pour tout choix de métrique adélique, l'espace projectif vérifie la formule empirique* (F) *et la distribution empirique* (E).

*Démonstration.* Rappelons que $\varepsilon(B)$ tend vers 0 lorsque $B$ tend vers $+\infty$. Pour la hauteur choisie dans ce paragraphe, compte tenu du corollaire 7.4, il existe un nombre réel $B_0$ tel que l'ensemble des points rationnels de l'espace projectif vérifiant $l(P) \leqslant \varepsilon(B)$ soit vide pour tout $B > B_0$. Pour une hauteur arbitraire, lorsque $B > B_0$, il résulte de la proposition 5.4 que tout point rationnel de l'espace projectif tel que $l(P) \leqslant \varepsilon(B)$ a une hauteur bornée par une constante réelle. Le résultat découle alors des propositions 6.1.1 et du corollaire 6.2.17 de [Pe1], qui se basent en partie sur l'étude de S. Schanuel [Sc]. □

7.1.2. *liberté moyenne.* Nous allons maintenant démontrer que le nombre de points de l'espace projectif dont la liberté vérifie $l(x) < 1 - \eta$ est négligeable devant $B$ et donne donc une contribution négligeable.

PROPOSITION 7.7. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\eta > 0$ on ait la majoration*

$$\sharp\{\, x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \mid H(x) \leqslant B \text{ et } l(x) < 1 - \eta \,\} < CB^{1-\eta}$$

*pour tout nombre réel $B \geqslant 1$.*

*Démonstration.* Par la remarque 7.2, le résultat est vrai pour $n = 1$. On suppose donc $n \geqslant 2$. Compte tenu de la proposition 7.1, la condition $l(x) < 1 - \eta$ est équivalente à l'existence d'un sous-espace $F$ de $E$ de codimension $c$ qui contient la droite $D$ correspondant à $x$ et tel que

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n\,\widehat{\deg}\, F}{c\, h(x)} \leqslant 1 - \eta$$

c'est-à-dire

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant \frac{c}{n}\Big(\frac{1}{n+1} - \eta\Big)h(x). \tag{7}$$

Considérons un instant la grassmannienne $\mathrm{Gr}(n+1-c, E)$ des sous-espaces de codimension $c$ dans $E$. L'espace tangent en un point $F$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(F, E/F)$. On en déduit que la hauteur logarithmique de $F$, relativement au fibré anticanonique de la grassmannienne peut être donné par

$$h(F) = -c\,\widehat{\deg}(F) + (n+1-c)\,\widehat{\deg}(E/F) = -(n+1)\,\widehat{\deg}(F).$$

D'après l'estimation du nombre de points de hauteur bornée sur la grassmannienne (*cf.* [FMT, §2]), il existe donc une constante $C$ telle que le nombre de sous-espaces $F$ de codimension $c$ de $E$ tels que $-\widehat{\deg}(F) \leqslant \log(P)$ soit majoré par $CP^{n+1}$ pour tout $P > 1$.
D'autre part, pour un sous-espace $F$ fixé, on reprend la démonstration de S. Schanuel dans [Sc]. Pour chaque classe d'idéaux $\overline{\mathfrak{a}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$, on choisit un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$ représentant $\overline{\mathfrak{a}}$. On considère alors l'ensemble $\mathscr{D}(F, \mathfrak{a}, B)$ des droites $D \subset F$ avec $H(D) \leqslant B$ pour lesquelles il existe $(x_0, \dots, x_n) \in D \cap \mathscr{O}_{\mathbf{K}}^{n+1}$ tel que $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$. Soit $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ le $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}$-module $\mathfrak{a}^{n+1} \cap F$ ; il forme un réseau du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ ; la longueur minimale d'un vecteur de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ admet une minoration indépendante de $F$.
Pour toute place archimédienne $w$, notons $E_w = E \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$. On identifie $E_{\mathbf{R}} = E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ avec $\bigoplus_{w|\infty} E_w$. Soit

$$\textsc{log} : \prod_{w|\infty} E_w - \{0\} \to \prod_{w|\infty} \mathbf{R}$$

l'application $(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\log(\|x_w\|_w))_{w|\infty}$ et soit $\sigma$ l'application linéaire sur $L = \prod_{w|\infty} \mathbf{R}$ donnée par $(x_w)_{w|\infty} \mapsto \sum_{w|\infty} x_w$ et pr la projection orthogonale de $L$ sur $\ker(\sigma)$. Rappelons que l'application

$$\textsc{log} : \prod_{w|\infty} \mathbf{K}_w^* \to L$$

donnée par $(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\log(|x_w|_w))_{w|\infty}$ envoie $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^*$ sur un réseau $\Lambda$ de $\ker(\sigma)$. On note $\Delta$ un domaine fondamental pour $\Lambda$ dans $\ker(\sigma)$, donné par une base de $\Lambda$. On considère le domaine $\mathscr{B}$ définit par la relation

$$\mathscr{B} = \Big\{ y \in \prod_{w|\infty} E_w - \{0\} \;\Big|\; \mathrm{pr}(\textsc{log}(y)) \in \Delta \text{ et } \sigma(\textsc{log}(y)) \leqslant 0 \Big\}.$$

L'ensemble $\textsc{log}^{-1}(\mathrm{pr}^{-1}(\Delta))$ est le domaine fondamental pour l'action du groupe $\mathscr{O}_{\mathbf{K}}^*$ modulo les racines de l'unité $\mu_\infty(\mathbf{K})$ tel qu'il est défini par Schanuel [Sc, p. 437]. L'ensemble $\mathscr{B}$ est invariant par les applications de la forme

$$(x_w)_{w|\infty} \mapsto (\sigma_w(x_w))_{w|\infty} \tag{8}$$

où $\sigma_w$ est une isométrie de l'espace euclidien $E_w$.

L'espace $F_{\mathbf{R}} = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$, vu comme sous-espace de $E_{\mathbf{R}}$ est la somme directe des $F_w = F \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_w$ pour $w \mid \infty$. Il existe donc une famille d'isométries $(\sigma_w)_{w|\infty}$ telle que l'application donnée par (8) envoie $F_{\mathbf{R}}$ sur $F_{0\mathbf{R}}$, où $F_0$ est donné par l'annulation des $c$ dernières coordonnées. L'ensemble $\mathscr{B}_F = F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cap \mathscr{B}$ est donc isométrique à l'ensemble $\mathscr{B}_{F_0}$. Le domaine $\mathscr{B}_F$ est donc un domaine borné dont le bord est une réunion finie d'images d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ et le nombre d'applications lipshitziennes intervenant ainsi que les constantes de Lipschitz ne dépend pas de $F$.
Le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}(F, \mathfrak{a}, B)$ est majoré par le nombre de points de $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ dans le domaine dilaté $T\mathscr{B}_F$, où le nombre réel $T$ est défini par la relation $B = N(\mathfrak{a})^{-n-1}T^{[\mathbf{K}:\mathbf{Q}](n+1)}$. D'autre part, le réseau $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Lambda_{\mathscr{O}_{\mathbf{K}}}$. À l'aide de [MV, p. 437, lemma 2], on obtient donc une majoration du nombre de droites dans $\mathscr{D}(F, \mathfrak{a}, B)$ de la forme

$$C\left(\frac{B^{\frac{\dim(F)}{n+1}}}{\exp(-\widehat{\deg}\, F)} + B^{\frac{\dim(F)-1}{n+1}}\right).$$

À l'aide d'une sommation par partie on en déduit que le cardinal des droites $D$ avec $H(D) \leqslant B$ qui sont contenues dans un sous-espace $F$ de codimension $c$ vérifiant (7) est majoré par

$$\begin{aligned}C\Big(B^{n\frac{c}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\eta\right)+\frac{n+1-c}{n+1}} + B^{(n+1)\frac{c}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\eta\right)+\frac{n+1-c-1}{n+1}}\Big)&\\ = C(B^{1-c\eta} + B^{1-\frac{n-c}{n(n+1)}-\frac{n+1}{n}c\eta}).&\end{aligned}$$

La proposition s'obtient en sommant cette majoration sur $c \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

*Remarque* 7.8. Cette proposition implique que le cardinal de l'ensemble

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant\log(B)} = \{\, x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{K}) \mid \mu_{\max}(x) \leqslant \log(B) \,\}$$

est minoré par une expression de la forme $C_\varepsilon B^{n(1-\varepsilon)}$ pour tout $\varepsilon > 0$. En effet, si $l(x) \geqslant 1 - \eta$, alors $\mu_{\min}(x) \geqslant \frac{h(x)}{n}(1 - \eta)$ et donc

$$\mu_{\max}(x) \leqslant h(x) - (n-1)\mu_{\min}(x) \leqslant \frac{h(x)}{n}(1 + (n-1)\eta).$$

Par conséquent, si on pose $\varepsilon = 1 - (1 + (n-1)\eta)^{-1}$, les conditions $l(x) \geqslant 1 - \eta$ et $H(x) \leqslant B^{n(1-\varepsilon)}$ entraînent la condition $\mu_{max}(x) \leqslant \log(B)$. Il semble raisonnable d'espérer que le cardinal de cet ensemble est en fait équivalent à une expression de la forme $C'(\mathbf{P}^n_{\mathbf{K}})B^n$.

COROLLAIRE 7.9. *La moyenne de la liberté, définie par*

$$\frac{1}{\sharp\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}} \sum_{x\in\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H\leqslant B}} l(x)$$

*converge vers* 1 *lorsque* $B$ *tend vers* $+\infty$.

*Démonstration.* Par la proposition précédente, pour tout $\eta > 0$, et tout $B \geqslant 1$,

$$1 \geqslant \frac{1}{\sharp \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}} \sum_{x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}} l(x) \geqslant (1-\eta)(1 - CB^{-\eta}). \qquad \square$$

### 7.2. Le produit de variétés

7.2.1. *Préliminaires.* Nous allons commencer par un lemme classique sur les pentes d'une somme directe.

Lemme 7.10. *Soient $E_1$ et $E_2$ des espaces vectoriels munis de normes adéliques classiques de dimensions respectives $n_1$ et $n_2$. On désigne par $\mathscr{P}(E_1)$ et $\mathscr{P}(E_2)$ les polygônes de Newton correspondants. Alors le polygône de Newton de la somme $E_1 \oplus E_2$ est*

$$\mathscr{P}(E_1 \oplus E_2) = \mathscr{P}(E_1) + \mathscr{P}(E_2).$$

*En particulier, on a la relation $\mu_{n_1+n_2}(E_1 \oplus E_2) = \min(\mu_{n_1}(E_1), \mu_{n_2}(E_2))$.*

*Démonstration.* Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E_1 \oplus E_2$. Notons $p_1$ la projection de $E_1 \oplus E_2$ sur $E_1$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2 \cap F \longrightarrow F \longrightarrow p_1(F) \longrightarrow 0.$$

Par définition de la somme de fibrés adéliquement normés (*cf.* l'exemple 3.6 c)), pour toute place $w$, la projection induite de $(E_1 \oplus E_2) \otimes \mathbf{K}_w$ sur $E_2 \otimes \mathbf{K}_w$ est 1-lipschitzienne, et, par conséquent,

$$\widehat{\deg}(F/(E_2 \cap F)) \leqslant \widehat{\deg}(p_1(F)) \quad \text{et} \quad \widehat{\deg}(F) \leqslant \widehat{\deg}(E_2 \cap F \oplus p_1(F)).$$

Le polygône $\mathscr{P}(E_1 \oplus E_2)$ est donc l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de la forme $(\dim(F_1) + \dim(F_2), \widehat{\deg}(F_1) + \widehat{\deg}(F_2))$ où $F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E_i$ pour $i \in 1, 2$. Cela démontre la première assertion. Compte tenu de la définition des fonctions $m$, on obtient l'égalité

$$m_{E_1 \oplus E_2}(n_1 + n_2 - 1) = \max(m_{E_1}(n_1 - 1) + \widehat{\deg}(E_2), \widehat{\deg}(E_1) + m_{E_2}(n_2 - 1)).$$

La seconde relation en découle. $\square$

7.2.2. *Un cas particulier.* Avant de passer au cas général du produit de deux variétés, nous allons traiter le cas particulier d'un produit de droites projectives qui illustre bien la notion de liberté.

Proposition 7.11. *Soit $n$ un entier strictement positif. Pour toute application $\varepsilon$ de $\mathscr{D}$, la variété $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$ vérifie la formule empirique 6.13.*

*Démonstration.* Dans cette preuve, $V$ désigne $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})^n$. Le fibré tangent $TV$ est isomorphe à la somme des images inverses des fibres $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ et on munit $V$ de la métrique induite par les métriques utilisées pour $\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$, suivant l'exemple 3.6 c). Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un point rationnel de $V$. L'espace tangent $T_{\boldsymbol{x}}V$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^n T_{x_i}\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}$ et on déduit du lemme précédent que $\mu_n(\boldsymbol{x}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(\mu_1(x_i))$. Mais $\mu_1(x_i) = h(x_i)$ ce qui donne la formule

$$l(\boldsymbol{x}) = \frac{n \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(h(x_i))}{\sum_{i=1}^n h(x_i)}.$$

Fixons $B \geqslant 2$ et $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif. Il nous faut donc estimer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \leqslant \min\Big(\log(B), \frac{n}{\varepsilon} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (h(x_i))\Big) \right\},$$

qu'on note $V(\mathbf{K})_{H \leqslant B}^{l \geqslant \varepsilon}$, à partir de l'estimation de E. Landau [Lan]

$$\sharp\{\, x \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K}) \mid h(x) \leqslant \log(B) \,\} = cB + O(B^{1-\delta})$$

avec $c = C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})$ et $\delta > 0$. On fixe temporairement $\eta$ avec $0 < \eta < 1$. Soit $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$. On écrit $|\boldsymbol{t}| = \sum_{i=1}^{n} t_i$. On a donc

$$\begin{aligned} &\sharp \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{K})^n \,\middle|\, (h(x_i))_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \prod_{i=1}^{n} [t_i, t_i + \eta] \right\} \\ &= c^n e^{|\boldsymbol{t}|} (e^{\eta} - 1)^n + O(e^{|\boldsymbol{t}| - \delta \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i)}) \\ &= c^n e^{|\boldsymbol{t}|} \eta^n + O(e^{|\boldsymbol{t}|} \eta^{n+1}) + O(e^{|\boldsymbol{t}| - \delta \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i)}). \end{aligned} \tag{9}$$

On considère alors le simplexe compact $\Delta_\varepsilon(B)$ de $\mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ défini par l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant \min(\log(B), \frac{n}{\varepsilon} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} t_i).$$

Notons que, si $\boldsymbol{t} \in \Delta_\varepsilon(B)$, le terme d'erreur de (9) est majoré par $O(e^{|\boldsymbol{t}|} \eta^{n+1}) + O(e^{(1 - \delta\varepsilon/n)|\boldsymbol{t}|})$. Quadrillons maintenant $\mathbf{R}^n_{\geqslant 0}$ par des cubes de côté $\eta$ ; le nombre de cubes rencontrant le bord de $\Delta_\varepsilon(B)$ est majoré par $O((\log(B)/\eta)^{n-1})$. En faisant une comparaison entre somme et intégrale on obtient donc l'estimation

$$\sharp V(\mathbf{K})_{H \leqslant B}^{l \geqslant \varepsilon} = c^n \int_{\Delta_\varepsilon(B)} e^{|\boldsymbol{t}|} \mathrm{d}\boldsymbol{t} + O(B \log(B)^n \eta) + O\left( \left( \frac{\log(B)}{\eta} \right)^n B^{1 - \delta\varepsilon/n} \right),$$

les constantes implicites dans les $O$ étant indépendantes de $\varepsilon$. En prenant $\eta = B^{-\delta\varepsilon/2n^2}$ on obtient un terme d'erreur en $O(\log(B)^n B^{1 - \delta\varepsilon/(2n^2)})$. L'intégrale vaut $BP_\varepsilon(\log(B))$ où $P_\varepsilon$ est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{(n-1)!} + O(\varepsilon)$. En utilisant l'égalité $C(V) = \frac{1}{(n-1)!} c^n$, on en déduit la formule empirique 6.13. $\square$

*Remarque* 7.12. Il convient de noter que cette démonstration donne un excellent contrôle du terme d'erreur, mais avec une constante différente, si on considère les points de liberté strictement supérieure à un nombre réel $\varepsilon$ *fixé*. En particulier, le polynôme en $\log(B)$ dans ce cas ne provient que de l'intégrale $\int_{\Delta_\varepsilon(B)} e^{|\boldsymbol{t}|} \mathrm{d}\boldsymbol{t}$. Cette situation est en contraste avec l'étude faite par S. Pagelot [Pa] de $(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2_{H \leqslant B}$. En effet, dans ce cas, un calcul direct démontre que chaque fibre verticale ou horizontale au dessus d'un point rationnel $P$ de la droite projective a une contribution équivalente à $\frac{C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})}{H(P)} B$ dans l'estimation asymptotique et contribue donc au deuxième terme du polynôme $B$. Minorer la liberté des points décomptés par $\varepsilon$ majore cette contribution par

$$\frac{C(\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}})}{H(P)}\min(B, H(P)^{2/\varepsilon}).$$

7.2.3. *Cas général.* Revenons maintenant au cas général. Soient $V_1$ et $V_2$ de belles variétés de dimensions respectives $n_1$ et $n_2$ strictement positives. On les suppose munies de métriques adéliques. Pour $i \in \{1,2\}$, on note $p_i$ la projection de $V_1 \times V_2$ sur $V_i$, $h_i$ la hauteur logarithmique définie par la métrique sur $V_i$ et $l_i$ la fonction liberté associée. Comme le fibré tangent $T(V_1 \times V_2)$ est isomorphe à la somme directe $p_1^* TV_1 \oplus p_2^* TV_2$, on peut munir $V_1 \times V_2$ de la métriques induite sur la somme directe (*cf.* exemple 3.6 c)).

PROPOSITION 7.13. *Soient $(x_1,x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$. Si $h_1(x_1)$ ou $h_2(x_2)$ est négatif alors $l(x_1,x_2)=0$. Dans le cas contraire, on a la relation*

$$l(x_1,x_2) = (n_1+n_2)\frac{\min(l_2(x_2)h_2(x_2)/n_2, l_1(x_1)h_1(x_1)/n_1)}{h_1(x_1)+h_2(x_2)}.$$

*Démonstration.* En effet, dans ce cas on a $\mu_{n_i}(T_{x_i}V_i) = h_i(x_i)l_i(x)/n_i$ pour $i \in \{1,2\}$ et on applique le lemme 7.10. □

*Remarque* 7.14. Comme noté dans un cadre plus général dans la remarque 5.6, si on fixe un point $x_1$ de $V_1(\mathbf{K})$, la liberte de $y \in p_1^{-1}(x_1)$ tend vers 0 quand sa hauteur tend vers $+\infty$.

On pose $n = n_1 + n_2$. Soient $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ des applications de l'ensemble $\mathscr{D}$ introduit dans la définition 6.11. On note $\varepsilon' \geqslant \varepsilon$ si $\varepsilon'(B) \geqslant \varepsilon(B)$ pour $B \geqslant 1$. Dans le théorème qui suit, on désigne par $\varepsilon$ une application de l'ensemble $\mathscr{D}$ qui vérifie, en plus des conditions (i) et (ii) de la définition 6.11, la condition suivante :

(iii) L'application $t \mapsto \log(t)^{1/2}\varepsilon(t)$ est croissante.

THÉORÈME 7.15. *On suppose que les variétés $V_1$ et $V_2$ vérifient les conditions* (i) *à* (iv) *de la formule empirique et que, pour $i \in \{1,2\}$ et toute application $\varepsilon'$ de l'ensemble $\mathscr{D}$ telle que $\varepsilon' \geqslant \frac{n_i^2}{2n^2}\varepsilon^2$, on ait l'estimation* (F) *:*

$$\sharp V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i \leqslant B} = C(V_i)B\log(B)^{t_i-1}(1+o_{\varepsilon'}(B)),$$

*avec $t_i = \mathrm{rg}(\mathrm{Pic}(V_i))$. Alors on a l'expression*

$$\sharp(V_1 \times V_2)(\mathbf{K})^{\varepsilon-l}_{H \leqslant B} = C(V_1\times V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1}(1+o_\varepsilon(B)).$$

*Démonstration.* Quitte à remplacer $\varepsilon$ par l'application donnée par $t \mapsto \min(\frac{1}{2},\varepsilon(t))$, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer qu'on a l'inégalité $\varepsilon(1) \leqslant \frac{1}{2}$. Soit $i \in \{1,2\}$. Étant donné une application $\varepsilon'$ comme dans l'énoncé du théorème, l'application de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{N}$ définie par $B \mapsto V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i \leqslant B}$ est croissante. La condition $l_i(x) \geqslant \varepsilon'(B)$ impose l'inégalité $H_i(x) > 1$, si bien qu'elle vaut 0 en 1. En outre, elle est égale à sa limite à droite en tout point, donc nulle sur un voisinage de 1. On peut donc poser, pour $t \geqslant 1$,

$$\eta_{i,\varepsilon'}(t) = \sup_{B>t} \left| \frac{V_i(\mathbf{K})^{\varepsilon'-l}_{H_i \leqslant B}}{C(V_i) B \log(B)^{t_i - 1}} - 1 \right|.$$

Cela définit une application décroissante qui converge vers 0 lorsque $B$ tend vers $+\infty$.

*Remarque* 7.16. Si $S$ est un ensemble *fini* d'applications $\varepsilon'$ comme ci-dessus. L'application définie par la relation $\eta_{i,S}(t) = \max_{\varepsilon' \in S} \eta_{i,\varepsilon'}$ jouit de propriétés analogues.

Soit $(x_1, x_2)$ un point rationnel du produit. Par la proposition 7.13, la condition $l(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon(B)$ implique tout d'abord que $h_1(x_1) > 0$ et $h_2(x_2) > 0$. Par suite, elle implique également les inégalités

$$l_1(x_1) \geqslant \frac{n_1}{n} \varepsilon(B) \qquad \text{et} \qquad l_2(x_2) \geqslant \frac{n_2}{n} \varepsilon(B).$$

On note dans la suite $\varepsilon_1 = \frac{n_1}{n}\varepsilon$ et $\varepsilon_2 = \frac{n_2}{n}\varepsilon$. Nous allons découper la preuve en une série de lemmes.

LEMME 7.17. *Soit* $\lambda \in ]0,1[$ *et soit* $\varepsilon' = \lambda\varepsilon$. *Soit* $B > 1$, *pour tout* $P \in [B^{1/2}, B]$, *on a les inégalités*

$$\varepsilon'(B) \leqslant \varepsilon'(P) \leqslant 2\varepsilon'(B),$$

*et, pour tout* $P \in [B^{\varepsilon'(B)}, B]$, *on a*

$$\varepsilon'(B) \leqslant \varepsilon'(P) \leqslant \sqrt{\varepsilon'(B)}.$$

*Démonstration.* Les inégalités de gauche résultent du fait que $\varepsilon$ est supposée décroissante. Comme $t \mapsto \log(t)\varepsilon'(t)$ est croissante, on a

$$\log(B^{1/2})\varepsilon'(B^{1/2}) \leqslant \log(B)\varepsilon'(B)$$

ce qui donne la première majoration. De même, l'inégalité

$$\sqrt{\log(B^{\varepsilon'(B)})}\varepsilon'(B^{\varepsilon'(B)}) \leqslant \sqrt{\log(B)}\varepsilon'(B)$$

permet de prouver la seconde. □

LEMME 7.18. *Le cardinal de l'ensemble des* $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ *vérifiant les conditions*

$$H_1(x_1) \leqslant B^{1/2}, \quad H_2(x_2) \leqslant B^{1/2}, \quad l_1(x_1) \geqslant \varepsilon_1(B) \quad \textit{et} \quad l_2(x_2) \geqslant \varepsilon_2(B)$$

*est, à une constante près, majoré par* $B \log(B)^{t_1 + t_2 - 2}$.

*Démonstration.* Le lemme précédent permet de majorer le cardinal considéré par celui de l'ensemble des $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1) \leqslant B^{1/2},\ H_2(x_2) \leqslant B^{1/2},\ l_1(x_1) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_1(B^{1/2}) \text{ et } l_2(x_2) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_2(B^{1/2})$$

et on applique les hypothèses du théorème à $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ et $\frac{1}{2}\varepsilon_2$. □

Par symétrie, compte tenu du dernier lemme, il nous suffit d'estimer le cardinal de l'ensemble des $(x_1,x_2)\in V_1\times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1)\geqslant B^{1/2},\quad H_1(x_1)H_2(x_2)\leqslant B,\quad \text{et}\quad l(x_1,x_2)\geqslant \varepsilon(B).$$

La condition sur la liberté est la conjonction des deux conditions suivantes :

(i) $l_1(x_1)\geqslant \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_1(x_1)}\varepsilon_1(B)$ ;

(ii) $l_2(x_2)\geqslant \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_2(x_2)}\varepsilon_2(B)$.

Sous les hypothèses $H_1(x_1)\geqslant B^{1/2}$, $H_2(x_2)>1$ et $H_1(x_1)H_2(x_2)\leqslant B$, on a

$$\frac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_1(x_1)}\in[1,2]\quad \text{et}\quad \frac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{h_2(x_2)}\in\left[\frac{\log(B)}{2h_2(x_2)}+1,\frac{\log(B)}{h_2(x_2)}\right].$$

On introduit les quatres conditions suivantes

($\mathrm{i}_B^+$) $l_1(x_1)\geqslant \varepsilon_1(B)$, ($\mathrm{i}_B^-$) $l_1(x_1)\geqslant 2\varepsilon_1(B)$,

($\mathrm{ii}_B^+$) $l_2(x_2)\geqslant \left(\dfrac{\log(B)}{2h_2(x_2)}+1\right)\varepsilon_2(B)$, ($\mathrm{ii}_B^-$) $l_2(x_2)\geqslant \dfrac{\log(B)}{h_2(x_2)}\varepsilon_2(B)$.

Comme $l_2(x_2)\leqslant 1$, la condition ($\mathrm{ii}_B^+$) implique que $H_2(x_2)\geqslant B^{\frac{\varepsilon_2(B)}{2}}$. Considérons maintenant les conditions

($\mathrm{iii}_B^+$) $l_2(x_2)\geqslant \epsilon_2(B)$ et $H_2(x_2)\geqslant B^{\frac{\varepsilon_2(B)}{2}}$ ;

($\mathrm{iii}_B^-$) $l_2(x_2)\geqslant \sqrt{\epsilon_2(B)}$ et $H_2(x_2)\geqslant B^{\sqrt{\varepsilon_2(B)}}$.

Alors, sous les hypothèses précédentes, on a les implications

$$(\mathrm{i}_B^-)\Longrightarrow(\mathrm{i})\Longrightarrow(\mathrm{i}_B^+)$$

et

$$(\mathrm{iii}_B^-)\Longrightarrow(\mathrm{ii}_B^-)\Longrightarrow(\mathrm{ii})\Longrightarrow(\mathrm{ii}_B^+)\Longrightarrow(\mathrm{iii}_B^+).$$

Pour $P\in[B^{\frac12},B]$, on note $N_1^+(P,B)$ (resp. $N_1^-(P,B)$) le cardinal des $x_1\in V_1(\mathbf{K})$ tels que $H_1(x_1)\leqslant P$ et qui vérifient la condition ($\mathrm{i}_B^+$) (resp. ($\mathrm{i}_B^-$)). On note $\mathscr{E}_2^+(B)$ (resp. $\mathscr{E}_2^-(B)$) l'ensemble des $x_2\in V_2(\mathbf{K})$ tels que $H_2(x_2)\leqslant B^{\frac12}$ et qui vérifient la condition ($\mathrm{iii}_B^+$) (resp. ($\mathrm{iii}_B^-$)). Le nombre qui nous intéresse est minoré (resp. majoré) par

$$\sum_{x_2\in\mathscr{E}_2^-(B)}\left(N_1^-\left(\frac{B}{H_2(x_2)},B\right)-N_1^-(B^{\frac12},B)\right),$$

(resp. par

$$\left.\sum_{x_2\in\mathscr{E}_2^+(B)}\left(N_1^+\left(\frac{B}{H_2(x_2)},B\right)-N_1^+(B^{\frac12},B)\right)\right).$$

En appliquant une nouvelle fois le lemme 7.18, nous constatons que la contribution de $\sum_{x\in\mathscr{E}_2^+}N_1^+(B^{\frac12},B)$ est négligeable devant $B\log(B)^{t_1+t_2-1}$. Il nous reste à estimer la somme pour le terme principal.

Lemme 7.19. *Il existe une application* $\eta_1' : [1,+\infty[ \to \mathbf{R}$ *décroissante et tendant vers* 0 *en* $+\infty$ *telle que*

$$\left|\frac{N_1(P,B)}{C_1(V)P\log(P)^{t_1-1}}-1\right| \leqslant \eta_1'(B)$$

*pour* $N_1 \in \{N_1^+, N_1^-\}$, $B>1$ *et* $P \in [B^{\frac{1}{2}}, B]$.

*Démonstration.* Comme $P \in [B^{\frac{1}{2}}, B]$, le lemme 7.17 donne les inégalités $\frac{1}{2}\varepsilon_1(P) \leqslant \varepsilon_1(B) \leqslant \varepsilon_1(P)$. En appliquant la remarque 7.16 à l'ensemble $S = \{\frac{1}{2}\varepsilon_1, \varepsilon_1, 2\varepsilon_1\}$ on obtient une application décroissante $\eta_1$ de sorte que les termes d'erreur du lemme soient majorés par $\eta_1(P)$. L'application $\eta_1' : B \mapsto \eta_1(B^{1/2})$ satisfait alors la conclusion du lemme. $\square$

Ce lemme nous permet donc de nous ramener à estimer

$$\sum_{x_2\in\mathscr{E}_2(B)} \frac{1}{H_2(x_2)} \log\left(\frac{B}{H_2(x_2)}\right)^{t_!-1}$$

pour $\mathscr{E}_2 \in \{\mathscr{E}_2^+, \mathscr{E}_2^-\}$. On considère l'application $f_B : [1, B^{\frac{1}{2}}] \to \mathbf{R}$ définie par $P \mapsto \frac{1}{P}(\log(B)-\log(P))^{t_1-1}$. On note $g_B^+$ (resp. $g_B^-$) l'application qui à $P \in [1, B^{\frac{1}{2}}]$ associe le cardinal des $x \in V_2(\mathbf{K})$ tels que $H_2(x) \leqslant P$ et $l_2(x) \geqslant \varepsilon_2(B)$ (resp. $l_2(x) \geqslant \sqrt{\varepsilon_2(B)}$). En utilisant les notations des intégrales de Stieltjes (*cf.* [Te, §I.0.1]), les sommes ci-dessus se mettent donc sous la forme

$$\int_{B^{\epsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} f_B(u)\mathrm{d}g_B(u) = [f_B(u)g_B(u)]_{B^{\epsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} - \int_{B^{\epsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} f_B'(u)g_B(u)\mathrm{d}u\,, \tag{10}$$

où $\varepsilon' \in \{\epsilon_2, \sqrt{\epsilon_2}\}$ et $g_B \in \{g_B^+, g_B^-\}$ ; l'égalité vient de la formule d'Abel qui s'écrit ici comme une intégration par partie.

Lemme 7.20. *Il existe une application* $\eta_2' : [1,+\infty[ \to \mathbf{R}$ *décroissante et tendant vers* 0 *en* $+\infty$ *telle que*

$$\left|\frac{g_B(P)}{C_2(V)P\log(P)^{t_2-1}}-1\right| \leqslant \eta_2'(B)$$

*pour* $B>1$, $P \in [B^{\varepsilon_2(B)}, B^{\frac{1}{2}}]$ *et* $g_B \in \{g_B^+, g_B^-\}$.

*Démonstration.* Comme $P \in [B^{\varepsilon_2(B)}, B^{\frac{1}{2}}]$, le lemme 7.17 donne les inégalités $\varepsilon_2(P)^2 \leqslant \varepsilon_2(B) \leqslant \varepsilon_2(P)$. En appliquant la remarque 7.16 à l'ensemble $S = \{\varepsilon_2^2, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon}_2\}$, on obtient une application décroissante $\eta_2$ de sorte que les termes d'erreur du lemme soient majorés par $\eta_2(P)$. L'application $\eta_2' : B \mapsto \eta_2(B^{\epsilon_2(B)})$ satisfait alors la conclusion du lemme puisque l'application $B \mapsto \log(B)\varepsilon_2(B)$ est croissante et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. $\square$

*Fin de la preuve du théorème 7.15.* La dérivée de l'application $f_B$ est donné par $f_B'(t) = -1/t^2$ si $t_1 = 1$ et par

$$f_B'(t) = \frac{-1}{t^2}((\log(B)-\log(t))^{t_1-1} + (t_1-1)(\log(B)-\log(t))^{t_1-2})$$

si $t_1 \geqslant 2$. Il résulte du lemme 7.20 que

$$\begin{aligned}[f_B(u)g_B(u)]_{B^{\varepsilon'(B)}}^{B^{\frac{1}{2}}} &\leqslant f_B(B^{\frac{1}{2}})g_B(B^{\frac{1}{2}}) \\ &\leqslant C(V_2)\log(B^{\frac{1}{2}})^{t_1-1}\log(B^{\frac{1}{2}})^{t_2-1}(1+\eta_2'(B)) \\ &\leqslant C(V_2)\log(B)^{t_1+t_2-2}(1+\eta_2'(B)).\end{aligned}$$

Ce terme est donc négligeable devant $\log(B)^{t_1+t_2-1}$. D'autre part, pour tous nombres réels $\lambda, \mu$ tels que $0<\lambda<\mu<1$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, on a les égalités

$$\begin{aligned}&\int_{B^\lambda}^{B^\mu} \frac{1}{u^2}(\log(B)-\log(u))^{m-1}u\log(u)^{t_2-1}\mathrm{d}u \\ &= \log(B)^{t_2+m-1}\int_{B^\lambda}^{B^\mu}\left(1-\frac{\log(u)}{\log(B)}\right)^{m-1}\left(\frac{\log(u)}{\log(B)}\right)^{t_2-1}\mathrm{d}\left(\frac{\log(u)}{\log(B)}\right) \\ &= \log(B)^{t_2+m-1}\int_\lambda^\mu (1-u)^{m-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

Comme les applications $\varepsilon_2$ et $\sqrt{\varepsilon_2}$ convergent vers 0 en $+\infty$, le terme de droite de (10) est équivalent à

$$C(V_2)\log(B)^{t_1+t_2-1}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u\,.$$

Le cardinal de l'ensemble des $(x_1,x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_1(x_1) \geqslant B^{1/2}, \quad H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B, \quad \text{et} \quad l(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon(B)$$

est donc équivalent à

$$C(V_1)C(V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u\,.$$

Par symétrie, le cardinal de l'ensemble des $(x_1,x_2) \in V_1 \times V_2(\mathbf{K})$ tels que

$$H_2(x_2) \geqslant B^{1/2}, \quad H_1(x_1)H_2(x_2) \leqslant B, \quad \text{et} \quad l(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon(B)$$

est équivalent à

$$C(V_1)C(V_2)B\log(B)^{t_1+t_2-1}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u\,.$$

Mais compte tenu des propriétés de la fonction bêta, on a l'égalité

$$\int_0^1(1-u)^{t_1-1}u^{t_2-1}\mathrm{d}u = \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!}.$$

Il nous reste pour conclure à rappeler la formule suivante (cf. [Pe1, proposition 4.1]) :

$$C(V_1 \times V_2) = \frac{(t_1-1)!(t_2-1)!}{(t_1+t_2-1)!}C(V_1)C(V_2). \quad \square$$

*Remarques* 7.21. a) Le terme d'erreur donné par cette démonstration est explicite mais assez pitoyable, en particulier si on le compare avec celui obtenu dans le cas particulier d'un produit de droites projectives. Nous manquons actuellement d'exemples pour savoir quel résultat optimal pourrait être attendu ici.
b) Notons que l'ensemble défini par

$$V(K)_{\mu_{\max}\leqslant B} = \{\, x \in V(\mathbf{K}) \mid \mu_{\max}(x) \leqslant \log(B)\,\}.$$

aurait l'avantage de se comporter mieux avec le produit de variétés puisque l'ensemble $V_1 \times V_2(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant \log(B)}$ est tout simplement le produit des ensembles $V_i(\mathbf{K})_{\mu_{\max}\leqslant \log(B)}$.

7.2.4. *Équidistribution.* L'équidistribution au sens de la distribution empirique 6.17, est également stable par produit. On conserve les notations précédant le théorème 7.15.

Théorème 7.22. *On suppose que les variétés $V_1$ et $V_2$ vérifient les conditions* (i) *à* (iv) *de la formule empirique et que, pour $i \in \{1,2\}$ et toute application $\varepsilon' \in \mathscr{D}$ telle que $\varepsilon' \geqslant \frac{n_i^2}{2n^2}\varepsilon^2$ la variété $V_i$ vérifie la formule empirique* (F) *et la distribution* (E). *Alors $V_1 \times V_2$ vérifie également* (E).

*Démonstration.* Compte tenu de [Pe1, §3] et du théorème précédent, il suffit de vérifier que, pour tout bon ouvert $W \subset V_1 \times V_2(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})$, c'est-à-dire tout ouvert dont le bord $\partial W$ est de mesure nulle pour la mesure adélique, le cardinal de l'ensemble $(V_1 \times V_2(\mathbf{K}) \cap W)^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B}$ est équivalent à

$$\alpha(V_1 \times V_2)\beta(V_1 \times V_2)\boldsymbol{\omega}_{V_1\times V_2}(W \cap V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{K}})^{\mathrm{Br}})B\log(B)^{t_!+t_2-1}.$$

En outre, il suffit de le démontrer pour les ouverts qui sont de la forme $W_1 \times W_2$ où $W_1$ (resp. $W_2$) est un bon ouvert de $V_1$ (resp. $V_2$). La démonstration s'obtient alors en remplaçant simplement $V_i(\mathbf{K})$ par $V_i(\mathbf{K}) \cap W_i$ pour $i \in \{1,2\}$ dans la démonstration du théorème 7.15. □

7.3. Compatibilité avec la méthode du cercle. Il est connu que les résultats de la méthode du cercle sont compatibles avec la version initiale du principe de Batyrev et Manin ([FMT, §1.4] et [Pe1, corollaire 5.4.9]) en prenant comme ouvert de Zariski la variété elle-même. La difficulté ici, comme dans le cas de l'espace projectif, est donc de démontrer que les points de petite liberté et de hauteur bornée donnent une contribution négligeable.
Soit $V$ une intersection complète lisse de $m$ hypersurfaces de degrés respectifs $d_1, \dots, d_m$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$ avec $d_i \geqslant 2$ pour $i$ appartenant à $\{1, \dots, m\}$. On pose $|\boldsymbol{d}| = \sum_{i=1}^m d_i$. On suppose que la dimension $n = N - m$ de $V$ vérifie $n \geqslant 3$. Rappelons que, dans ce cas, le torseur universel de $V$ s'identifie au cône épointé $W \subset \mathbf{A}^{N+1}_{\mathbf{K}} - \{0\}$ au-dessus de $V$. On note $\pi$ la projection de $W$ vers $V$. On munit l'espace projectif de la même métrique adélique qu'au paragraphe 7.1. Le fibré tangent de $V$ est alors un sous-fibré de l'image inverse de $T\mathbf{P}^N_{\mathbf{K}}$ sur $V$ et on le munit de la métrique adélique induite.

Proposition 7.23. *Soit $x \in V(\mathbf{K})$ et soit $y \in \pi^{-1}(x)$. Alors la liberté $l(x)$ est donnée par l'expression*

$$\frac{n}{h(x)} \max\left(0, \min_F\left(\frac{\widehat{\deg}(T_yW) - \widehat{\deg}(F)}{n+1-\dim(F)}\right) - \widehat{\deg}(D)\right)$$

*qui, à un terme $O(\frac{1}{h(x)})$ près, peut s'écrire*

$$\frac{n}{N+1-|\boldsymbol{d}|} \max\left(0, 1 + \min_F\left(\frac{m - |\boldsymbol{d}| - (N+1-|\boldsymbol{d}|)\,\widehat{\deg}(F)/h(x)}{n+1-\dim(F)}\right)\right)$$

*où $F$ décrit l'ensemble des sous-espaces stricts de $T_yW$ contenant $y$.*

*Remarque* 7.24. Par la remarque 4.7 b), à un terme en $O(\frac{1}{h(x)})$ près, il suffit de considérer les hyperplans $F$ de $T_yW$. La condition $l(x) < \varepsilon(B)$ se traduit donc essentiellement par l'existence d'un hyperplan $F \subset T_yW$ tel que

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant \left(\frac{\varepsilon(B)}{n} + \frac{|\boldsymbol{d}| - 1 - n}{N+1-|\boldsymbol{d}|}\right) h(x).$$

Cette condition peut être vue comme l'existence d'un « petit » vecteur dans le réseau dual du réseau $T_yW \cap \mathbf{Z}^{N+1}$.

*Démonstration.* Notons $E = \mathbf{K}^{n+1}$ et $D$ la droite de l'espace vectoriel $E$ correspondant au point $x$. L'espace tangent $T_xV$ s'identifie alors au quotient de l'espace $D^\vee \otimes T_yW$ par $D^\vee \otimes D$. Soit $F'$ un sous-espace de $T_xV$. Il existe un unique sous-espace $F$ de $T_yW$ contenant $D$ tel que $F'$ corresponde par l'identification précédente au quotient de $D^\vee \otimes F$ par $D^\vee \otimes D$. Par conséquent,

$$\widehat{\deg}(F') = \widehat{\deg}(F) + \dim(F)\,\widehat{\deg}(D^\vee) = \widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D).$$

Or $h(x)$ vaut $\widehat{\deg}(T_xV) = \widehat{\deg}(T_yW) - (n+1)\,\widehat{\deg}(D)$. Par conséquent, la pente minimale $\mu_n(T_xV)$ est donnée par la formule

$$\begin{aligned}&\min_F\left(\frac{\widehat{\deg}(T_yW) - (n+1)\,\widehat{\deg}(D) - (\widehat{\deg}(F) - \dim(F)\,\widehat{\deg}(D))}{n - (\dim(F) - 1)}\right)\\ &= \min_F\left(\frac{\widehat{\deg}(T_yW) - \widehat{\deg}(F)}{n+1-\dim(F)}\right) - \widehat{\deg}(D).\end{aligned}$$

En divisant par $h(x)/n$, on obtient l'expression de la liberté. Pour la deuxième expression, il suffit de remarquer que

$$|h(x) + (N+1-|\boldsymbol{d}|)\,\widehat{\deg}(D)|$$

est majoré par une constante puisque le fibré anticanonique est isomorphe à $\mathscr{O}_V(N+1-|\boldsymbol{d}|)$. □

*Remarque* 7.25. Contrairement au cas de l'espace projectif, on ne peut évidemment pas espérer, en général, trouver de minimum absolu strictement positif pour la liberté. Par exemple, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ se réalise comme une quadrique déployée et on a vu que la borne inférieure de la liberté dans ce cas est nulle.

De même, si on considère une surface cubique, les points sur les 27 droites de la surface ont forcément une liberté nulle à l'exception près d'un nombre fini d'entre eux.

PROPOSITION 7.26. *Soit $Q$ une quadrique projective lisse de dimension $n \geqslant 3$ sur $\mathbf{Q}$, Alors pour tout application $\varepsilon$ de l'ensemble $\mathscr{D}$, on a l'équivalence*

$$\sharp Q(\mathbf{Q})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} \sim C(Q)B$$

*quand $B$ tend vers $+\infty$.*

*Démonstration.* Compte tenu de [Pe1][corollaire 5.4.9] qui repose sur le résultat très général de Birch [Bir], il suffit de démontrer que dans ce cas particulier, le nombre de points $x$ de la quadrique vérifiant $H(x) \leqslant B$ et $l(x) < \varepsilon(B)$ sont en nombre négligeable. Dans ce cas particulier, la formule de la proposition 7.23 donne

$$l(x) \geqslant 1 + \min_F \left( \frac{-1 - n\,\widehat{\deg}(F)/h(x)}{n+1-\dim(F)} \right) + O\left(\frac{1}{h(x)}\right).$$

Soit $W \subset \mathbf{A}^{n+1}_{\mathbf{Q}} - \{0\}$ le cône épointé au-dessus de la quadrique $Q$. Soit $y$ un représentant de $x$ dans $\mathbf{Q}^{n+1}$. La condition $l(x) < \varepsilon(B)$ implique donc l'existence d'un sous-espace vectoriel $F$ de $T_yW$ de codimension 1 dans cet espace tel que

$$-\widehat{\deg}(F) \leqslant C + \frac{1}{n}\epsilon(B)\log(B).$$

En reprenant le raisonnement fait pour démontrer la proposition 7.7, le nombre de tels sous-espaces est majoré à une constante près par $B^{\frac{n+2}{n}\varepsilon(B)}$ et chacun d'entre eux contient au plus $C'B^{\frac{n}{n+1}}$ points $x$ avec $H(x) < B$, ce qui permet de conclure. □

*Remarque* 7.27. Malheureusement, cette preuve ne s'étend pas directement au cas du degré $d \geqslant 3$.

## 8. Compatibilité avec les contre-exemples

L'objectif de cette partie de l'article est de vérifier que la condition sur la liberté détecte bien les mauvais points. Nous allons donc passer en revue un certain nombre de contre-exemples connus à la question initiale de Batyrev et Manin et analyser la liberté des points rationnels des variétés faiblement accumulatrices dans chacun de ces cas.

8.1. RAPPELS SUR LES PARTIES ACCUMULATRICES. Commençons par rappeler quelques notions concernant les sous-ensembles accumulateurs. Pour les ensembles minces, on étend la définition de Serre [Se2, §9.1] de la façon suivante :

DÉFINITION 8.1. Soit $V$ une bonne variété sur le corps de nombres $\mathbf{K}$, une partie *mince* de $V(\mathbf{K})$ est une partie $M$ telle qu'il existe un morphismes de variétés $\pi : X \to V$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) La partie $M$ est contenue dans l'image $\pi(X(\mathbf{K}))$ ;

(ii) La fibre de $\pi$ au point générique est finie et l'application $\pi$ n'a pas de section rationnelle.

*Remarque* 8.2. Il convient de noter qu'avec cette définition, l'ensemble des points rationnels d'une courbe elliptique est mince. En effet en choisissant un système de représentants $(P_1, \ldots, P_k)$ du quotient fini $E(\mathbf{K})/2E(\mathbf{K})$, on définit l'application $\pi : \coprod_{i=1}^k E \to E$ qui envoie un point $P$ de la $i$-ème copie de $E$ sur $2P + P_i$.

D'après [Se2, §13.1, théorème 3], dans l'espace projectif, la contribution du nombre de points de hauteur bornée d'un ensemble mince est négligeable. Du point de vue du programme de Batyrev et Manin, un ensemble mince qui ne vérifie pas cela est pathologique. Définissons cela plus précisément.

Définition 8.3. Soit $V$ une bonne variété sur $\mathbf{K}$ munie d'une métrique adélique et soit $M$ une partie mince non vide de $V(\mathbf{K})$. On dit que $M$ est *faiblement accumulatrice* si pour tout ouvert $U$ de $V$ pour la topologie de Zariski qui rencontre l'adhérence de $M$, il existe un ouvert de Zariski non vide $W$ de $V(\mathbf{K})$ tel que

$$\varlimsup_{B \to +\infty} \frac{\sharp(M \cap U(\mathbf{K}))_{H \leqslant B}}{\sharp(W(\mathbf{K}))_{H \leqslant B}} > 0,$$

la limite supérieure étant considérée dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Les contre-exemples connus à la question initiale de Batyrev et Manin proviennent d'ensembles minces faiblement accumulateurs qui sont denses pour la topologie de Zariski.

8.2. Les surfaces. Dans le cas des surfaces, les ensembles accumulateurs connus sont donnés par des *courbes exceptionnelles*, que nous définissons ici comme les courbes rationnelles lisses d'auto-intersection négative. Nous parlerons de *belle surface* pour une belle variété de dimension 2.

Proposition 8.4. *Soit $S$ une belle surface sur $\mathbf{K}$ et soit $L$ une courbe exceptionnelle de $S$. Alors $l(x) = 0$ pour tout point $x$ de $L(\mathbf{K})$ en dehors d'un nombre fini.*

*Démonstration.* Par la formule d'adjonction, on a la relation

$$\deg(\omega_L) = L.L + L.\omega_S$$

où le point désigne le degré d'intersection. Comme $L$ est une courbe rationnelle exceptionnelle, on en déduit que $L.\omega_S^{-1} < 2$. Fixons un isomorphisme $\varphi : \mathbf{P}^1_{\mathbf{K}} \to L$. On obtient l'inégalité $\mu_1(\varphi) + \mu_2(\varphi) < 2$. Mais l'application $T\varphi$ fournit un morphisme non nul de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{K}}}(2)$ dans $\varphi^*(TS)$, ce qui prouve que $\mu_1(\varphi) \geqslant 2$ et donc $\mu_2(\varphi) < 0$. On applique alors la proposition 5.8. $\square$

*Remarque* 8.5. La proposition indique que pour toute application $\varepsilon$ appartenant à $\mathscr{D}$, le cardinal de l'intersection de l'ensemble $S(\mathbf{K})^{\varepsilon - l}_{H \leqslant B}$ avec $L(\mathbf{K})$ est majoré par une constante indépendante de $B$.

8.3. Les fibrations. Rappelons que le contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel [BT2] repose sur le fait géométrique que, dans une fibration, le rang du groupe de Picard d'une fibre peut varier en étant éventuellement supérieur au rang du groupe de Picard de la fibre générique, auquel cas le nombre de points sur chacune de ces fibres peut faire apparaître une puissance de $\log(B)$ supérieure à celle attendue pour l'ensemble de la variété. Nous allons maintenant voir que le fait d'imposer en outre une minoration sur la liberté borne la hauteur des points considérés dans une fibre donnée si bien qu'il n'y a plus de contradiction entre le nombre de points esperé dans une fibre et celui espéré pour la variété.

Proposition 8.6. *Soit $X$ et $Y$ de belles variétés de dimensions respectives $m$ et $n$ avec $n < m$. Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme dominant. Soit $\varepsilon$ une application de $\mathscr{D}$. Il existe une constante $C$ telle que, pour tout point rationnel $y$ de $Y$ qui n'est pas une valeur critique pour $\varphi$, tout point $x$ de $X_y(\mathbf{K})^{\varepsilon - l}_{H \leqslant B}$ vérifie*

$$H(x) \leqslant \min(B, (CH(y))^{\frac{m}{n\varepsilon(B)}}).$$

*Démonstration.* Cela découle de la proposition 5.5 et du fait que la liberté de $y$ est majorée par 1. □

*Remarque* 8.7. Le minimum est donné par le deuxième terme dès que

$$H(y) < \frac{1}{C} B^{\frac{n\varepsilon(B)}{m}}.$$

*Calcul* 8.8. Nous allons maintenant tenter d'expliquer comment cette proposition apporte conjecturalement une réponse au contre-exemple de V. V. Batyrev et Y. Tschinkel. Ce contre-exemple est donné par l'hypersurface $X$ de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ d'équation $\sum_{i=0}^3 Y_i X_i^3 = 0$. Notons $\varphi : V \to \mathbf{P}^3_{\mathbf{Q}}$ la seconde projection. Pour tout point $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ de $\mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$ on désigne par $X_y$ la fibre correspondante qui est une surface cubique non singulière si $\prod_{i=0}^3 y_i \neq 0$. L'application $H : X(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ définie par

$$H(x,y) = H_3(x)H_3(y)^3,$$

avec la hauteur $H_3$ de l'exemple 3.12, est une hauteur sur $V$ relative au fibré anticanonique. On note $T$ l'ensemble des points $y \in \mathbf{P}^3(\mathbf{Q})$ en lesquels la fibre $X_y$ est non singulière et a un groupe de Picard de rang strictement supérieur à 1. Pour tout $y \in T$, on note $U_y$ le complémentaire des 27 droites de $X_y$. On fera l'*hypothèse* qu'il existe une constante $C_y > 0$ vérifiant

$$\sharp U_y(\mathbf{Q})_{H \leqslant B} \leqslant C_y B \log(B)^5$$

pour $y \in T$ et $B \geqslant 2$ et qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{\{y \in T \mid H(y) \geqslant B\}} C_y \leqslant B^{-\delta}.$$

Cette hypothèse est, à la connaissance de l'auteur, compatible avec le comportement attendu pour le nombre de points de hauteur bornée sur une surface cubique. Choisissons $0 < \eta < \frac{3}{5}$. Sous les hypothèses précédentes, on obtient les majorations

$$\begin{aligned}
&\sum_{y\in T} \sharp U_y(\mathbf{Q})^{\varepsilon-l}_{H\leqslant B} \\
&\leqslant \sum_{\{y\in T\mid H(y)\leqslant B^{\eta\varepsilon(B)}\}} C_y(CH(y))^{\frac{5}{3\varepsilon(B)}}\log(B)^5 + \sum_{\{y\in T\mid H(y)\geqslant B^{\eta\varepsilon(B)}\}} C_y B\log(B)^5 \\
&\leqslant C'C^{\frac{5}{3\varepsilon(B)}} B^{\eta\frac{5}{3}(1+\varepsilon(B))}\log(B)^5 + C'B^{1-\eta\delta\varepsilon(B)}\log(B)^5,
\end{aligned}$$

pour une constante $C'$ convenable. Compte tenu de la condition (ii) introduite dans la définition 6.11 pour l'ensemble $\mathscr{D}$, le terme $B^{1-\eta\varepsilon(B)}\log(B)^5$ est négligeable devant $B$. En prenant $\eta < \frac{3}{5}$, les conditions (i) et (ii) de cette définition assure que le premier terme est également négligeable devant $B$. Sous l'hypothèse faite sur les fibres dont le groupe de Picard est grand, la condition de minoration de la liberté rendrait donc bien négligeable la contribution de cet ensemble mince.

*Remarque* 8.9. Il est important de noter que la liberté d'un point ne distingue pas les points dans les « mauvaises » fibres, c'est-à-dire celles pour lesquelles le rang du groupe de Picard est strictement plus grand que 1. Du point de vue de la liberté, tout point de grande hauteur au-dessus d'un point de petite hauteur est considéré comme « mauvais ». De prime abord, on peut croire que c'est un défaut de cet invariant. Néanmoins, l'appartenance à une fibre dont le groupe de Picard est grand n'est pas stable par extension de corps. En fait, de ce point de vue, tout point est potentiellement mauvais : il suffit de passer à une extension qui déploie l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard de la fibre ; a contrario, la liberté d'un point rationnel est stable par extension de corps.

8.4. Des exemples de C. Le Rudulier. Dans sa thèse, C. Le Rudulier a construit de nouveaux contre-exemples à la question initiale de V. Batyrev et Y. Manin [Ru]. Ces exemples sont des espaces de modules de Hilbert pour des surfaces.

8.4.1. *Le cas du produit de droites projectives.* Nous allons commencer par rappeler les détails d'un de ces contre-exemple. On considère la variété $V$ définie comme le schéma de Hilbert des points de degré deux sur la surface $S = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. On note $Y$ le produit symétrique $\mathrm{Sym}^2(S)$. La variété $Y$ est singulière le long de l'image $\Delta$ de la diagonale de $S^2$ et le morphisme de Hilbert-Chow $f : V \to Y$ est une désingularisation de $Y$. On dispose également du morphisme de projection $g : S^2 \to Y$. On note $Z = f^{-1}(\Delta)$. L'ensemble $M = f^{-1}(g(S^2(\mathbf{Q}))) - Z(\mathbf{Q})$ est une partie mince dans $V$ mais dense pour la topologie de Zariski. D'autre part, on a un morphisme

$$p_1 : \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \to V$$

provenant de l'application

$$(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2 \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \to (\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})^2$$

donnée par $((x,y),z) \mapsto ((x,z),(y,z))$. On obtient également un morphisme

$$p_2 : \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) \to V$$

par symétrie. On notera $Z'$ l'adhérence de la réunion des images de $p_1$ et $p_2$ dans $V$. L'ensemble $U_0 = V - Z \cup Z'$ est un ouvert de Zariski non vide de $V$. Le théorème 5.1 de [Ru] contient le résultat suivant :

THÉORÈME 8.10 (C. Le Rudulier). *Il existe un nombres réel $c > 0$ tel que pour tout ouvert non vide $U$ de $V$ contenu dans $U_0$ on ait les équivalences*

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} \sim cB \log(B)^3$$

*et*

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) - M)_{H \leqslant B} \sim C(V) B \log^2(B),$$

*quand $B$ tend vers $+\infty$.*

*Remarque* 8.11. Comme le rang du groupe de Picard de $V$ vaut 3, le terme de droite de la seconde équivalence correspond au comportement espéré pour la version raffinée du principe de Batyrev et Manin.

Les points de l'ensemble mince $M$ peuvent êtres caractérisés de la façon suivante : on considère le morphisme de variétés

$$\Delta : \mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}) = \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$$

définie par $\Delta(a:b:c) = (a^2 : b^2 - 4ac : c^2)$. On obtient alors par composition un morphisme qu'on note $\Delta_1$

$$V \longrightarrow \mathrm{Sym}^2(S) \longrightarrow (\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}))^2 \xrightarrow{\Delta \circ \mathrm{pr}_1} \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}.$$

On définit de même $\Delta_2 : V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$. On note également $\square : \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ l'application définie par $(u:v:w) \mapsto (u^2 : v^2 : w^2)$. Les éléments de $M$ sont les éléments de $V(\mathbf{Q})$ dont les images par $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont dans l'image de l'application $\square$. Le calcul fait dans le paragraphe précédent pour les fibrations s'applique aussi bien à $\Delta_1$ qu'à $\Delta_2$, si bien que la liberté d'un point d'une fibre fixée de $\Delta_1$ ou de $\Delta_2$ tend vers 0.

*Remarque* 8.12. Cet argument repose de façon cruciale sur le fait que le rang du groupe de Picard de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ est strictement supérieur à 1. Cet argument peut être étendu aux autres surfaces de Del Pezzo dont le groupe de Picard vérifie cette condition.

8.4.2. *Le cas du plan projectif.* Dans ce paragraphe, la lettre $V$ désigne le schéma de Hibert des points de degré deux sur le plan projectif. On note également $Y$ le produit symétrique $\mathrm{Sym}^2(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})$ et $f$ de $V$ vers $Y$ le morphisme de Hilbert-Chow qui est l'éclatement de $Y$ le long de l'image $\Delta$ de la diagonale. On désigne par $g$ la projection de $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ dans $Y$ et par $U_0$ le complémentaire de $f^{-1}(\Delta)$ dans $V$. Soit $M = f^{-1}(g(\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})^2)) \cap U_0(\mathbf{Q})$. L'ensemble $M$ est mince mais dense dans $V$ pour la topologie de Zariski. D'après [Ru], on peut choisir une hauteur $H$ relative à $\omega_V^{-1}$ sur $V$ de sorte qu'on ait la relation

$$H(P) = H_2(x)^3 H_2(y)^3$$

pour tous $x, y \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q})$ et tout $P \in V(\mathbf{Q})$ tel que $f(P) = g(x, y)$. Rappelons l'enoncé du théorème 3.7 de [Ru] :

Théorème 8.13 (C. Le Rudulier). a) *Pour tout ouvert $U$ non vide de $V$, on a l'équivalence*

$$\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} \sim \frac{8}{\zeta(3)^2} B \log(B).$$

*lorsque $B$ tend vers $+\infty$.*
b) *On a l'équivalence*

$$\sharp(U_0(\mathbf{Q}) - M)_{H \leqslant B} \sim C(V) B \log(B).$$

Nous allons en démontrer un corollaire :

Corollaire 8.14. a) *Pour tout fermé strict $F$ de $V$ on a*

$$\sharp(F(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B} = o(B \log(B)).$$

b) *Pour tout ouvert non vide $U$ de $V$, il existe une hauteur $H$ relative à l'opposé du fibré canonique sur $V$ telle que le quotient*

$$\frac{\sharp U(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}{C_H(V) B \log(B)}$$

*ne converge pas vers 1 lorsque $B$ tend vers $+\infty$, où $C_H(V)$ désigne ici la constante empirique associée à la norme adélique choisie sur le fibré $\omega_V^{-1}$.*

*Remarques* 8.15. a) La première assertion signifie que la partie $M$ n'est pas réunion de sous-variétés faiblement accumulatrices et ne peut donc pas être détectée par une méthode de récurrence sur la dimension.
b) La seconde assertion implique que la formule (2.3.1) de [Pe1] n'est pas vérifiée, bien que la réponse à la question initiale de Batyrev et Tschinkel soit positive dans ce cas.

*Démonstration.* La première assertion du corollaire est une conséquence de l'assertion a) du théorème de Cécile Le Rudulier. Pour l'assertion b) nous allons nous inspirer d'une idée de D. Loughran, en nous basant sur le lemme suivant :

Lemme 8.16. *Il existe une partie fermée $F$ de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient $M$ et qui est de mesure nulle pour toute mesure définie par une norme adélique sur $\omega_V^{-1}$.*

*Démonstration.* Le schéma de Hilbert considéré est défini sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ avec une bonne réduction en tout nombre premier impair. Soit $p$ un nombre premier impair. Dans $V(\mathbf{F}_p)$, il y a trois types de points :

a) Ceux sur l'image inverse de $\Delta$ ;
b) Ceux correspondant à des paires de points distincts de $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$ ;
c) Les points de degré deux dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{F}_q}$.

On note $N_a(p)$, $N_b(p)$ et $N_c(p)$ le cardinal des trois ensembles correspondants. Ils sont donnés par

$$N_a(p) = (1 + p + p^2)(1 + p), \quad N_b(p) = \frac{(1 + p + p^2)(p + p^2)}{2}$$

et

$$N_c(p) = \frac{p^4 - p}{2}.$$

En particulier $N_b(p)/\sharp V(\mathbf{F}_p)$ converge vers $1/2$ lorsque le nombre premier $p$ tend vers $+\infty$. Notons $V_b(p)$, pour $p$ premier impair, l'ensemble des points de $V(\mathbf{Q}_p)$ qui se réduisent modulo $p$ en un point de type b). Alors l'ensemble

$$F = V(\mathbf{R}) \times V(\mathbf{Q}_2) \times \prod_{p \notin \{2,\infty\}} V_b(p).$$

est une partie fermée de $V(\boldsymbol{A}_{\mathbf{Q}})$ qui contient $M$ et de mesure nulle pour toute mesure induite par une norme adélique sur $\omega_V^{-1}$. $\square$

*Fin de la preuve du corollaire 8.14.* Soit $U$ un ouvert non vide de $V$. On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout choix de norme le quotient converge vers 1. Par la démonstration de l'assertion (c) de la proposition (3.3) de [Pe1], les points de $U(\mathbf{Q})$ vérifie la propriété $(E_U)$ de [Pe1, §3]. En appliquant cela au complémentaire du fermé $F$ donné par le lemme précédent, il en résulte que le quotient

$$\frac{\sharp(U(\mathbf{Q}) \cap M)_{H \leqslant B}}{\sharp U(\mathbf{Q})_{H \leqslant B}}$$

tend vers 0 quand $B$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit l'assertion a) du théorème de C. Le Rudulier. $\square$

En ce qui concerne les pentes, contrairement au cas précédent, on ne dispose pas d'un morphisme de variétés $\varphi$ qui permette d'utiliser la proposition 8.6 et qui vérifie en outre $\varphi(M) \neq \varphi(V(\mathbf{Q}))$. Toutefois, l'application qui à une paire de points distincts $\{P_1, P_2\}$ associe la droite projective $(P_1P_2)$ définit un morphisme surjectif de variétés $V \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ dont la fibre au-dessus d'une droite projective $D$ est isomorphe à $\mathrm{Hilb}^2(D)$, c'est-à-dire à un plan projectif. Compte tenu de la proposition 8.6, il existe une constante $C$ de sorte que, pour tout point $x$ de $M$ donné par une paire $\{P_1, P_2\}$ contenue dans une droite $D$ du plan projectif, la condition $l(x) > \varepsilon(B)$ implique

$$H(P_1)H(P_2) \leqslant CH(D)^{\frac{2}{\varepsilon(B)}}.$$

Cette condition ne découle pas d'une condition de la forme $l(P_1, P_2) \geqslant \varepsilon'(B)$ où $(P_1, P_2)$ est vu comme un point de $\mathbf{P}^2(\mathbf{Q})^2$. Il n'y a donc plus de contradiction directe entre le résultat connu pour $(\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}})^2$ et celui espéré pour $V$. Toutefois je n'ai pas réussi à démontrer que le cardinal $M^{\varepsilon - l}_{H \leqslant B}$ est effectivement de la forme $o(B \log(B))$ ce qui prouverait que les pentes permettent d'écarter assez de mauvais points dans ce cas particulier. Une étude plus approfondie de ce cas mériterait d'être faite.

## 9. Conclusion

À l'issu de ce travail, l'auteur est persuadé que les pentes de l'espace tangent donnent effectivement un indicateur fidèle permettant de détecter les points qui s'accumulent. Toutefois il est encore difficile de prédire avec certitude quelle condition précise se révèlera la plus efficace pour poursuivre le programme de Batyrev et Manin. Deux critères de nature différente apparaissent ici : la condition $l(x) > \epsilon(B)$, qui vient s'ajouter à la condition de hauteur, et la condition $\mu_{\max}(x) \leqslant \log(B)$. Si le second point de vue amène un changement de paradigme plus profond, il peut être plus naturel. Une troisième solution consisterait à imposer une minoration sur la pente minimale de la forme $\mu_{\min}(x) \geqslant \eta \log(\log(B))$. Cette solution qui peut être plus facile à vérifier dans certains cas a l'inconvénient que l'ensemble des « bons » points diminue avec $B$, elle n'a donc pas été retenue par l'auteur pour des raisons métamathématiques. Seule l'étude d'autres cas permettra de trancher définitivement.

## Références


[Art] E. Artin, *Über eine neue Art von L-Reihen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 3 (1924), n° 1, 89–108.

[BM] V. V. Batyrev et Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. 286 (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices 12 (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323 (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Tamagawa numbers of polarized algebraic varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 299–340.

[Be] P. Berthelot, *Généralités sur les λ-anneaux (exposé V)*, Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch (SGA6), Lecture Notes in Math., vol. 225, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 297–364.

[Bir] B. J. Birch, *Forms in many variables*, Proc. Roy. Soc. London 265A (1962), 245–263.

[Bo] T. Borek, *Successive minima and slopes of Hermitian vector bundles over number fields*, J. Number Theory 113 (2005), n° 2, 380–388.

[Bos] J.-B. Bost, *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*, Publ. Math. I.H.E.S. 93 (2001), 161–221.

[BC] J.-B. Bost et H. Chen, *Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry*, J. Math. Pures Appl. (9) 99 (2013), n° 4, 436–488.

[BK] J.-B. Bost et K. Künnemann, *Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers*, Adv. Math. 223 (2010), n° 3, 987–1106.

[BL] T. Browning et D. Loughran, *Varieties with too many rational points*, à paraître dans Math. Zeit. (2016).

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273–307.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin et Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. 95 (1989), 421–435.

[Ga] É. Gaudron, *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 119 (2008), 21–95.

[Lan] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen un der Ideale*, Teubner, Leipzig, 1927.

[LTT] B. Lehmann, S. Tanimoto et Y. Tschinkel, *Balanced line bundles on Fano varieties*, à paraître dans Journ. Reine und Angew. Math. (2016).

[Ma] Y. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[MV] D. Masser et J. D. Vaaler, *Counting algebraic numbers with large height II*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), n° 1, 427–445.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Pa] S. Pagelot, *Étude de la distribution asymptotique fine des points rationnels de hauteur bornée*, Texte non publié, 2009.

[Pe1] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. 79 (1995), n° 1, 101–218.

[Pe2] ———, *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 259–298.

[Pe3] ———, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Séminaire Bourbaki 56-ème année, 2003/04, n° 931.

[Ro] D. Roessler, *Lambda-structure on Grothendieck groups of hermitian vector bumdles*, Israel J. Math. 122 (2001), 279–304.

[Ru] C. Le Rudulier, *Points algébriques de hauteur bornée sur une surface*, `http ://cecile.lerudulier.fr/Articles/surfaces.pdf` (2013).

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sc] S. H. Schanuel, *Heights in number fields*, Bull. Soc. Math. France 107 (1979), 433–449.

[Se1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ———, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, vol. E15, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1989.

[Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan, Vandœuvre lès Nancy, 1990.

[Th] J. L. Thunder, *An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma*, J. reine angew. Math. 475 (1996), 167–185.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

Emmanuel Peyre
Institut Fourier
Université Grenoble Alpes
CS 40700
38058 Grenoble cedex 09
France
Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr