

SUR LES ATOMES AUTOMORPHES DE LONGUEUR 2 DE  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ 

STEFANO MORRA

Received: August 18, 2013

Revised: February 21, 2017

Communicated by Otmar Venjakob

ABSTRACT. Soit  $p \geq 3$  un nombre premier. Le but de cet article est de donner une description des invariants, sous les sous-groupes de congruence principaux, des extensions entre séries principales apparaissant dans la correspondance de Langlands  $p$ -modulaire de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Comme application on décrit les espaces Hecke isotypiques de la cohomologie de la courbe modulaire sur  $\mathbf{Q}$  avec un niveau de ramification arbitraire en  $p$ .

Let  $p > 3$  be a prime. The aim of this paper is to give a description of the invariant space, under principal and Iwahori congruence subgroups of arbitrary level, of extensions of generic principal series representations appearing in the  $p$ -modular local Langlands correspondence for  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . As an application we describe Hecke isotypical components of the mod  $p$  cohomology of the modular curve over  $\mathbf{Q}$  with deeply ramified level at  $p$ .

Keywords and Phrases:  $p$ -modular Langlands program, local-global compatibility, Serre weight, extension of principal series, socle filtration, multiplicity one

## TABLE DES MATIÈRES

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 1     | INTRODUCTION  | 778 |
| 1.1   | Notations . . . . .   | 783 |
| 2     | PRÉLIMINAIRES   | 784 |
| 2.1   | Structure interne des séries principales pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . . . . . | 784 |
| 2.1.1 | Les induites paraboliques finies. . . . .   | 787 |
| 2.2   | Induction parabolique et induction compacte . . . . .                                 | 788 |
| 2.2.1 | Un dictionnaire . . . . .   | 791 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3   | DIVERTISSEMENT EN THORIE D'IWASAWA                            | 792 |
| 4   | PREMIER DVISSAGE DE L'ATOME                                   | 796 |
| 4.1 | Réalisation de l'atome automorphe . . . . .                   | 797 |
| 4.2 | Restriction aux groupes de congruence . . . . .               | 799 |
| 4.3 | Résumé des notations. . . . .                                 | 801 |
| 5   | LE COMPORTEMENT DE $\tilde{e}_{n+1}$                          | 802 |
| 6   | ESPACES INVARIANTS ET APPLICATIONS                            | 805 |
| 6.1 | Espace des $K_{n+1}$ -invariants . . . . .                    | 806 |
| 6.2 | Espace des $I_n$ -invariants . . . . .                        | 809 |
| 6.3 | Application à la cohomologie des courbes modulaires . . . . . | 811 |
| 7   | APPENDICE   | 813 |
| 7.1 | Sur certains polynômes de Witt . . . . .                      | 814 |
| 7.2 | Manipulation a l'intérieur de $A_{r,\lambda}$ . . . . .       | 818 |

## 1 INTRODUCTION

Depuis ses premières réalisations, la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique (cf. [Ber11], [Bre08]) se manifeste comme un phénomène essentiellement nouveau. Non seulement l'espace des vecteurs localement algébriques de la représentation  $p$ -adique automorphe associée à une représentation galoisienne *peut* être nul (cf. [Col10] §VI.6, retrouvé par Dospinescu dans [Dos12]), mais on a besoin d'inclure, à l'intérieur de la correspondance, certaines représentations automorphes *réductibles*.

Bien que la correspondance locale pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  est désormais largement comprise grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens (cf. [Ber11], [Bre08] pour des références précises sur la genèse scientifique de la théorie), la situation pour des autres groupes reste extrêmement délicate, même dans le cas  $p$ -modulaire (travaux de Paskunas, Breuil-Paskunas, Hu, Schraen...). En particulier, la prolifération des représentations  $p$ -modulaires des groupes réductifs  $p$ -adiques rend difficile, à l'heure actuelle, la formulation d'une correspondance locale précise. Néanmoins, les conjectures de Serre généralisées (cf. [BDJ10], [Sch08], [Her09]), qui décrivent les systèmes locaux dont la cohomologie garde la donnée d'un paramètre galoisien, fournissent des outils géométriques globaux pour l'étude des représentations locales qui devraient apparaître dans une correspondance de Langlands modulo  $p$ .

C'est la stratégie adoptée dans les articles récents [BD14] et [BH15], où des propriétés locales de certaines représentations  $p$ -modulaires viennent transsubstantiées dans un contexte global. L'aspect important est que ces premières investigations se consacrent au cas particulier où la représentation galoisienne est *ordinaire*, i.e. lorsque son image est contenue dans un sous-groupe de Borel

de  $\mathbf{GL}_n$ . La représentation locale automorphe est, dans ce cas, *réductible* (en général non scindée).

À la lumière de ces nouveaux progrès et de la phénoménologie spécifique de  $\mathbf{GL}_2$  (parue dans les travaux de Breuil et Paskunas, cf. [BP13]) cela se manifeste comme naturel l'étude détaillée de ces représentations modulaires dans le cadre de la correspondance locale pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , représentations qui sont souvent appelées atomes automorphes de longueur 2 (cf. [Col10], §VII.4).

C'est le sujet de cet article, poursuivi dans le sillon des études commencés dans [Mor11], [Mor13] (où l'auteur traite le cas supersingulier). On tient toutefois à souligner que, différemment du cas irréductible (où la restriction à  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  des représentations irréductibles est essentiellement unisérielle), le comportement interne des atomes automorphes de longueur 2 est délicat : on retrouve une infinité de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  extensions non triviales entre les constituants des deux séries principales de l'atome; leur nature dépend de plus de leur position à l'intérieur de l'atome.

Voyons maintenant plus en détail les résultats et les perspectives de l'étude effectué dans cet article. Afin de simplifier les énoncés<sup>1</sup>, nous nous limitons au cas générique, bien que certains résultats restent valables dans un cadre plus général.

Désignons par  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$  et par  $\text{un}_\lambda$  le caractère non ramifié de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  envoyant le Frobenius géométrique sur  $\lambda \in k^\times$ . Un atome galoisien générique (de dimension 2 pour  $G_{\mathbf{Q}_p} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ ) est une représentation galoisienne de la forme  $\begin{bmatrix} \delta_1 & * \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$ , où  $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{r+1}\text{un}_\lambda$  pour un entier  $r \in \{1, \dots, p-3\}$  et  $\delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{un}_{\lambda^{-1}}$ . À celle-ci correspond, à travers le foncteur inverse de Colmez, un générateur linéaire  $A_{r,\lambda}$  de l'espace

$$\text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}^1(\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1})$$

Le résultat principal de cet article, qui fait la suite à [Mor13] (où on traite le cas irréductible), consiste en une description complète de l'espace des invariants de  $A_{r,\lambda}$  selon des sous-groupes de congruence principaux de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ . Pour  $t \geq 1$  désignons par  $K_t$  le noyau du morphisme de réduction  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p/p^t)$  et par  $I_{t+1}$  le sous groupe de  $K_t$  constitué par les éléments de  $K_t$  qui sont triangulaires supérieurs modulo  $K_{t+1}$ .

**THEOREME 1.1.** *Soit  $1 \leq r \leq p-3$  et  $n \geq 0$ . L'espace des  $K_{n+1}$ -invariants de  $A_{r,\lambda}$  est décrit par la suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & \left( \text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1} \right)^{K_{n+1}} \rightarrow (A_{r,\lambda})^{K_{n+1}} \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1} \right)^{K_{n+1}} \rightarrow \text{Sym}^{r+2} k^2 \otimes \det^{-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1. Similement, on utilisera ici des notations légèrement différentes de ceux utilisées dans le reste de l'article.

L'espace des  $I_{n+1}$ -invariants est décrit par la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & \left( \operatorname{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1} \right)^{I_{n+1}} \rightarrow (A_{r,\lambda})^{I_{n+1}} \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \operatorname{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1} \right)^{I_{n+1}} \rightarrow (\omega^{r+1} \otimes \omega^{-1}) \oplus (\omega^{-1} \otimes \omega^{r+1}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on s'attend à ce que le Théorème 1.1 reste valable pour  $r = 0$  et pour  $p \geq 3$  en utilisant les arguments développés dans cet article<sup>2</sup>.

Grâce aux travaux d'Emerton sur la compatibilité locale-globale de la correspondance de Langlands  $p$ -modulaire ([Eme]) le Théorème 1.1 permet de décrire plusieurs composantes isotypiques de la cohomologie mod  $p$  des courbes modulaires définies sur  $\mathbf{Q}$ , avec niveau arbitrairement profond en  $p$ . Ceci permet de compléter le travail effectué dans [Mor13]. On obtient :

**THEOREME 1.2.** *Soit  $p \geq 3$ ,  $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$  une représentation continue, impaire et absolument irréductible. Soit  $\Sigma_0$  l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin  $N$  de  $\bar{\rho}$ ,  $\kappa \in \{2, \dots, p+1\}$  le poids minimal (à torsion près) associé à  $\bar{\rho}$  par Serre et soit  $t \geq 1$ . Soit  $K_p \in \{K_t, I_t\}$  et supposons que  $\kappa \in \{3, \dots, p-1\}$ .*

*Fixons un niveau admissible  $K_{\Sigma_0} \leq \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_{\ell})$  pour  $\bar{\rho}$  et  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal associé à  $\bar{\rho}$  dans l'algèbre de Hecke sphérique, dehors de  $\Sigma_0 \cup \{p\}$ , de la courbe modulaire*

$$Y(K_p K_{\Sigma_0} K^{\Sigma_0}),$$

*où l'on a posé  $K^{\Sigma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell \notin \Sigma_0 \cup \{p\}} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_{\ell})$ . Définissons enfin*

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \left( \bigotimes_{\ell \in \Sigma_0} \pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_{\ell}}}) \right)^{K_{\Sigma_0}} \quad (1)$$

*où  $\pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_{\ell}}})$  est la représentation lisse de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_{\ell})$  associée à  $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_{\ell}}}$  par la correspondance de Langlands  $p$ -modulaire d'Emerton-Helm ([EH14]).*

*Alors, si  $p^t N > 4$ , la composante  $\mathfrak{m}$ -isotypique de la cohomologie mod  $p$  de la*

2. Ceci est effectivement le cas si  $n = 1$ , où l'on peut de plus montrer que le  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle de  $A_{r,\lambda}$  coïncide avec celui de la série principale en sous-objet de  $A_{r,\lambda}$ , mais la technicité des preuves dans le cas général on fait désister l'auteur de les poursuivre.

courbe modulaire de niveau modéré  $K_{\Sigma_0} K^{\Sigma_0}$  est décrite par

$$\dim_k (H_{\text{ét}}^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbf{Q}}}, k)[\mathfrak{m}]) = \begin{cases} 2d(2p^{t-1}(p+1) - 4) \\ \text{si } K_p = K_t \text{ et } \overline{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est} \\ \text{absolument irréductible;} \\ \\ 2d(2(p+1)p^{t-1} - (\kappa+1)) \\ \text{si } K_p = K_t \text{ et } \overline{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est} \\ \text{absolument réductible,} \\ \text{non-scindée;} \\ \\ 2d(2(2p^{t-1} - 1)) \quad \text{si } K_p = I_t. \end{cases}$$

La valeur de  $d$  se décrit explicitement, à la suite des travaux d’Emerton-Helm ([EH14]), Helm [Hel13] et Nadimpalli [Nad] sur la compatibilité des conducteurs d’Artin et automorphes modulo  $\ell$ . Par exemple, si pour tout  $\ell \in \Sigma_0$ , la semi-simplifiée  $(\overline{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})^{\text{ss}}$  n’est pas la tordue de  $1 \oplus \omega$  ou de  $1 \oplus 1$ , le sous groupe

$$K_{1, \Sigma_0}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell) \mid c \equiv d - 1 \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

est un niveau admissible pour  $\overline{\rho}$ , tel que  $d = 1$ .

Décrivons brièvement la technique utilisée pour contrôler les espaces des invariants de l’extension entre deux séries principales. Posons  $M \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1})|_K$ . D’après des arguments standard d’algèbre homologique, et grâce à [BP13], Theorem 20.3, on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}^1(\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1}) &\hookrightarrow & (2) \\ \hookrightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ n \in \mathbf{N}}} \text{Ext}_I^1((\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a})^{K_{n+1}}, M) &\rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_I^1((\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a})^{K_{n+1}}, M) &\cong \text{Ext}_{K_0(p^{n+1})}^1(\chi_r \mathfrak{a}, M) \end{aligned}$$

où  $K_0(p^{n+1})$  est l’image réciproque, dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  du Borel standard de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/p^{n+1})$  et  $\mathfrak{a}$  est le caractère du tore défini par  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mapsto a a^{-1}$ . Écrivons  $\mathcal{B}_{n+1}$  pour l’image de  $A_{r, \lambda}$  dans  $\text{Ext}_{K_0(p^{n+1})}^1(\chi_r \mathfrak{a}, M)$  via (2).

La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que  $M|_I = M^+ \oplus M^-$  où  $M^\pm$  est un  $I$ -module uniserial. Si  $A \cong k[[X]]$  désigne l’algèbre d’Iwasawa de l’uni-potent inférieur  $\overline{\mathbf{U}}(p\mathbf{Z}_p)$ , on voit que  $(M^-)^\vee|_A \cong A$ , ce qui donne en particulier  $(M^-)^{K_{n+1}} \cong A/(X^{p^n})$  pour tout  $n \geq 1$ . La description de  $\mathcal{B}_{n+1}$ , qui jouera un rôle crucial dans l’article, est la suivante :

PROPOSITION 1.3. *Soit  $n \geq 1$  et considérons l’extension de  $k[[K_0(p^{n+1})]]$ -modules discrets*

$$0 \rightarrow M^+ \oplus M^- \rightarrow \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \chi_r \mathfrak{a} \rightarrow 0.$$

Il existe un relèvement  $\mathfrak{e}_{n+1}$  d'un générateur linéaire de  $\chi_r \mathfrak{a}$  qui est fixé par  $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$  modulo  $\text{soc}(M^+)$ .

De plus, pour tout  $\begin{bmatrix} 1+pa & b \\ p^{n+1}c & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$ , on a  $(g-1)\mathfrak{e}_{n+1} \in M^+ \oplus (M^-)^{K_{n+1}}$  et, plus précisément

$$(g-1)\mathfrak{e}_{n+1} = c_{r,\lambda,n}(\overline{b}X^{p-3-r} - (\overline{a} - \overline{d})(r+2)X^{p-2-r}) \quad (3)$$

modulo  $\text{soc}(M^+) \oplus (X^{p-3-r+(p-2)})$ , où  $c_{r,\lambda,n} \in k^\times$  ne dépend que de  $\mathfrak{e}_{n+1}$  et où l'on a identifié  $(M^-)^{K_{n+1}}$  avec  $A/(X^{p^n})$ .

Pour passer de la Proposition 1.3 à l'espace des invariants de  $A_{r,\lambda}$  on utilise de manière cruciale l'action du tore entier et de l'unipotent supérieur sur l'algèbre d'Iwasawa  $A$  (via l'isomorphisme naturel  $(M^-)^\vee|_A \cong A$ ). Cette action, bien que compliquée a priori, peut se décrire simplement en termes de l'uniformisante  $X$ , modulo une certaine puissance de l'idéal maximal de  $A$  :

PROPOSITION 1.4. Soit  $m \geq 1$  et soit  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$ . L'action de  $g$  sur l'algèbre d'Iwasawa  $A$  est décrite par

$$g \cdot X^m \in a^m d^{r-m} X^m + (X^{m+(p-2)}).$$

L'article est organisé de la manière suivante.

La section 2 est consacrée aux préliminaires. On rappelle d'abord la réalisation des séries principales, soit comme induites paraboliques (cf. §2.1), soit comme induites compactes (cf. §2.2), en réalisant de manière explicite l'isomorphisme de Barthel et Livné en termes de certaines bases linéaires naturelles.

Dans §3 on considère l'algèbre d'Iwasawa de l'unipotent inférieur  $\overline{\mathbf{U}}(p\mathbf{Z}_p)$  et on étudie les actions associées à ses structures supplémentaires. On y trouve le dictionnaire crucial qui permet de déduire les théorèmes principaux de l'article à partir de la Proposition 1.3.

Le premier dévissage de la structure de l'atome se trouve au §4; cela nous permet, par des arguments d'algèbre homologique, de nous nous réduire à l'étude d'une famille de  $I$ -modules lisses (Proposition 4.7), ensuite à des représentations de certains sous-groupes ouverts de  $I$ .

La section 5 a pour objectif l'étude des représentations  $\mathcal{B}_{n+1}$  mentionnées dans la Proposition 1.3. C'est le coeur technique de l'article et les manipulations, les plus techniques ont été mises en appendice.

Finalement, l'étude des  $K_{n+1}$ -invariants est effectué au §6.

REMERCIEMENTS L'auteur souhaite exprimer sa profonde reconnaissance à Y. Hu, V. Paskunas, B. Schraen, pour plusieurs discussions, qui ont été absolument décisives pour l'aboutissement du résultat principal de l'article, ainsi que pour plusieurs commentaires très pertinents qui ont amélioré la qualité de cet article. L'auteur s'excuse pour la gestations très longue de cet travail, et il remercie le référée anonyme, ainsi que le comité éditorial de Documenta Mathematica, pour leur patience le long de la procédé éditoriale de cet article.

1.1 NOTATIONS

Soit  $p$  un nombre premier impair. Étant donné un corps  $p$ -adique  $F$ , avec anneau des entiers noté par  $\mathcal{O}_F$  et corps résiduel (fini)  $k_F$ , nous désignons par  $x \mapsto \bar{x}$  le morphisme de réduction  $\mathcal{O}_F \rightarrow k_F$  et par  $\bar{x} \mapsto [\bar{x}]$  le morphisme de Teichmüller (on convient que  $[0] \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ).

Considérons le groupe linéaire général  $\mathbf{GL}_2$  ; nous écrivons  $\mathbf{B} = \mathbf{TU}$  pour le Borel des matrices triangulaires supérieures et  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{U}}$  pour le Borel opposé. Cet article est, en une grande partie, consacré à l'étude de certaines représentations du groupe  $p$ -adique  $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Nous écrivons  $Z \stackrel{\text{def}}{=} Z(G)$  et  $K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  pour désigner le centre et le sous-groupe compact maximal de  $G$  respectivement. Nous rappelons que le sous-groupe d'Iwahori de  $K$ , que l'on désigne par  $K_0(p)$ , est défini comme l'image inverse du Borel fini  $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$  par le morphisme de réduction  $K \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ . Le pro- $p$ -Iwahori, i.e. le pro- $p$ -Sylow de  $K_0(p)$ , sera désigné par  $K_1(p)$ .

De manière similaire on définit les sous groupes de congruence  $K_0(p^n), K_1(p^n)$ , pour  $n \in \mathbf{N}$  :  $K_0(p^n)$  est défini comme l'image inverse de  $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p/p^n)$  par  $K \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p/p^n)$  (le morphisme de réduction modulo  $p^n$ ) et  $K_1(p^n)$  en est son pro- $p$ -Iwahori. Enfin, pour  $n \geq 1$ , nous désignons par  $\bar{\mathbf{U}}(p^n)$  le groupe des  $p^n \mathbf{Z}_p$ -points de  $\bar{\mathbf{U}}$ .

Afin d'alléger les notations, on écrit  $B \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$  et on introduit les éléments suivants

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in G, \quad \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \in G.$$

Soit  $E$  un corps  $p$ -adique,  $\mathcal{O}$  son anneau des entiers et  $k$  son corps résiduel (que l'on suppose fini). Une représentation  $\sigma$  d'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  sera toujours supposée *lisse*, et réalisée sur des  $k$ -espaces linéaires.

Si  $h \in H$  on écrira parfois  $\sigma(h)$  pour désigner l'automorphisme  $k$ -linéaire induit sur l'espace sous-jacent à  $\sigma$  par l'action de  $h$ . De manière similaire, une représentation irréductible de  $G$  sera toujours supposée *admissible* (l'espace des vecteurs fixés par un sous-groupe ouvert de  $G$  est de dimension finie).

Soient  $H_2 \leq H_1$  deux sous-groupes fermés de  $G$ . Étant donnée une représentation lisse  $\sigma$  de  $H_1$ , on écrit  $\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$  pour désigner l'induite lisse de  $\sigma$ , de  $H_1$  à  $H_2$ , et on désigne par  $\text{ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$  le sous-espace de  $\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$  constitué par les fonctions à support compact.

Si  $v \in \sigma$  et  $h \in H_1$  nous écrivons  $[h, v]$  pour désigner l'unique élément de  $\text{ind}_{H_2}^{H_1} \sigma$  à support en  $H_2 h^{-1}$  et qui envoie  $h^{-1}$  sur  $v$ .

Nous déduisons en particulier les égalités suivantes :

$$h' \cdot [h, v] = [h'h, v], \quad [hk, v] = [h, \sigma(k)v] \tag{4}$$

pour tout  $h, h' \in H_1, k \in H_2$ .

Les constructions précédentes seront essentiellement utilisées lorsque  $H_1 = B, H_2 = G$  ou  $H_1 = K_0(p^n), H_2 = K$ , ou encore  $H_1 = KZ, H_2 = G$  (auquel cas,

l'induite  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  est constitué par les fonctions à support compact *modulo le centre*  $Z$ ).

Un *poids de Serre* est une représentation absolument irréductible de  $K$ . À isomorphisme près, ils admettent la réalisation en termes de l'algèbre symétrique :

$$\sigma_{r,t} \stackrel{\text{def}}{=} \det^t \otimes \text{Sym}^r k^2 \quad (5)$$

où  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $t \in \{0, \dots, p-2\}$  (ceci donne une paramétrisation des classes d'isomorphisme des poids de Serre par des couples  $(r, t) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, p-2\}$ ).

Rappelons que la  $K$ -représentation  $\text{Sym}^r k^2$  peut s'identifier à  $k[X, Y]_r^h$ , le sous-espace linéaire de  $k[X, Y]$  décrit par les polynômes homogènes de degré  $r$ , muni de l'action naturelle de  $K$  :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{r-i} Y^i \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{a}X + \bar{c}Y)^{r-i} (\bar{b}X + \bar{d}Y)^i$$

pour  $0 \leq i \leq r$ .

On étend l'action de  $K$  sur un poids de Serre au groupe  $KZ$ , en imposant que la matrice scalaire  $p \in Z$  agisse trivialement.

Un  $k$ -caractère du tore  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$  sera considéré, par inflation, comme un caractère lisse de  $K_0(p^n)$  (pour n'importe quel  $n \in \mathbf{N}$ ).

On écrit par  $\chi^s$  le caractère conjugué de  $\chi$ , défini par

$$\chi^s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(sts)$$

pour tout  $t \in \mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ .

De manière analogue, si  $\tau$  est une représentation lisse de  $K_0(p)$ , nous écrivons  $\tau^s$  pour désigner la représentation conjuguée, définie par

$$\tau^s(h) = \tau(\Pi h \Pi)$$

avec  $h \in K_0(p)$ .

Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Les caractères suivants de  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$  vont jouer un rôle majeur dans la suite de l'article :

$$\chi_r \left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def}}{=} a^r, \quad \mathfrak{a} \left( \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def}}{=} ad^{-1}.$$

On désigne par  $\omega : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{F}_p^\times$  la réduction modulo  $p$  du caractère cyclotomique  $p$ -adique.

## 2 PRLIMINAIRES

### 2.1 STRUCTURE INTERNE DES SERIES PRINCIPALES POUR $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Le but de cet numéro est de rappeler la structure interne des séries principales pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Bien qu'il s'agit de résultats bien connus et valables dans un



contexte plus générale (cf. [Mor13] §5 et [Mor], §8 pour une dissertation plus ample) on a répaté les rappeler ici : cela nous permet de fixer de manière soigneuse les notations, ce qui sera crucial pour la lecture des paragraphes à venir.

Nous rappelons ([BL94], [Her11a]) que les séries principales irréductibles pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  sont décrites (à torsion près) par l'induite parabolique

$$\pi_{r,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}})$$

où  $\mu \in \bar{k}^\times$ ,  $\text{un}_\mu$  est le caractère non-ramifié sur  $\mathbf{Q}_p^\times$  caractérisé par  $\text{un}_\mu(p) = \mu$ ,  $r \in \{0, \dots, p-2\}$  et  $(r, \mu) \notin \{(0, 1), (0, -1)\}$ .

Comme  $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \backslash \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  est compact, la décomposition d'Iwasawa nous fournit un isomorphisme  $K$ -équivariant :

$$(\text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}}))|_K \cong \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \cong \varinjlim_{n \geq 1} (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)$$

où  $K_0(p^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$  et les morphismes de transition au RHS sont obtenus, par induction (compacte), à partir des morphismes naturels  $K_0(p^n)$ -équivariants

$$\chi_r^s \hookrightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^n)} \chi_r^s$$

pour  $n \geq 1$ .

De plus, d'après les théorèmes de décomposition de Bruhat-Iwahori et Mackey, la restriction des fonctions à  $K_0(p)$  induit une suite exacte  $K_0(p)$ -équivariante scindée

$$0 \rightarrow (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+ \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s \rightarrow 0. \tag{6}$$

Le résultat qui suit est formel :

LEMME 2.1. *Soit  $\mu \in \bar{k}^\times$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . On a un isomorphisme  $K$ -équivariant*

$$(\text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}}))|_K \cong \text{ind}_{K_0(p)}^K (\varinjlim_{n \geq 1} (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s)).$$

L' action de  $\Pi$  sur la série principale  $\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}(\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}})$  induit un isomorphisme de  $k[K_0(p)]$ -modules

$$(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s)^s \xrightarrow{\sim} (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+.$$

*Démonstration.* Omissis. □

En particulier, les propriétés fines de la représentation  $\pi_{r,\lambda}$  sont gardées par les induites finies  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ . Le phénomène crucial, qui dépend de manière *essentielle* du fait qu'on considère les  $\mathbf{Q}_p$ -points de  $\mathbf{GL}_2$ , est que ces  $k[K_0(p)]$ -modules sont *unisériels*.

Précisons brièvement cela. Fixons  $n \geq 0$ , ainsi qu'un générateur linéaire  $e$  pour le caractère  $\chi_r^s$ . Pour une  $n$ -uplet  $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ , définissons l'élément suivant de  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  :

$$F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} [1, e]. \quad (7)$$

On vérifie aisément (cf. [Mor12], §4 ou encore [Mor11] §5) que l'ensemble

$$\mathcal{B}_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s, (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n\}$$

fournit une base linéaire pour l'espace  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  et que  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$  opère sur  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}$  par le caractère  $\chi_r^s \mathbf{a}^{l_1 + \dots + l_n}$ .

De plus, on dispose d'une application *injective*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+1}^- &\hookrightarrow \mathbf{N} \\ F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} &\mapsto \sum_{j=1}^n p^{j-1} l_j \end{aligned}$$

qui permet de munir  $\mathcal{B}_{n+1}^-$  d'un ordre total  $\preceq$ . Notons qu'il s'agit également de l'ordre antilexicographique  $\preceq$  sur l'ensemble  $\{0, \dots, p-1\}^n$ .

Pour une  $n$ -uplet  $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$  définissons l'espace linéaire

$$\langle F_{\preceq(l_1, \dots, l_n)}^{(1,n)} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_{(l'_1, \dots, l'_n)}^{(1,n)}, (l'_1, \dots, l'_n) \preceq (l_1, \dots, l_n) \rangle.$$

Le résultat crucial est que la filtration linéaire induite sur  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  par l'ordre total de  $\mathcal{B}_{n+1}^-$  est  $K_0(p)$ -équivariante :

**PROPOSITION 2.2.** *Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Le  $k[K_0(p)]$ -module discret  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est unisériel, sa filtration par le  $K_0(p)$ -socle étant décrite par le graphe*

$$\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s : \quad \chi_r^s \longleftarrow \chi_r^s \mathbf{a} \longleftarrow \chi_r^s \mathbf{a}^2 \longleftarrow \dots \longleftarrow \chi_r^s.$$

De plus, pour tout  $n$ -uplet  $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ , l'espace linéaire  $\langle F_{\preceq(l_1, \dots, l_n)}^{(1,n)} \rangle$  est  $K_0(p)$ -stable, en particulier c'est le  $k[K_0(p)]$ -sous module de dimension  $1 + \sum_{j=1}^n p^{j-1} l_j$  de  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ .

*Démonstration.* Omissis. Cf. [Mor12] Proposition 4.2 ou [Mor11] Proposition 5.10. □

Remarquons que une conséquence triviale de la Proposition 2.2 est que  $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s$  est elle-même unisérielle et que les morphismes de transition définissant la co-limite sont décrits par

$$\begin{aligned} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s &\hookrightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+2})}^{K_0(p)} \chi_r^s \\ F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} &\mapsto F_{l_1, \dots, l_n, 0}^{(1, n+1)}. \end{aligned}$$

La situation pour le  $k[K_0(p)]$ -module  $(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+$  est strictement analogue et se déduit via l'isomorphisme  $K_0(p)$ -équivariant du Lemme 2.1. On se limite ici à souligner qu'on a un isomorphisme de  $k[K_0(p)]$ -modules discrets (induit par l'action de  $\Pi$  sur  $\pi_{r, \lambda}$ )

$$\begin{aligned} (\text{ind}_{K_0(p^{n+2})}^{K_0(p)} \chi_r^s)^s &\xrightarrow{\sim} (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+ \\ F_{l_0, \dots, l_n}^{(1, n+1)} &\mapsto F_{l_0, \dots, l_n}^{(0, n)} \end{aligned}$$

où  $(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+$  désigne le noyau de l'application naturelle de restriction  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$  et pour toute  $(n+1)$ -uplet  $(l_0, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n+1}$  on a défini les éléments suivants de  $(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+$  :

$$F_{l_0, \dots, l_n}^{(0, n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^j \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+.$$

### 2.1.1 LES INDUITES PARABOLIQUES FINIES.

On rappelle brièvement des résultats sur la réalisation des séries principales finies pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ , en invitant le lecteur à se référer à [BP13] pour un cadre plus général. Les résultats rappelés ici seront utiles au §6, où on détermine l'espace des  $K_{n+1}$ -invariants de  $A_{r, \lambda}$ .

Fixons  $r, i \in \{0, \dots, p-2\}$  et considérons l'induite parabolique finie

$$\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i.$$

On fixe une base  $\{e\}$  pour le caractère  $\chi_r^s \det^i$  et on définit les éléments suivants, pour  $0 \leq j \leq p-1$

$$f_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^j \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [1, e] \in \text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i.$$

On voit aisément que  $f_j$  est un  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ -vecteur propre, de caractère propre  $\chi_r \det^i \mathfrak{a}^{-j}$  et que pour tout  $j_0 \in \{0, \dots, p-1\}$  les sous-espaces linéaires

$$\langle f_j, 0 \leq j \leq j_0 \rangle$$

sont stables sous l'action de  $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ .

De plus, l'induite parabolique  $\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i$  est de longueur 2 et sa structure se décrit de la manière suivante :

PROPOSITION 2.3. Soient  $r, i \in \{0, \dots, p-2\}$ . Alors

i) si  $r \neq 0$  on a une extension non scindée

$$0 \rightarrow \mathrm{Sym}^r k^2 \otimes \det^i \rightarrow \mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i \rightarrow \mathrm{Sym}^{p-1-r} k^2 \otimes \det^{r+i} \rightarrow 0.$$

Les familles

$$\{f_0, \dots, f_{r-1}, f_r + (-1)^{i+r}[1, e]\}, \quad \{f_r, \dots, f_{p-1}\}$$

induisent une base pour le socle et le cosocle respectivement de l'induite parabolique; en particulier, les éléments  $f_0, f_r + (-1)^{i+r}[1, e]$  sont des générateurs pour l'espace de plus haut et plus bas poids de  $\mathrm{Sym}^r k^2 \otimes \det^i$  respectivement.

iii) Si  $r = 0$  alors  $\mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^j$  est semi-simple et

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i \xrightarrow{\sim} (1 \oplus \mathrm{Sym}^{p-1} k^2) \otimes \det^i.$$

Les familles

$$\{f_0 + (-1)^i[1, e]\}, \quad \{f_0, f_1, \dots, f_{p-2}, f_{p-1} + (-1)^i[1, e]\}$$

fournissent des bases linéaires pour  $\det^i$  et  $\mathrm{Sym}^{p-1} k^2 \otimes \det^i$  respectivement.

## 2.2 INDUCTION PARABOLIQUE ET INDUCTION COMPACTE

Ce numéro contient des rappels sur la réalisation des séries principales à l'aide de l'algèbre de Hecke sphérique associée aux poids de Serre pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ . Le lecteur peut se référer à [Mor13], [Bre03b] §2.1, §2.4-2.7 pour un résumé plus détaillé des résultats qui suivent, découverts initialement par Barthel et Livné ([BL94]).

Fixons  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et considérons la réalisation usuelle du poids de Serre  $\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_r$  comme la composante homogène de degré  $r$  de l'algèbre monoïdale  $k[X, Y]$ .

La décomposition de Cartan pour  $\mathbf{GL}_2$  nous permet de réaliser le Théorème de décomposition de Mackey de la manière expressive suivante

$$(\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma)|_K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} R_n(\sigma)$$

où l'on a défini  $R_n(\sigma)$  comme étant la sous  $K$ -représentation de  $\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma$  engendrée par  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r]$ . Si le poids de Serre  $\sigma$  est clair du contexte, on écrira simplement  $R_n$ .

C'est alors facile de voir que, pour tout  $n \geq 0$ , on a un isomorphisme  $K$ -équivariant naturel (induit par réciprocity de Frobenius)

$$\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \sigma^{(n)} \xrightarrow{\sim} R_{n+1}$$

où l'on a écrit  $\sigma^{(n)}$  pour désigner la  $K_0(p^{n+1})$  représentation obtenue à partir de  $\sigma|_{K_0(p^{n+1})}$  via la conjugaison par l'élément  $\begin{bmatrix} p^0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$  (qui normalise  $K_0(p^{n+1})$ ).

En particulier, on a une filtration évidente  $\{R_{n+1}(i)\}_{i=0}^r$  sur chaque  $R_{n+1}$ , induite par la seule filtration  $K_0(p^{n+1})$ -équivariante strictement croissante sur  $\sigma^{(n)}$ . De manière plus parlante,  $R_{n+1}(i)$  est le sous  $k[K]$ -module de  $R_{n+1}$  engendré par l'élément  $\begin{bmatrix} p^0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-i}Y^i]$ .

Un parmi les aspects cruciaux de la théorie des représentations  $p$ -modulaires des groupes réductifs  $p$ -adiques déployés est la réalisation des algèbres de Hecke sphériques en termes de monoïdes commutatifs (cf. [BL94], [Her11b], [Oll15]). Dans le cas de  $\mathbf{GL}_2$  on a le résultat suivant

THEOREME 2.4 ([BL94]). *L'algèbre de Hecke des endomorphismes de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  est commutative, et on a un isomorphisme de  $k$ -algèbres*

$$\mathcal{H}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \sigma) \xrightarrow{\sim} k[T]$$

pour un opérateur  $T$  approprié.

L'opérateur  $T$  (pour le poids de Serre  $\sigma$ ) est à support sur la double classe  $K \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} KZ$  et il est défini comme une projection linéaire sur  $\sigma$ . Par transport de structure on obtient une famille d'opérateurs  $K$ -équivariants  $T_n$ , définis sur chaque facteur  $R_n$ , qui admettent la description très concrète suivante.

Si  $n \geq 1$  on a

$$T_n : R_n \rightarrow R_{n-1} \oplus R_{n+1} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-j}Y^j] &\mapsto \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_n)^j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \\ &+ \delta_{j,r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n-1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r] \end{aligned}$$

pour tout  $j \in \{0, \dots, r\}$  (ce qui détermine complètement  $T_n$ ); notons que cela donne une décomposition évidente  $T_n = T_n^+ \oplus T_n^-$  où  $T_n^\pm : R_n \rightarrow R_{n\pm 1}$ .

Pour  $n = 0$ , on a de manière analogue

$$\begin{aligned} T_0 : R_0 &\rightarrow R_1 \\ [1, X^{r-j}Y^j] &\mapsto \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_0)^j \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \\ &+ \delta_{j,r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]. \end{aligned}$$

Si  $\lambda \in k$ , on écrit  $\pi(r, \lambda)$  pour désigner le conoyau de l'endomorphisme  $T - \lambda$  sur l'induite compacte  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$ . Si  $\theta$  est un  $\mathbf{Q}_p^\times$ -caractère, on écrit  $\pi(r, \lambda, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(r, \lambda) \otimes \theta$ .

On introduit une base linéaire sur les  $k[K]$ -modules  $R_{n+1}$ , qui va jouer un rôle cruciale dans l'étude de la structure interne de  $\pi(r, \lambda)$ .

Pour  $1 \leq j \leq n$ , pour une  $n - j + 1$ -uplet  $(l_j, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p - 1\}^{n-j+1}$  et pour  $l_{n+1} \in \{0, \dots, r\}$  définissons l'élément suivant de  $R_{n+1}$  :

$$F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}(l_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \lambda_j^{l_j} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j[\lambda_j] & 1 \end{bmatrix} \cdots \tag{9}$$

$$\cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-l_{n+1}} Y^{l_{n+1}}].$$

Afin de ne pas alourdir les notations, on utilise la même écriture pour désigner l'image de  $F_{l_j, \dots, l_n}^{(1,n)}(l_{n+1})$  dans  $\pi(r, \lambda)$  et on écrit plus simplement  $F_{l_n}^{(n)}(l_{n+1})$  lorsque  $j = n$ .

Si l'on écrit  $R_{n+1}^-$  pour désigner le sous  $k[K_0(p)]$ -module de  $R_{n+1}$  engendré par  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r]$ , c'est alors facile de voir que :

LEMME 2.5. *Pour  $n \geq 1$  on a un isomorphisme naturel*

$$R_{n+1} \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{K_0(p)}^K R_{n+1}^-$$

et la famille

$$\mathcal{B}_{n+1,r}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(l_{n+1}), (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p - 1\}^n, 0 \leq l_{n+1} \leq r\}$$

fournit une base linéaire pour  $R_{n+1}^-$ .

On a des résultats analogues pour  $R_1$  et, de manière similaire à ce qu'on a fait pour les induites paraboliques, on peut déterminer une base linéaire pour  $R_{n+1}$  en introduisant les éléments  $F_{l_0, \dots, l_n}^{(0,n)}(l_{n+1})$  (c'est une conséquence triviale de la décomposition de Bruhat).

Notons que d'après la définition de l'opérateur  $T$ , certains éléments de la forme  $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}(l_{n+1})$  se simplifient considérablement dans  $\pi(r, \lambda)$  :

LEMME 2.6. *Soit  $r \in \{0, \dots, p - 1\}$ ,  $\lambda \in k^\times$  et considérons  $1 \leq j \leq n$ .*

*On a l'égalité suivante dans  $\pi(r, \lambda)$  :*

$$F_{0, \dots, 0}^{(j,n)}(0) \equiv \lambda^{n-j+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^j & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] - \delta_{r,0} \lambda^{n-j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{j-1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r].$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une récurrence descendante sur  $j$ , en utilisant la description de l'opérateur  $T$  donnée ci-dessus : les détails sont laissé au lecteur.

Notons seulement que pour  $j \geq 1$  on a

$$\delta_{r,0} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j[\lambda_j] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^j & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r] = 0.$$

□

2.2.1 UN DICTIONNAIRE

Les résultats de [BL94], étendus à des groupes réductifs  $p$ -adiques déployés par Herzig [Her11a], permettent de classifier les représentations  $p$ -modulaires de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  à l'aide des systèmes de valeurs propres de Hecke.

De manière plus précise, étant donné une représentation irréductible admissible (à caractère central)  $\pi$  de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  l'espace  $\mathrm{Hom}_K(\tau, \pi)$  est non nul et de dimension finie pour une choix appropriée d'un poids de Serre  $\tau$ . L'espace étant de plus muni d'une action de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(\tau)$  (qui est commutative), on peut le décomposer en une somme directe d'espaces propres généralisés, de telle sorte que l'on ait une surjection

$$\pi(\tau, \lambda) \twoheadrightarrow \pi$$

où  $\lambda \in k$  est la valeur propre associé à l'espace propre choisi (quitte à agrandir  $k$ ).

Le résultat crucial est que, sous certaines conditions, on peut réaliser la série principale  $\pi_{r,\mu}$  en termes de conoyaux des opérateurs de Hecke :

THEOREME 2.7 ([BL94], Theorem 34)). *Soient  $\lambda \in k^\times$ ,  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  de telle sorte que  $(\lambda, r) \notin \{(\pm 1, 0)\}$ .*

*On a un isomorphisme de  $k[G]$ -modules discrets*

$$\pi(r, \lambda) \xrightarrow{\sim} \pi_{r,\lambda^{-1}}.$$

Reprenons les notations du numéro précédent. Notons que, pour  $n \geq 0$ ,  $R_{n+1}(0)$  est trivialement isomorphe à l'induite compacte  $\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$ , l'isomorphisme étant induit par réciprocité de Frobenius en notant que  $K_0(p^{n+1})$  agit sur l'élément  $\begin{bmatrix} 1 & X^r \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$  par le caractère  $\chi_r^s$ .

La remarque importante est que l'isomorphisme précédente est préservé lorsque l'on considère  $\overline{R}_{n+1}(0)$ , l'image de  $R_{n+1}(0)$  dans le quotient  $\pi(r, \lambda)$ .

LEMME 2.8. *Soit  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\lambda \in k^\times$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Soit  $\overline{R}_{n+1}(0)$  l'image dans  $\pi(r, \lambda)$  du  $k[K]$ -module  $R_{n+1}(0)$ .*

*Si  $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1)\}$  la composée*

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s &\xrightarrow{\sim} R_{n+1}(0) \twoheadrightarrow \overline{R}_{n+1}(0) \\ [1, e] &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \end{aligned} \tag{10}$$

*est un isomorphisme.*

*En particulier, l'espace des  $K_{n+1}$ -vecteurs fixes de  $\pi(r, \lambda)$  est décrit par*

$$(\pi(r, \lambda))^{K_{n+1}} = \overline{R}_{n+1}(0).$$

*Démonstration.* Comme  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$  est  $K_{n+1}$  fixe et  $K_{n+1}$  est distingué dans  $K$  on déduit que

$$\overline{R}_{n+1}(0) \leq \left( \pi(r, \lambda) \right)^{K_{n+1}} \cong \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$$

de telle sorte que la deuxième partie de l'énoncé suit, pour des raisons de longueur, de l'isomorphisme (10).

Montrons que l'épimorphisme naturel (induit par réciprocity de Frobenius)

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s &\longrightarrow \overline{R}_{n+1}(0) & (11) \\ [1, e] &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \end{aligned}$$

est injectif. Supposons dans la suite que  $n \geq 1$  (le cas  $n = 0$  en est en tout similaire et laissé au lecteur).

Il suffit de vérifier que le morphisme (11) est injectif sur l'espace des  $K_1(p)$ -invariants de  $\operatorname{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$ , ce qui revient à montrer que les éléments suivantes de  $\overline{R}_{n+1}(0)$

$$\begin{aligned} F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) &= \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \\ F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0) &= \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) \end{aligned}$$

sont linéairement indépendants.

D'après le Lemme 2.6 on a

$$F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) \equiv \lambda^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] - \lambda^{n-1} \delta_{r,0} [1, X^r].$$

$$\text{et comme } T([1, X^r]) = \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \delta_{r,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r],$$

on déduit de manière similaire que

$$F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0) \equiv \lambda^{n+1} [1, X^r] - \lambda^n \delta_{r,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r].$$

Pour des raisons de support, on voit que aucune combinaison linéaire non triviale de  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$  et  $[1, X^r]$  est dans l'image de l'opérateur  $T - \lambda$ . On en déduit que les éléments  $F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0)$ ,  $F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0)$  de  $\pi(r, \lambda)$  sont linéairement indépendants lorsque  $r \neq 0$  ou bien  $r = 0$  et  $\lambda^2 \neq 1$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Nous invitons le lecteur à comparer l'énoncé du Lemme 2.8 avec [BL94], Theorem 30-3).

### 3 DIVERTISSEMENT EN THORIE D'IWASAWA

Dans ce numéro on rappelle les relations étroites entre l'algèbre d'Iwasawa  $A$  de  $\overline{\mathbf{U}}(p)$  et les représentations  $p$ -modulaires de  $G$ , selon l'approche introduite par [Sch15], [Mor], et en fournissant des compléments.



Nous établissons (Proposition 3.2) un dictionnaire entre les fonctions  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)}$  introduites au §2.1 et certains éléments de  $A$ , ce qui nous permettra de simplifier les manipulations sur les induites lisses qui ont été introduites en §2.1.

Nous nous contentons de donner les résultats dans le cas particulier qui nous intéresse, sans ambition de les énoncer dans le cadre le plus général possible. Pour les détails omis dans ce numéro, nous invitons le lecteur à se référer à [Sch15], [Mor].

Considérons l'algèbre de groupe complétée  $A = k[[\overline{\mathbf{U}}(p)]]$ . Il s'agit d'une  $k$ -algèbre locale noetherienne, complète et régulière, de dimension 1 et nous en désignons par  $\mathfrak{m}_A$  son idéal maximal. L'élément

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda] & 1 \end{bmatrix}$$

fournit un générateur linéaire pour l'espace tangent de  $A$ . Rappelons que le tore fini  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$  agit par automorphismes de  $k$ -algèbres sur  $A$  et  $X$  en est un vecteur propre, dont le caractère propre associé est  $\mathfrak{a}$ .

Soit  $\psi : K_0(p) \rightarrow k^\times$  un caractère lisse. Si  $K'_p \leq K_0(p)$  est un sous-groupe fermé, on considère tacitement  $\psi$  comme un caractère lisse de  $K'_p$  par restriction. Comme au §2.1 définissons

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \psi$$

et, exactement comme dans §2.1, nous avons la suite exacte  $K_0(p)$ -équivariante scindée :

$$0 \rightarrow \underbrace{(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \psi)^+}_{\stackrel{\text{def}}{=} M^+} \rightarrow M \rightarrow \underbrace{\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \psi}_{\stackrel{\text{def}}{=} M^-} \rightarrow 0 \quad (12)$$

(cf. (6)). D'après la dualité de Pontryagin et la décomposition d'Iwahori on a

$$(M^-)^\vee = k[[K_0(p)]] \otimes_{k[[K_0(p^\infty)]]} \psi^{-1} \xrightarrow{\sim} A \quad (13)$$

où le dernier isomorphisme est  $A$ -linéaire (cf. aussi [Mor], §3.1). En d'autres termes, l'algèbre d'Iwasawa  $A$  est naturellement munie d'une action de  $K_0(p)$  par des endomorphismes  $k$ -linéaires continus.

On a alors le résultat suivant :

**PROPOSITION 3.1.** *Soit  $B_1 \stackrel{\text{def}}{=} K_1(p) \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$  et munissons  $A$  de l'action de  $B_1$  induite par l'isomorphisme (13). Pour tout  $b \in B_1$  et tout  $N \in \mathbf{N}$  on a*

$$(b - 1) \cdot X^N \in \mathfrak{m}_A^{N+(p-2)}.$$

*En particulier, si  $\mathfrak{m}_{B_1}$  désigne l'idéal maximal de l'algèbre d'Iwasawa  $k[[B_1]]$  on a*

$$\mathfrak{m}_{B_1} \cdot (\mathfrak{m}_A)^N \subseteq (\mathfrak{m}_A)^{N+(p-2)}$$

*pour tout  $N \in \mathbf{N}$ .*

Afin de prouver la Proposition 3.1 on détermine un dictionnaire entre les éléments  $F_{\underline{l}}^{(1,n)} \in M^-$  et les générateurs des sous-modules de la forme  $\mathfrak{m}_A^N$ . Fixons  $n \in \mathbf{N}$ . Définissons

$$M_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} (M^-)^{K_{n+1}} = \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \psi.$$

L'algèbre  $A/(X)^{p^n}$  est une algèbre de Frobenius et on a un isomorphisme  $A$ -linéaire :

$$A/(X)^{p^n} \xrightarrow{\sim} k[[K_0(p)]] \otimes_{k[[K_0(p^{n+1})]]} \psi = M_{n+1}^- \tag{14}$$

ce qui permet de considérer les éléments  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in M_{n+1}^-$  (définis au (7)) comme des éléments de  $A/(X)^{p^n}$ . Pour une  $n$ -uplet  $\underline{l} \stackrel{\text{def}}{=} (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$  nous définissons :

$$\kappa_{\underline{l}} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \prod_{j=1}^n \left( (-1) \prod_{k=0}^{p-2-l_j} \binom{p-2}{k} (-1)^{k+1} \right) \right)^{-1} = \left( \prod_{j=1}^n (-1)^{l_j+1} (p-1-l_j)! \right)^{-1}$$

et  $N^o(\underline{l}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n p^{j-1} (p-1-l_j)$ . On a alors le dictionnaire suivant :

PROPOSITION 3.2. *Soit  $n \geq 1$ ,  $\underline{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ . Dans l'algèbre d'Iwasawa  $A$  on a :*

$$F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in \kappa_{\underline{l}} X^{N^o(\underline{l})} + (\mathfrak{m}_A)^{N^o(\underline{l})+(p-1)}.$$

La preuve de la Proposition 3.2 s'obtient à partir des Lemmes 3.3 et 3.4 suivantes.

LEMME 3.3. *Considérons l'algèbre  $k[\mathbf{F}_p]$  et définissons, pour  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ , les éléments*

$$f_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^j [\lambda] \in k[\mathbf{F}_p].$$

Posons  $X \stackrel{\text{def}}{=} f_{p-2}$ .

On a les égalités suivantes :

$$f_j = \begin{cases} - \left( \prod_{k=0}^{p-2-j} \binom{p-2}{k} (-1)^{k+1} \right)^{-1} X^{p-1-j} & \text{si } j < p-1, \\ -1 + X^{p-1} & \text{si } j = p-1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Pour  $j = p-2$  l'énoncé est évident et le résultat pour  $0 \leq j \leq p-3$  suit par une récurrence élémentaire qu'on laisse au lecteur.

Le cas  $j = p-1$  s'en déduit de la relation  $f_{p-1} = f_0 - 1$ . □

La Proposition 3.2 suit donc par passage à la limite à partir du lemme suivant :

LEMME 3.4. Soient  $1 \leq m \leq n$ . Pour toute  $(n - m + 1)$ -uplet  $(l_m, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p - 1\}^{n-m+1}$  définissons l'élément  $F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)} \in k[\overline{\mathbf{U}}(p^m)/\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})]$ , ainsi que les entiers  $\kappa_{l_m, \dots, l_n}$ ,  $N_m^o$  de la manière suivante :

$$F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^{l_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_{l_m, \dots, l_n} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{0, \dots, 0, l_m, \dots, l_n} \text{ avec } (0, \dots, 0, l_m, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p - 1\}^n$$

$$N_m^o \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=m}^n p^{j-m}(p - 1 - l_j).$$

Soit enfin

$$X_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda] & 1 \end{bmatrix} \in k[\overline{\mathbf{U}}(p^m)/\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})].$$

On a alors :

$$F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)} \in \kappa_{(l_m, \dots, l_n)} X_m^{N_m^o(l)} + (\mathfrak{m}_A)^{N_m^o(l)+(p-1)}$$

Démonstration. La preuve est une récurrence sur  $n - m$ , à partir du Lemme 3.3. Supposons donc le résultat en niveau  $m + 1$ .

Le morphisme naturel (induit par l'inclusion  $\overline{\mathbf{U}}(p^{m+1}) \hookrightarrow \overline{\mathbf{U}}(p^m)$ ) est alors décrit par

$$k[\overline{\mathbf{U}}(p^{m+1})/\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})] \xrightarrow{\iota} k[\overline{\mathbf{U}}(p^m)\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})]$$

$$X_{m+1} \longmapsto X_m^p.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne donc :

$$\iota(F_{l_{m+1}, \dots, l_n}^{(m+1,n)}) \equiv \kappa_{(0, \dots, 0, l_{m+1}, \dots, l_n)} X_m^{\sum_{j=m+1}^n p^{j-m}(p - 1 - l_j)}$$

modulo  $X_m^{\sum_{j=m+1}^n p^{j-m}(p - 1 - l_j) + p(p - 1)}$ . D'après le Lemme 3.3 et l'action du tore fini  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$  sur  $X_m$  on a

$$F_{l_m}^{(m)} = \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^{l_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \equiv \kappa_{(0, \dots, 0, l_m, 0, \dots)} X^{p-1-l_m}$$

modulo  $X^{p-1-l_m-(p-1)}$  ce qui permet de conclure. □

À la suite des résultats de [Mor12] (Proposition 4.4, 4.5 et 4.7), la Proposition 3.2 nous donne :

COROLLAIRE 3.5. Soient  $n, N \in \mathbf{N}$ . Munissons  $A/(X)^{p^n}$  de l'action de  $K_0(p)$  induite par l'isomorphisme (14). pour tout  $g \in K_1(p)$ ,  $b \in K_1(p) \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$  on a les égalités suivantes dans  $A/(X)^{p^n}$  :

$$(g-1) \cdot X^N \in (X)^{N+1} \quad (b-1) \cdot X^N \in (X)^{N+(p-2)}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 3.2 il suffit de montrer que

$$(g-1) \cdot F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in (X)^{N+1} \quad (b-1) \cdot F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in (X)^{N+(p-2)} \quad (15)$$

où la  $n$ -uplet  $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$  est définie par la condition  $N \equiv \sum_{j=0}^{n-1} p^j l_{j+1}$  modulo  $p^n$ . Les relations (15) découlent alors de [Mor12], Proposition 4.4, 4.5 et 4.7 (spécialisées en  $m=1$ ,  $f=1$ ).

De manière alternative, l'énoncé est un cas particulier de [Mor], Corollary 4.8.  $\square$

Fin de la preuve de la Proposition 3.1. Comme  $\mathfrak{m}_A^N$  est un idéal fermé de  $A$  et l'action de  $K_1(p)$  est continue sur  $A$ , le résultat découle du Corollaire 3.5  $\square$

#### 4 PREMIER DVISSAGE DE L'ATOME

Cette section est consacrée à l'étude préliminaire des atomes automorphes (sous-entendu, de longueur 2 pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ). Après des rappels générales, on étudie de manière approfondie (cf. §4.1) la réalisation explicite de l'atome de longueur 2 effectuée par C. Breuil dans [Bre03a]. Au moyen de certaines manipulations cohomologiques (§4.2) on se ramène au cas d'une extension de  $k[K_0(p^{n+1})]$ -modules lisses, à quotient irréductible; on en déduit un élément explicite de l'atome qui va jouer un rôle fondamental dans la suite.

La définition suivante est due à Colmez (cf. [Col10]) :

DEFINITION 4.1 (Colmez). Un atome galoisien de dimension 2 sur  $G_{\mathbf{Q}_p}$  est une représentation galoisienne (de  $G_{\mathbf{Q}_p}$  sur un  $k$ -espace linéaire de dimension 2) qui est absolument indecomposable et qui n'est pas la tordue d'une extension de  $\omega$  par la représentation triviale.

Un atome automorphe pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  est une représentation lisse de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  telle que la représentation galoisienne qui est lui associée par la correspondance de Langlands  $p$ -modulaire est un atome galoisien.

Les atomes galoisiens et les atomes automorphes qui leur correspondent ont été étudiés dans [Col10], §VII.3 et VII.4. Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas où l'atome automorphe est de longueur 2, sans multiplicité.

DEFINITION 4.2. Soit  $(\lambda, r) \notin \{(\pm 1, 0), (\pm 1, p-1)\}$  et posons  $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{un}_\lambda \omega^{r+1}$ ,  $\delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{un}_{\lambda^{-1}}$ .

Nous définissons  $A_{r, \lambda}$  comme étant un générateur linéaire de l'espace

$$\text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}^1(\text{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_B^G \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1}). \quad (16)$$

Notons que le foncteur de Montréal de Colmez induit un isomorphisme linéaire entre (16) et  $\text{Ext}_{G_{\mathbf{Q}_p}}^1(\delta_2, \delta_1)$  (cf. [Col10], VII.4.7) ce qui montre que l'espace d'extensions entre les séries principales ci-dessus est bien de dimension un.

4.1 RALISATION DE L'ATOME AUTOMORPHE

Soit  $(\lambda, r) \in k^\times \times \mathbf{N}$  comme dans la Définition 4.2 et supposons de plus que  $0 \leq r \leq p - 3$ . Ce numéro a pour objectif de rappeler la réalisation explicite des atomes automorphes pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , effectuée dans [Bre03a].

Dans son article [Bre03a], Breuil achève une description exhaustive de la réduction de représentations cristallines pour  $G_{\mathbf{Q}_p}$  en poids  $(0, k)$  avec  $k - 2 \leq 2p - 2$ . Cela est effectué à l'aide de la construction d'un réseau explicite à l'intérieur d'un quotient de  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} E^2$ , isotypique pour l'action de l'algèbre de Hecke sphérique.

Rappelons qu'on a un isomorphisme standard :

$$\text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} E^2) \xrightarrow{\sim} E[T]$$

où  $T$  est un certain opérateur de Hecke "canonique" (cf. [Bre03a], §2.1.4 et §2.2) qui induit, par réduction mod  $\mathfrak{m}_E$  sur le réseau  $\text{Sym}^{k-2} \mathcal{O}^2$ , un endomorphisme  $G$ -équivariant de  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} k^2$  (et qui sera noté  $T$  également pour ne pas alourdir les notations).

Fixons  $r \in \{0, \dots, p - 3\}$  et  $a_p \in \mathfrak{m}$ . Nous définissons :

$$\Theta_{p+3+r, a_p} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \left( \text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p+1+r} \mathcal{O}^2 \rightarrow \text{Coker}(T - a_p) \right).$$

On a alors le résultat suivant :

**THEOREME 4.3.** ([Bre03a], Théorème 3.3.2, Proposition 5.3.4.1) *Le  $\mathcal{O}[G]$ -module  $\Theta_{p+3+r, a_p}$  est un réseau dans  $\text{Coker}(T - a_p)$  et si  $\text{val}(a_p) = 1$  et  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p+2+r)a_p}{p}$  mod  $\mathfrak{m}$  on a*

$$\Theta_{p+3+r, a_p} \otimes_{\mathcal{O}} k \cong A_{r, \lambda} \otimes \omega.$$

Nous allons maintenant préciser l'énoncé du Théorème 4.3. Posons  $\sigma_{p+1+r} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sym}^{p+1+r} k^2$ , que nous allons identifier avec la composante homogène de degré  $p + 1 + r$  de  $k[X, Y]$  (munie de l'action modulaire usuelle de  $KZ$ ). Il s'ensuit de [Bre03a], Lemme 5.1.3 (ii) qu'on a une injection  $KZ$ -équivariante :

$$\sigma_r \otimes \omega \hookrightarrow \sigma_{p+1+r}.$$

Afin d'éviter des ambiguïtés, nous désignons par  $x^{r-j} y^j$  (avec  $j \in \{0, \dots, r\}$ ) un vecteur propre de  $\sigma_r \otimes \omega$  pour l'action du tore fini, de caractère propre  $\chi_r \mathfrak{a}^{-j} \det$ .

D'après [Bre03a], Corollaire 5.14 le conoyau de l'opérateur de Hecke  $T$  agissant sur  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} k^2$  se dévise de la manière suivante :

PROPOSITION 4.4 ([Bre03a], Corollaire 5.1.4). *On a une suite exacte de  $k[G]$ -modules :*

$$0 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r \otimes \omega \xrightarrow{\iota} \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T \longrightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-3-r} \otimes \omega^{r+2} \rightarrow 0$$

où l'on a écrit  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T \stackrel{\text{def}}{=} \text{Coker}(T)$ .

C'est important pour la suite d'expliciter l'image du morphisme  $\iota$ .

LEMME 4.5. *Pour  $j \in \{0, \dots, r\}$  on a*

$$\iota([1, x^{r-j}y^j]) = \binom{r+2}{j+1} [1, X^{p+r-j}Y^{j+1}].$$

De plus, on a  $[1, X^{p+1+r}] \equiv 0$  dans le quotient  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}}{T}$ .

*Démonstration.* Le morphisme  $\iota$  est obtenu, par induction compacte, à partir du morphisme suivant de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ -représentations (cf. [Bre03a], Lemme 5.1.3, *ii*) :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_r \otimes \omega & \hookrightarrow & \sigma_{p+1+r} \\ x^{r-j}y^j & \mapsto & X^{p+r-j}Y^{j+1} - X^{r+1-j}Y^{p+j}. \end{array}$$

De plus, d'après [Bre03a], Corollaire 5.1.4, on a

$$\binom{r+2}{i}^{-1} \left( \binom{r+1+p}{i} X^{p+r+1-i}Y^i + \binom{r+1+p}{p-1+i} X^{r+2-i}Y^{p-1+i} \right) \equiv 0$$

dans  $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}}{T}$ , pour  $0 \leq i \leq r+2$ .

En d'autres termes

$$\binom{r+1}{i} X^{p+r+1-i}Y^i \equiv \begin{cases} -\binom{r+1}{i-1} X^{r+2-i}Y^{p-1+i} & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Ceci permet de conclure. □

Le résultat suivant, qui est à la base des méthodes développés dans cet article, permet de réaliser  $A_{r,\lambda}$  comme un quotient de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T$

PROPOSITION 4.6. *Soit  $r \in \{0, \dots, p-3\}$ ,  $\lambda \in k^\times$ . On a un diagramme commutatif de  $k[G]$ -modules, à lignes exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r \otimes \omega & \xrightarrow{\iota} & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T & \longrightarrow & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-3-r} \otimes \omega^{r+2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & A_{r,\lambda} \otimes \omega & \longrightarrow & \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) \longrightarrow 0 \end{array} \tag{17}$$

*Démonstration.* Cela est l'énoncé, ainsi que sa preuve, de [Bre03a], Proposition 5.3.4.1. □

4.2 RESTRICTION AUX GROUPES DE CONGRUENCE

L’objectif de cet numéro est de ramener l’étude de la  $K$ -restriction de l’atome  $A_{r,\lambda}|_K$  à celui d’une famille de  $k[K_0(p)]$ -extensions de modules discrets. En d’autres termes :

PROPOSITION 4.7. *Soit  $r \in \{0, \dots, p - 3\}$ . On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{k[K]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\leftarrow \\ n \geq 0}} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p^{n+1})]}^1(\chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$$

(où les espaces d’extensions sont à caractère central fixé).

Les morphismes partiels

$$\begin{aligned} & \mathrm{Ext}_{k[K]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \xrightarrow{\Psi_n} \\ & \xrightarrow{\Psi_n} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p^{n+1})]}^1(\chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \end{aligned}$$

se décrivent de manière explicite à l’aide de produits fibrés appropriés : si  $[E]$  désigne la classe d’une extension dans  $\mathrm{Ext}_{k[K]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$  alors  $\Psi_{n+1}([E]) = [E_{n+1}]$  où l’extension  $E_{n+1}$  est déterminé par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & \lrcorner & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det & \longrightarrow & E_{n+1} & \longrightarrow & \langle 1_{K_0(p^{n+1})} \rangle \longrightarrow 0; \end{array}$$

et  $1_{K_0(p^{n+1})} \in \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}$  désigne la fonction à support sur  $K_0(p^{n+1})$ . Rappelons que le foncteur de restriction à  $K$  nous donne un morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{k[G]}^1(\pi_{p-3-r,\lambda} \otimes \omega^{r+2}, \pi_{r,\lambda-1} \otimes \omega) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{k[K]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det).$$

D’après [BP13], Theorem 20.3, ce morphisme est injectif lorsque<sup>3</sup>  $1 \leq r \leq p - 3$ .

DEFINITION 4.8. *Soient  $\lambda \in k^\times$  et  $r \in \{0, \dots, p - 3\}$ . Nous définissons  $\mathcal{B}_{n+1}$  comme l’image de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega|_K$  via le morphisme  $\Psi_{n+1}$ .*

La preuve de la Proposition 4.7 est formelle et occupera le reste de ce numéro.

LEMME 4.9. *Soit  $M$  un  $k[K]$ -module discret,  $n \in \mathbf{N}$  et soit  $\psi$  un caractère lisse de  $K_0(p^{n+1})$ . On a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{Ext}_{k[K]}^i(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \psi, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^i(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \psi, M|_{K_0(p)}) \tag{18}$$

$$\mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^i(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \psi, M|_{K_0(p)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p^{n+1})]}^i(\psi, M|_{K_0(p^{n+1})})$$

pour tout  $i \geq 0$ .

3. Des calculs non publié de l’auteur montrent que cela reste vrai pour  $0 \leq r \leq p - 3$ ,  $p \geq 3$ .

*Démonstration.* C'est la forme forte de la réciprocity de Frobenius, cf. [Vig96] I.5.9 (e).  $\square$

LEMME 4.10. *Soit  $j, n \in \mathbf{N}$  et soient  $\psi, \chi$  des caractères lisses de  $K_0(p^\infty), K_0(p^{n+1})$  respectivement. L'espace*

$$\mathrm{Ext}_{k[K_0(p^{n+1})]}^j(\chi, (\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \psi)|_{K_0(p^{n+1})})$$

*est de dimension finie.*

*Démonstration.* D'après [AD14], Theorem 4.1 (cf. aussi [Laz65]), l'algèbre d'Iwasawa  $k[[K_0(p^\infty)]]$  est une  $k$ -algèbre semilocale et noethérienne. En particulier tout  $k[[K_0(p^\infty)]]$ -module de type fini admet une résolution libre par des  $k[[K_0(p^\infty)]]$ -modules de type fini. D'après la dualité de Pontryagin,  $\psi$  admet une résolution injective  $\mathcal{S}^\bullet$  par des  $k[[K_0(p^\infty)]]$ -modules admissibles. D'après [Vig96] I.5.9 (b) et I.5.6 (1) il s'ensuit que  $\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \mathcal{S}^\bullet$  est une résolution injective de  $\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \psi$  constituée par des objets admissibles. Par [Vig96] I.5.9 (d) on conclut que  $(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \mathcal{S}^\bullet)|_{K_0(p^{n+1})}$  est une résolution injective de  $(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \psi)|_{K_0(p^{n+1})}$  constituée par des objets admissibles.  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 4.7.* Posons  $M \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)|_{K_0(p)}$ . D'après le Lemme 4.9 il suffit de montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}_{K_0(p)}^i(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 0} \mathrm{Ext}_{k[K]}^i(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) \quad (19)$$

Comme  $\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2} = \varinjlim_{n \geq 0} \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$  il s'ensuit de [Jen72], Théorème

4.2 que l'on a une suite spectrale :

$$\varprojlim_{n \geq 0} {}^{(i)}\mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^{j+i}(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M)$$

D'autre part [KS06], Corollary 13.3.16 et Exemple 13.3.17 (ii) nous donne

$$\varprojlim {}^{(i)}\mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) = 0$$

pour tout  $i > 1$  et le Lemme 4.10 montre que les conditions de Mittag-Leffler sont vérifiées. D'après [KS06], Exercice 12.8 on conclut que (19) est bien un isomorphisme.  $\square$

D'après la description explicite du morphisme  $\Psi_n$  nous avons une description simple de l'extension  $\mathcal{B}_{n+1}$  à l'intérieur de l'atome  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$ . Plus précisément définissons, pour  $n \geq 1$  l'élément

$$e_{n+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{p-1}Y^{r+2}] \in A_{r,\lambda} \otimes \omega.$$



Nous avons un diagramme commutatif de  $K_0(p^{n+1})$ -modules discrets :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{n+1} & \longrightarrow & \chi_{r+2} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & A_{r,\lambda} \otimes \omega & \longrightarrow & \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

et d’après [Bre03a] Lemme 5.1.3 (ii) on a

$$\begin{aligned}
 A_{r,\lambda} \otimes \omega &\longrightarrow \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) & (20) \\
 e_{n+1} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{p-3-r}]
 \end{aligned}$$

(on a désigné comme d’habitude par  $x^{p-3-r}$  un générateur de l’espace linéaire de plus haut poids de  $\sigma_{p-3-r}$ ).

Par conséquent :

**COROLLAIRE 4.11.** *Soit  $r \in \{0, \dots, p-3\}$  et  $\lambda \in k^\times$ . Supposons que*

$$(\mathbf{H}) \quad (r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-3, \pm 1)\}.$$

*Pour tout  $n \geq 0$  le  $K_0(p^{n+1})$ -module lisse  $\mathcal{B}_{n+1}$  est isomorphe à la sous  $K_0(p^{n+1})$ -représentation de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$  engendrée par  $e_{n+1}$  et  $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det$ .*

*Démonstration.* Cela découle du Lemme 2.8, ainsi que de (20) et de la description du morphisme  $\Psi_n$ . □

### 4.3 RSUM DES NOTATIONS.

Nous fixons ici les notations qui seront utilisés dans les preuves et les énoncés techniques de §5 et 6. Fixons  $(\lambda, r)$  vérifiant l’hypothèse (H). Nous supposons de plus<sup>4</sup> que  $r \neq 0$ . Nous posons d’abord  $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det$  et

$$M^+ \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p) s K_0(p)} \chi_r^s \det, \quad M^- \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s \det.$$

Notons qu’on a  $M^+ = (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)^+$  (cf. (6)).

Rappelons que  $M^+$  (resp.  $M^-$ ) est un  $k[[K_0(p)]]$ -module discret, qui est unseriel en restriction à  $\mathbf{U}$  (resp.  $\overline{\mathbf{U}}(p)$ ). Pour tout  $n \geq 0$  posons  $M_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} M^{K_{n+1}}$  et

$$M_{n+1}^+ \stackrel{\text{def}}{=} (M^+)^{K_{n+1}} = (M^+)^{\mathbf{U}(p^{n+1})}, \quad M_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} (M^-)^{K_{n+1}} = (M^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})}.$$

Rappelons qu’on a introduit au §2 des bases “naturels” sur  $\pi(r, \lambda, \omega)$ ,  $M$ . En particulier, le Lemme 2.8 nous permet d’identifier, pour tout  $\underline{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ , l’élément  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in M_{n+1}^-$  à l’élément  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(0) \in \pi(r, \lambda, \omega)$  (cf. (7), (9) pour la description de  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}$ ,  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(0)$ ).

4. Des calculs non publiés de l’auteur, montrent que les énoncés des §5, 6 restent valables pour  $r = 0$ , au prix de calculs plus poussés.

L'élément suivant de l'atome  $A_{r,\lambda}$  va jouer un rôle clé dans l'étude des  $K_{n+1}$  invariants :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} e_{n+1} + (-1)^r \lambda^{-1} F_{r+1}^{(n+1)}(0) + \\ + (-1)^{r+1} (r+1) \left( \sum_{j=1}^n \lambda^{-2(n-j+1)} F_{r,0,\dots,0}^{(j,n)}(1) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Pour  $n \geq 0$  nous posons

$$F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^1[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \tilde{e}_{n+1}$$

où on a pris  $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ . Notons que les images des éléments  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  dans  $\pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})$  s'identifie à  $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(0)$  grâce au Lemme 2.8 et (20).

## 5 LE COMPORTEMENT DE $\tilde{e}_{n+1}$

Soit  $n \geq 1$ . Ce numéro est consacré au résultat clef qui concerne le comportement de l'élément  $\tilde{e}_{n+1}$  à l'intérieur de l'atome automorphe. Rappelons qu'on a défini au §4.2 un sous  $K_0(p^{n+1})$ -module  $\mathcal{B}_{n+1}$  à l'intérieur de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$  s'inscrivant dans une suite exacte  $k[K_0(p^{n+1})]$ -équivariante non-scindée :

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Le but de ce numéro est de décrire la structure de l'extension  $\mathcal{B}_{n+1}$  (Proposition 5.4), à l'aide de l'élément  $\tilde{e}_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}$  défini en (21). Il s'agit du cœur technique de l'article et c'est ici que nous avons besoin des calculs sur les vecteurs de Witt, ainsi que de la description explicite de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$  effectuée au §4.1.

Sauf mention explicite, l'on suppose ici que  $1 \leq r \leq p-3$ . Nous commençons par l'action de  $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$ .

LEMME 5.1. *Soit  $c \in \mathbf{F}_p$ .*

*Alors*

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{array} \right] - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} = c(r+1) \lambda^{-n-1} [1, x^r].$$

*Démonstration.* D'après le Lemme 4.5 on a les égalités

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) e_{n+1} = \\ & = \sum_{j=0}^{r+1} c^{r+1-(j-1)} \binom{r+2}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{p+r-(j-1)} Y^{(j-1)+1}] \\ & = \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+2}{j+1} \frac{j+1}{r+2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] \\ & = \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+1}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j]. \end{aligned}$$

De manière analogue les relations produites par l'opérateur de Hecke  $T$  (cf. (8)) nous donnent

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r+1}^{(n+1)}(0) = \\ & = \sum_{j=0}^r \binom{r+1}{j} c^{r+1-j} (-1)^{r+1} \cdot \\ & \quad \cdot \sum_{\lambda_{n+1} \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_{n+1})^j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[\lambda_{n+1}] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+2} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r] \\ & = \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} (-1)^{r+1} \binom{r+1}{j} \cdot \\ & \quad \cdot \left( \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] - \delta_{r,j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, y^r] \right) \\ & = \lambda (-1)^{r+1} \left( \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+1}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] \right) - \\ & \quad - (r+1) c (-1)^{r+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, y^r]. \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq m \leq n$ , et comme  $r > 0$  on a (cf. Lemme 2.6)

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r,0,\dots,0}^{(m,n)}(1) = c \left( \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} F_{0,\dots,0}^{(m+1,n)}(0) \right) = \\ & = c \left( \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} (\lambda^{n-m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{m+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r]) \right) \\ & = c \lambda^{n-m+1} (-1)^r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^m & 0 \end{bmatrix} [1, y^r] - c \lambda^{n-m} (-1)^r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{m-1} & 0 \end{bmatrix} [1, y^r]. \end{aligned}$$

La conclusion suit maintenant par un calcul élémentaire qu'on laisse au lecteur.  $\square$

Le lemme suivant nous permet de contrôler l'action du radical unipotent entier. Sa preuve, qui demande des manipulations techniques sur les vecteurs de Witt de  $\mathbf{F}_p$ , a été mise en appendice.

LEMME 5.2. *Soit  $p \geq 3$  et  $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$ . On a l'égalité suivante dans  $\mathcal{B}_{n+1}$  :*

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}$$

modulo  $(\mathfrak{m}_A^{p-3-r+(p-2)} M_{n+1}^-) \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}$ .

De manière similaire, on a

LEMME 5.3. *Soit  $\alpha \in \mathbf{Z}_p$  et  $p \geq 3$ . Alors on a l'égalité suivante dans  $\mathcal{B}_{n+1}$  :*

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r} \alpha (r+1) \lambda^{-2n} F_{r+1,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}$$

modulo  $(\mathfrak{m}_A^{p-3-r+(p-2)} M_{n+1}^-) \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}$ .

On peut finalement décrire l'extension  $\mathcal{B}_{n+1}$ , c'est-à-dire la sous  $K_0(p^{n+1})$ -représentation engendrée par  $e_{n+1}$  et  $\pi(r, \lambda, \omega)$  dans  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$  :

PROPOSITION 5.4. *Soit  $n \geq 1$  et considérons l'extension*

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Soit  $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + pa & b \\ p^{n+1}c & 1 + pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$ .

On a alors l'égalité suivante dans  $\mathcal{B}_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} (g-1) \tilde{e}_{n+1} &\equiv \\ &\equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \left( \overline{b} \kappa_{p^{n-1-(p-3-r)}} X^{p-3-r} + \overline{(a-d)} \kappa_{p^{n-1-(p-2-r)}} X^{p-2-r} \right) \end{aligned}$$

modulo

$$(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \oplus (\mathfrak{m}_A^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^-).$$

*Démonstration.* Via le dictionnaire de la Proposition 3.2, il s'agit d'une conséquence immédiate des Lemmes 5.1, 5.2, 5.3 et de la décomposition d'Iwahori de  $K_0(p^{n+1})$ . □

UNE REMARQUE. L'énoncé de la Proposition 5.4 ne dépend pas du choix du relèvement  $\tilde{e}_{n+1}$ , au sens suivant. Soit  $x \in \pi(r, \lambda, \omega)$  et écrivons  $x = x^+ \oplus x^-$  selon la décomposition  $K_0(p)$ -équivariante  $\pi(r, \lambda, \omega) \cong M^+ \oplus M^-$  (cf. 4.3). Supposons que  $\tilde{e}_{n+1} + x$  est fixé par  $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})$  modulo  $\text{soc}_{K_0(p)}(M^+)$ . On déduit de la Proposition 5.1 que  $x^- \in M_{n+1}^-$  et comme la composante  $\chi_{r+2}$ -isotypique de  $M_{n+1}^- / (\mathfrak{m}_A^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^-)$  est de dimension 1 on conclut que  $x^- \in \mu X^{(p-3-r)} + (\mathfrak{m}_A^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^-)$  pour un scalaire non-nul  $\mu \in k^\times$ . Comme  $(g-1) \cdot X^{p-3-r} \in \mathfrak{m}_A^{(p-3-r)+(p-2)}$  si  $g \in K_1(p^2)$  (cf. Proposition 3.1) on déduit :

COROLLAIRE 5.5. Soit  $n \geq 1$ . Considérons l'extension de  $K_0(p^{n+1})$ -modules discrets :

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

et soit  $\mathfrak{e}_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}$  tel que  $\mathfrak{e}_{n+1} \notin \pi(r, \lambda, \omega)$ . Supposons de plus que  $\mathfrak{e}_{n+1}$  est fixé par  $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})$  modulo  $\text{soc}_{K_0(p)}(M^+)$ .

Pour tout  $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1+pa & b \\ p^{n+1}c & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$  on a

$$\begin{aligned} (g-1)\mathfrak{e}_{n+1} &\equiv \\ &\equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left( \overline{b}\kappa_{p^n-1-(p-3-r)}X^{p-3-r} + \overline{(a-d)}\kappa_{p^n-1-(p-2-r)}X^{p-2-r} \right) \end{aligned}$$

modulo  $M^+ \oplus (\mathfrak{m}_A^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-$ .

REMARQUE 5.6. Pour  $r = 0$  on peut modifier la définition de l'élément  $\tilde{e}_{n+1}$  de telle sorte que l'énoncé de la proposition 5.4 reste valable. Toutefois, la technicité des manipulations nécessaires ont suggéré à l'auteur de ne pas inclure les calculs dans cet article.

## 6 ESPACES INVARIANTS ET APPLICATIONS

Dans cette section on détermine l'espace des invariants de l'atome  $A_{r,\lambda} \otimes \det$  selon certains sous-groupes de congruence de niveau arbitraire en  $p$ , dans le cas générique. Cela permet d'étendre un résultat de Breuil et Paskunas (cf. [BP13], Theorem 20.3) au cas de niveau arbitraire, et par conséquent, via la compatibilité locale-globale de la correspondance de Langlands  $p$ -adique, déterminer les composantes Hecke-isotypiques de la cohomologie mod  $p$  des courbes modulaires (§6.3).

L'outil principale de la preuve du Théorème 6.4 demeure dans le Lemme 6.1, qui s'obtient comme une conséquence de la Proposition 5.4 à l'aide des moyens d'algèbre d'Iwasawa introduits au §3.

Sauf mention explicite, on suppose que  $1 \leq r \leq p-3$  (en particulier  $p > 3$ ).

COROLLAIRE 6.1. Soit  $n \geq 1$  et considérons la  $K_0(p^{n+1})$ -sous représentation de  $\mathcal{B}_{n+1}$  déduite de la Proposition 5.4 :

$$0 \rightarrow M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \rightarrow \left\langle K_0(p^{n+1}) \cdot \tilde{e}_{n+1} \right\rangle \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Soit  $H_{n+1} \in \{K_{n+1}, I_{n+1}\}$  et  $x \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap H_{n+1}$ . Alors :

$$(x-1) \cdot \tilde{e}_{n+1} = 0$$

*Démonstration.* C'est une conséquence des Propositions 3.1 et 5.4, en remarquant que tout élément  $x \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap H_{n+1}$  peut s'écrire comme  $x = x'^{p^n}$  pour un élément  $x' \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap H_1$ . □

6.1 ESPACE DES  $K_{n+1}$ -INVARIANTS

On calcule ici l'espace des  $K_{n+1}$ -invariants de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$  dans le cas générique. La preuve consiste à donner d'abord une borne supérieure à  $(A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}}$  grâce au Corollaire 6.1 ; on détermine ensuite l'espace des invariants de manière précise via l'énoncé de la Proposition 5.4.

Rappelons la notation  $M_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \det \cong (\pi(r, \lambda, \omega))^{K_{n+1}}$ , ainsi que la décomposition  $M_{n+1} = M_{n+1}^+ \oplus M_{n+1}^-$ . On commence par un lemme.

LEMME 6.2. *Soit  $M_0^- \stackrel{\text{def}}{=} \text{soc}_{K_0(p)}(M^-)$ . On a  $(M^-)^{I_{n+1}} = (M^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})} = M_{n+1}^-$  et  $(M^-/M_0^-)^{I_{n+1}} = (M^-/M_0^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})}$  ainsi que une suite exacte non-scindée*

$$0 \rightarrow \chi_r^s \det \rightarrow (M^-)^{I_{n+1}} \rightarrow (M^-/M_0^-)^{I_{n+1}} \rightarrow \chi_r^s \mathfrak{a} \det \rightarrow 0$$

*Démonstration.* Pour un caractère  $\chi$  de  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)\overline{\mathbf{U}}(p)$  désignons par  $\text{Inj}(\chi)$  son enveloppe injective dans la catégorie des  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)\overline{\mathbf{U}}(p)$ -représentations lisses. On a alors

$$((\text{Inj}(\chi))^\vee)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{j+1})} \cong A/(X^{p^j}) \otimes_k \chi^{-1}.$$

L'existence de la suite exacte de  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})$ -représentations

$$0 \rightarrow \chi_r^s \det \rightarrow (M^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})} \rightarrow (M^-/M_0^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})} \rightarrow \chi_r^s \mathfrak{a} \det \rightarrow 0$$

suit alors par un calcul de dimension en remarquant que  $M^-$ ,  $M^-/M_0^-$  sont des enveloppes injectives de  $\chi_r^s \det$  et  $\chi_r^s \det \mathfrak{a}$  respectivement (cf. [Paš10], Proposition 5.9) et que  $H^1(\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}), \chi_r^s \det)$  est de dimension un. En particulier :

$$(M^-/M_0^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})} \cong (X^{p^{n+1}-p^n})/(X^{p^{n+1}}). \tag{22}$$

Grâce à la Proposition 3.1 on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{(I_{n+1} \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p))} \cdot (X^{p^{n+1}-p^n})M_{n+2} &\subseteq \mathfrak{m}_{B_1^{p^n}} \cdot (X^{p^{n+1}-p^n})M_{n+2} \\ &\subseteq (X^{p^{n+1}-p^n+p^n(p-2)})M_{n+2} = 0 \end{aligned}$$

(où l'on a écrit  $\mathfrak{m}_{(I_{n+1} \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p))}$  pour désigner l'idéal maximal de l'algèbre d'Iwasawa de  $(I_{n+1} \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p))$ , et où l'on a utilisé le fait que  $(I_{n+1} \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)) \subseteq B_1^{p^n}$ ) ce qui permet de conclure à l'aide de (22) que les éléments de  $(I_{n+1} \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p))$  agissent trivialement sur  $(M^-/M_0^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})}$ , i.e. que  $(M^-/M_0^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})} = (M^-/M_0^-)^{I_{n+1}}$ .

Pour terminer, notons que  $(M^-)^{I_{n+1}} = (M^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})}$  par un comptage de dimension (cf. par exemple [Mor13], Proposition 3.5), ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

PROPOSITION 6.3. Soit  $n \geq 1$  et considérons la suite exacte induite par le foncteur des  $K_{n+1}$ -invariants :

$$0 \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \det \rightarrow (A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}} \xrightarrow{\text{proj}_{n+1}} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}.$$

Alors

$$\text{long}_K(\text{coker}(\text{proj}_{n+1})) \leq 1.$$

Démonstration. Le foncteur des  $K_{n+1}$ -invariants nous donne une suite exacte :

$$0 \rightarrow M_{n+1} \rightarrow (A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}} \xrightarrow{\text{proj}_{n+1}} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}.$$

Par construction, l'élément  $\text{proj}_{n+1}(\tilde{e}_{n+1})$  est un  $K$ -générateur de l'induite  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}$ , ayant support sur  $K_0(p^{n+1})$  et étant  $\chi_{r+2}$  isotypique pour l'action du tore entier.

Ainsi, l'élément

$$F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + \delta_{r,p-3} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \in \langle K \cdot \tilde{e}_{n+1} \rangle \subseteq A_{r,\lambda} \otimes \omega$$

est envoyé, par la projection

$$(A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}} \xrightarrow{\text{proj}_{n+1}} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2} \twoheadrightarrow \text{ind}_{K_0(p)}^K \chi_{r+2}$$

sur un générateur de

$$\left( \text{soc}_K(\text{ind}_{K_0(p)}^K \chi_{r+2}) \right)^{K_1(p)}.$$

Nous montrons que  $F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  est fixé par  $K_{n+1}$ , ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned} \text{long}_K\left( (A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}} \right) &\geq \\ &\geq \text{long}_K(\pi(r, \lambda, \omega)^{K_{n+1}}) + \text{long}_K(\pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})^{K_{n+1}}) - 1. \end{aligned}$$

Pour  $g = \begin{bmatrix} 1+p^{n+1}a & p^{n+1}b \\ p^{n+1}c & 1+p^{n+1}d \end{bmatrix} \in K_{n+1}$  un calcul élémentaire nous donne

$$g \cdot F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(g_{0,\lambda_0} \cdot \tilde{e}_{n+1}) + \delta_{r,p-3} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(g_1 \cdot \tilde{e}_{n+1})$$

où

$$g_{0,\lambda_0} \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}z & 1 \end{bmatrix} \cdot (B(\mathbf{Z}_p) \cap K_{n+1}), \quad g_1 \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}w & 1 \end{bmatrix} \cdot (B(\mathbf{Z}_p) \cap K_{n+1})$$

avec  $z \equiv \overline{b} + \overline{(a-d)\lambda_0 - \overline{c}\lambda_0^2}$  et  $w \equiv \overline{c}$  modulo  $p$ .

On en déduit, utilisant le Corollaire 6.1 et le Lemme 5.1, l'égalité suivante :

$$(g-1) \cdot F_{0, \underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = \underbrace{(-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left( \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overline{z} x^r + \delta_{p-3,r} \overline{c} x^r \right)}_{\in \sigma_r \otimes \det}.$$

où l'on a posé  $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{b} + \overline{(a-d)\lambda_0 - \overline{c}\lambda_0^2}$ .

Un calcul simple (sans oublier la torsion par le déterminant dans  $\sigma_r \otimes \det!$ ) donne au final

$$\begin{aligned} (g-1) \cdot F_{0, \underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) &= (-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left( \sum_{j=0}^r (-1) \binom{r}{j} x^{r-j} y^j \left( \overline{b} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\overline{a-d}) \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j+1} - \overline{c} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j+2} \right) + \delta_{p-3,r} \overline{c} x^r \right) \\ &= (-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left( (-1) \binom{r}{0} x^r (-\overline{c}) \left( \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r+2} \right) + \delta_{p-3,r} \overline{c} x^r \right) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que  $F_{0, \underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  est bien fixé par  $K_{n+1}$ . □

Dans le cas générique on obtient :

**THEOREME 6.4.** *Supposons  $r \neq 0$ . Alors  $\text{coker}(\text{proj}_{n+1}) = \sigma_{r+2}$ .*

*Démonstration.* Supposons au contraire que le morphisme

$$(A_{r,\lambda} \otimes \omega)^{K_{n+1}} \longrightarrow \text{ind}_{\text{proj}_{n+1}}^K \chi_{K_0(p^{n+1})} \chi_{r+2}$$

est surjectif. Comme l'élément  $\text{proj}_{n+1}(F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}))$  est envoyé par la surjection

$$\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2} \twoheadrightarrow \text{ind}_{K_0(p)}^K \chi_{r+2}$$

sur un générateur de  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}$ , on déduit qu'il existe un élément  $y \in \pi(r, \lambda, \omega)$  qui est  $\chi_{r+2}$ -isotypique pour l'action du tore fini et de tel que  $F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y \in A_{r,\lambda} \otimes \omega$  est fixé par  $K_{n+1}$ . Écrivons  $y = y^+ \oplus y^-$  selon la décomposition  $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2} = M^+ \oplus M^-$ . D'après la preuve de la Proposition 6.3, on a

$$(g-1) \cdot F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = (-1)^n \overline{c} \lambda^{-n-1} (r+1) x^r \in (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} = \text{soc}_{K_1(p)}(M^+) \tag{23}$$

pour  $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + p^{n+1}a & p^{n+1}b \\ p^{n+1}c & 1 + p^{n+1}d \end{bmatrix} \in K_{n+1}$  et comme l'on a supposé que  $F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$  est  $K_{n+1}$ -fixe on déduit que

$$y^- \in (M^-)^{K_{n+1}}, \quad y^+ \in \left( \frac{M^+}{\text{soc}_{K_1(p)}(M^+)} \right)^{K_{n+1}}.$$



D'après le Lemme 6.2 on déduit que  $(\frac{M^+}{\text{soc}_{K_1(p)}(M^+)})^{K_{n+1}}$  est un  $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{Z}_p)$ -module de longueur  $p^{n+1}$  et cosocle  $\chi_r \det \mathfrak{a}^{-1}$ . Comme  $\chi_r \det \mathfrak{a}^{-1} \neq \chi_{r+2}$  si  $p > 3$  on en déduit que  $y^+ \in (M^+)^{K_{n+1}} = M_{n+1}^+$ .

Au final on a  $y \in M_{n+1}$ , en particulier  $y$  est  $K_{n+1}$ -invariant. Or, ceci contredit le fait que  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$  est  $K_{n+1}$  invariant, en vue de (23).  $\square$

REMARQUE 6.5. *On s'attend à ce que l'énoncé du Théorème 6.4 reste valable pour  $r = 0$ . Ceci est bien le cas lorsque  $n = 1$ , mais on a désisté de traiter le cas général, qui demande un certain nombre de manipulations techniques ennuyeuses, et qu'on a préféré de ne pas l'aborder.*

### 6.2 ESPACE DES $I_n$ -INVARIANTS

Avec la même méthode, nous calculons l'espace des  $I_{n+1}$ -invariants de  $A_{r,\lambda} \otimes \omega$ . D'abord, on donne une première estimation grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 6.6. *Soit  $n \geq 1$  et considérons la suite exacte*

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega)^{I_{n+1}} \rightarrow (A_{r,\lambda} \otimes \det)^{I_{n+1}} \xrightarrow{\text{proj}_{n+1}} \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})^{I_{n+1}}.$$

Alors  $\text{coker}(\text{proj}_{n+1})$  est un quotient de  $\chi_{r+2} \oplus \chi_{r+2}^s$ .

Démonstration. Rappelons que (cf. [Mor13], Proposition 5.3) :

$$(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K(\chi_r \det))^{I_{n+1}} \cong \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)}(\chi_r \det) \oplus (\text{ind}_{K_0(p^n)}^K \chi_r \det)^+ = M_{n+1}^- \oplus M_n^+$$

et de manière similaire

$$(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2})^{I_{n+1}} \cong \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2} \oplus (\text{ind}_{K_0(p^n)}^K \chi_{r+2})^+$$

Considérons  $F_{p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \in A_{r,\lambda} \otimes \omega$ . Par construction, son image via le morphisme  $\text{proj}_{n+1}$  est un générateur du radical de  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$ .

Montrons maintenant que  $F_{p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  est fixé par  $I_{n+1}$ . Si  $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1+p^{n+1}a & p^n b \\ p^{n+1}c & 1+p^{n+1}d \end{bmatrix} \in I_{n+1}$ , un calcul élémentaire nous donne

$$g \cdot F_{p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = F_{p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(g' \cdot \tilde{e}_{n+1})$$

où  $g' \in \begin{bmatrix} p^{n+1}z & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap I_{n+1})$ , avec  $z \equiv c$  modulo  $p$ . D'après le Corollaire 6.1 et le Lemme 5.1 on obtient :

$$\begin{aligned} (g-1) \cdot F_{p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) &= \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{p-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \sum_{\lambda_2 \in \mathbf{F}_p} \lambda_2^{p-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^2[\lambda_2] & 1 \end{bmatrix} \cdots \\ &\quad \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{p-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \cdot (c(r+1)\lambda^{-n-1}x^r) \\ &= (-1)^{n-1} c(r+1)\lambda^{-n-1}x^r \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{p-2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela montre que l'image de application composée

$$(A_{r,\lambda} \otimes \det)_{\text{proj}_{n+1}}^{I_{n+1}} \longrightarrow \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})^{I_{n+1}} \twoheadrightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$$

contient le radical de  $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$  i.e. que le conoyau de l'application composée ci-dessus est de longueur au plus 1.

Par symétrie, en utilisant l'action de l'élément  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix}$ , on déduit que le conoyau de l'application composée

$$(A_{r,\lambda} \otimes \omega)_{\text{proj}_{n+1}}^{I_{n+1}} \longrightarrow \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})^{I_{n+1}} \twoheadrightarrow (\text{ind}_{K_0(p^n)}^K \chi_{r+2})^+$$

est de longueur au plus un, ce qui achève la preuve.  $\square$

On peut maintenant obtenir le résultat souhaité :

PROPOSITION 6.7. *Soit  $n \geq 1$  et considérons la suite exacte*

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega)^{I_{n+1}} \longrightarrow (A_{r,\lambda} \otimes \det)_{\text{proj}_{n+1}}^{I_{n+1}} \longrightarrow \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})^{I_{n+1}}.$$

Alors  $\text{coker}(\text{proj}_{n+1}) = \chi_{r+2} \oplus \chi_{r+2}^s$ . En particulier, on a

$$\dim \left( (A_{r,\lambda} \otimes \omega)_{\text{proj}_{n+1}}^{I_{n+1}} \right) = 4p^n - 2.$$

*Démonstration.* Pour alléger les notations posons  $A \stackrel{\text{def}}{=} A_{r,\lambda} \otimes \omega$  et  $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{soc}_{K_0(p)} M \cong \chi_r^s \det \oplus \chi_r \det$ . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow H^0(I_{n+1}/Z_{n+1}, A) \rightarrow H^0(I_{n+1}/Z_{n+1}, A/M_0) \xrightarrow{\partial} H^1(I_{n+1}/Z_{n+1}, M_0)$$

et le groupe de cohomologie  $H^1(I_{n+1}/Z_{n+1}, M_0)$  est de dimension 4, les cocycles

$$\begin{aligned} \kappa_l : I_{n+1}/Z_{n+1} &\rightarrow \chi_r \det \\ \begin{bmatrix} 1 + p^{n+1}a & p^n b \\ p^{n+1}c & 1 + p^{n+1}d \end{bmatrix} &\mapsto \bar{c}x^r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \kappa_u : I_{n+1}/Z_{n+1} &\rightarrow \chi_r^s \det \\ \begin{bmatrix} 1 + p^{n+1}a & p^n b \\ p^{n+1}c & 1 + p^{n+1}d \end{bmatrix} &\mapsto \bar{b} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} x^r \end{aligned}$$

étant linéairement indépendants (la preuve est très similaire à celle de [Paš10], Proposition 5.2, et consiste à montrer que l'espace  $H^1(I_{n+1}/Z_{n+1}, \mathbf{F}_p)$  est de dimension 2, une base étant donnée par les cocycles  $\kappa_u$  et  $\kappa_l$ ).

Reprenons les notations dans la preuve de la proposition 6.6. Considérons les éléments  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$ ,  $F_{p-1}^{(0,n-1)}(\tilde{e}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$ . Par construction leurs images dans  $\pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2})$  fournissent des générateurs de

$\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$ ,  $(\text{ind}_{K_0(p^n)}^K(\chi_{r+2}))^+$  respectivement. Le calcul dans la preuve de la proposition 6.6 montre que l'image de  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  dans  $A/M_0$  est fixée par  $I_{n+1}$  et que

$$\partial(F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \text{ modulo } M_0) = \kappa_l$$

(à scalaire non-nul près). On en déduit que aucune combinaison linéaire de  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$  et  $F_{p-1}^{(0,n-1)}(\tilde{e}_{n+1})$  n'est fixée par  $I_{n+1}$ .

D'autre part, supposons que  $2(p^n - 1) < \text{long}_{K_0(p)}(A^{I_{n+1}}/M^{I_{n+1}}) \leq 2p^n$ . Comme  $A^{I_{n+1}}$  est stable par l'action de  $\begin{bmatrix} \circ & 1 \\ p & \circ \end{bmatrix}$  on déduit une suite exacte :

$$0 \rightarrow M_{n+1}^+ \oplus M_{n+1}^- \rightarrow A^{I_{n+1}} \rightarrow (\text{ind}_{K_0(p^n)}^K(\chi_{r+2}))^+ \oplus \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)}(\chi_{r+2}) \rightarrow 0.$$

Il existe donc un élément  $y \in M$ , isotypique pour  $\chi_{r+2}$  de telle sorte que  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$  est fixé par  $I_{n+1}$ . *A fortiori* son image dans  $A/M_0$  est  $I_{n+1}$ -fixe, ce qui implique que  $y \in (M/M_0)^{I_{n+1}}$  d'après le fait que  $(g-1)F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \in M_0^+$  pour tout  $g \in I_{n+1}$ .

Comme  $y$  est  $\chi_{r+2}$  isotypique et  $\chi_{r+2} \neq \chi_r^s \mathfrak{a} \det, \chi_r \mathfrak{a}^{-1} \det$  si  $p > 3$ , le Lemme 6.2 implique que  $y \in M^{I_{n+1}}$ .

On en conclut que les éléments  $F_{p-1}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}), F_{p-1}^{(0,n-1)}(\tilde{e}_{n+1})$  sont fixés par  $I_{n+1}$ , ce qui contredit le fait que leur images via  $\partial$  est une famille libre de  $H^1(I_{n+1}/Z_{n+1}, M_0)$ .  $\square$

### 6.3 APPLICATION LA COHOMOLOGIE DES COURBES MODULAIRES

Dans ce numéro, nous cadrans dans un contexte global les résultats sur les  $K_{n+1}$ -invariants, grâce aux travaux sur la compatibilité de la correspondance de Langlands effectués par Emerton [Eme] (cf. également [Bre12]).

De manière plus précise, nous décrivons plusieurs espaces isotypiques (sous l'action d'une algèbre de Hecke) de la cohomologie modulo  $p$  des courbes modulaires définies sur  $\mathbf{Q}$  et le résultat principal de cette section (Théoreme 6.8) étend au cas non-irréductible l'étude globale commencé dans [Mor13].

On suit l'exposition et les arguments de [Mor13], §6 (où on a traité le cas des atomes supersinguliers) et la dissertation demandant d'un peu de préparation, on réfère le lecteur à [Eme] (cf. aussi [Bre12]).

Soient  $\mathbf{A}_f$  les adèles finis de  $\mathbf{Q}$ ,  $G_{\mathbf{Q}}$  le groupe de Galois absolu de  $\mathbf{Q}$  et écrivons  $G_{\mathbf{Q}_\ell}$  pour son sous-groupe de décomposition en  $\ell$ .

Étant donné un sous-groupe compact-ouvert  $K_f$  du groupe adélique  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f)$  nous écrivons  $Y(K_f)$  pour désigner la courbe modulaire (définie sur  $\mathbf{Q}$ ) de points complexes

$$Y(K_f)(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash ((\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f) / K_f).$$

et nous en prenons, pour  $A \in \{\emptyset, k\}$ , ses groupes de cohomologie étale

$$H^1(K_f)_A \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{ét}}^1(Y(K_f)_{\overline{\mathbf{Q}}}, A)$$

où  $Y(K_f)_{\overline{\mathbf{Q}}}$  est le changement de base de  $Y(K_f)$  à  $\overline{\mathbf{Q}}$ .

Si  $K^p$  est un sous-groupe ouvert compact de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f^p)$ , nous considérons le  $k$ -module

$$H^1(K^p)_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K_p}} H^1(K_p K^p)_k$$

où  $K_p$  parcourt les sous-groupes compacts ouverts de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  : ce module est alors muni des actions continues de  $G_{\mathbf{Q}}$  et de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , commutant entre elles. Soit  $\Sigma_0$  un ensemble fini de places non-Archimédiennes de  $\mathbf{Q}$ , ne contenant pas  $p$ , et soit  $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_0 \cup \{p\}$ . Nous nous intéressons aux sous-groupes compacts ouverts de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f^p)$  de la forme  $K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma}$ , où  $K_{\Sigma_0}$  est un sous-groupe compact ouvert de  $G_{\Sigma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_{\ell})$  et  $K_0^{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell \notin \Sigma} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_{\ell})$  ; on écrit par brevit e

$$H^1(K_{\Sigma_0})_k \stackrel{\text{def}}{=} H^1(K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_k.$$

 tant donnée un sous-groupe ouvert-compact  $K_p$  in  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  désignons par  $\mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})$  la sous- $\mathcal{O}$ -algèbre de

$$\text{End}_{\mathcal{O}[G_{\mathbf{Q}}]}(H^1(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\mathcal{O}})$$

engendrée par les opérateurs de Hecke  $T_{\ell}, S_{\ell}$  avec  $\ell \notin \Sigma$ .

Si  $K'_p \leq K_p$  sont deux sous-groupes ouverts compacts dans  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  on a un morphisme de transition surjectif  $\mathbf{T}(K'_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma}) \rightarrow \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})$ , qui est compatible, au sens évident, avec les actions sur les espaces de cohomologie étale. Nous en déduisons une action  $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante de

$$\mathbf{T}(K_{\Sigma_0}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ K_p}} \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})$$

sur sur  $H^1(K_{\Sigma_0})_k$  ([Eme], (5.1.2)).

Par construction, l'action de  $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$  sur le sous-module  $H^1(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_k$  se factorise à travers le morphisme surjectif  $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0}) \rightarrow \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})$ .

Soit  $\overline{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$  une représentation Galoisienne continue, absolument irréductible. En supposant que  $\overline{\rho}$  est modulaire, nous définissons  $\Sigma_0$  comme l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin de  $\overline{\rho}$  ([Ser87],  1.2).

Rappelons que un sous-groupe ouvert compact  $K_{\Sigma_0}$  de  $G_{\Sigma_0}$  est un *niveau admissible* pour  $\overline{\rho}$  s'il existe un idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$ , ayant corps résiduel  $k$ , tel que

$$T_{\ell} \equiv \text{tr}(\overline{\rho}(\text{Frob}_{\ell})) \pmod{\mathfrak{m}}, \quad S_{\ell} \equiv \ell^{-1} \det(\overline{\rho}(\text{Frob}_{\ell})) \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Comme  $\overline{\rho}$  est modulaire, la conjecture de Serre montre que un sous-groupe compact ouvert dans la composante  $\Sigma_0$  de  $\ker(\mathbf{GL}_2(\widehat{\mathbf{Z}}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\widehat{\mathbf{Z}}/(N)))$  est un niveau admissible pour  $\overline{\rho}$ .

Le résultat suivant étend le Théoreme principal de [Mor13] au cas non-irréductible :

THEOREME 6.8. Soit  $p \geq 3$  et  $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$  une représentation Galoisienne continue, impaire et absolument irréductible.

Soit  $\Sigma_0$  l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin de  $\bar{\rho}$  et soit  $\kappa \in \{2, \dots, p+1\}$  le poids minimal, à torsion près, associé à  $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$  (cf. [Ser87], §2.2).

Soit  $K_{\Sigma_0}$  un niveau admissible pour  $\bar{\rho}$  et  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke  $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$  associé à  $\bar{\rho}$ .

Définissons

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \left( \bigotimes_{\ell \in \Sigma_0} \pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}) \right)^{K_{\Sigma_0}} \tag{24}$$

où  $\pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})$  est la représentation lisse de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$  associée à  $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$  par la correspondance de Langlads  $p$ -modulaire d'Emerton-Helm ([EH14]).

Soit enfin  $K_p \in \{K_t, I_t\}$  avec  $t \geq 1$  et supposons que  $\kappa \in \{3, \dots, p-1\}$ .

Alors, si  $p^t N > 4$  on a :

$$\dim_k \left( H_{\text{ét}}^1(Y(K_t K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbf{Q}}}, k)[\mathfrak{m}] \right) = \begin{cases} 2d(2p^{t-1}(p+1) - 4) & \text{si } K_p = K_t \text{ et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est} \\ \text{absolument irréductible;} & \\ 2d(2(p+1)p^{t-1} - (\kappa+1)) & \text{si } K_p = K_t \text{ et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est} \\ \text{absolument réductible,} & \\ \text{non-scindée;} & \\ 2d(2(2p^{t-1} - 1)) & \text{si } K_p = I_t. \end{cases}$$

Démonstration. Il nous suffit de traiter le cas où  $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$  est absolument réductible non scindée (le cas absolument irréductible étant traité dans [Mor13]).

La même preuve de [Mor13], Proposition 6.1 nous permet d'écrire

$$H^1(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_k[\mathfrak{m}] \cong \bar{\rho} \otimes (\pi_p)^{K_p} \otimes (\pi_{\Sigma_0}(\bar{\rho}))^{K_{\Sigma_0}}$$

où  $\pi_p$  est la représentation associé à  $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$  par la correspondance de Langlands  $p$ -modulaire, contenant dans son  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle le poids de Serre  $\sigma_{\kappa-2}$  (à torsion près).

Le résultat découle donc des Théorèmes 6.4 et 6.7. □

## 7 APPENDICE

On consacre cette appendice à des résultats techniques qui se révèlent nécessaires afin d'obtenir la Proposition clé 5.4. On étudie d'abord certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les actions supplémentaires de  $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$  sur l'algèbre d'Iwasawa  $A = k[[\mathbf{U}(p)]]$  (§7.1).

Remarquons que, même si le tore fini  $\mathbf{T}(\mathbf{Z}_p)$  agit sur  $A$  par des automorphismes de  $k$ -algèbres (ce qui permet de simplifier certains arguments concernant l'action de ce dernier sur  $A$ ), l'action de  $\mathbf{U}(\mathbf{Z}_p)$  n'est que  $k$ -linéaire et les manipulations effectués dans §7.1 restent, par l'instant, incontournables afin de pouvoir la contrôler.

Ensuite, on utilise au §7.2 les résultats précédents afin d'obtenir des renseignements cruciaux sur le comportement de l'élément  $e_{n+1}$  introduit dans la section 4.3.

### 7.1 SUR CERTAINS POLYNOMES DE WITT

Dans ce numéro on a pour objectif l'étude de certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement dans les manipulations nécessaires à la détermination de la structure interne des représentations  $p$ -modulaires de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . On utilise ici les notations de [Mor12], §A.1 (en invitant le lecteur à se référer à *loc. cit.* pour plus de détails, ou à des références classiques [Ser68], [Bou07] pour le cadre général).

On note les éléments de  $W(\mathbf{F}_p) \cong \mathbf{Z}_p$  par  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots)$  ou, de manière plus parlante,  $\sum_{j=0}^{\infty} p^j [\lambda_j]$ . La loi de la somme (resp. du produit, resp. de la puissance  $N$ -ième) est alors déterminé par les polynômes universels

$$\begin{aligned} S_n &\stackrel{\text{def}}{=} S_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n] \\ (\text{resp. } \text{Prod}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) &\in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n], \\ \text{resp. } \text{Pot}_n^N(X_0, \dots, X_n) &\in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n] ) \end{aligned}$$

définis pour tout  $n \in \mathbf{N}$  (cf. [Mor12], §A.1).

La structure récursive de  $S_n$  est décrite par le résultat suivant :

LEMME 7.1. *Soit  $n \geq 1$ . Alors*

$$S_n = X_n + Y_n - (S_{n-1} - X_{n-1})X_{n-1}^{p-1} + R_n$$

où  $R_n \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$  est un polynôme de degré au plus  $p-2$  en  $X_{n-1}$  et  $(S_{n-1} - X_{n-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{p^n} \left( p^n X_n + p^n Y_n + p^{n-1} X_{n-1}^p + p^{n-1} Y_{n-1}^p + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + X_0^{p^n} + Y_0^{p^n} - p^{n-1} S_{n-1}^p - \dots - S_0^{p^n} \right) \\ &= X_n + Y_n + \frac{1}{p^n} \left( p^{n-1} X_{n-1}^p - p^{n-1} (S_{n-1})^p + P_n \right) \end{aligned}$$

où  $P_n \in \mathbf{Z}_{(p)}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$ .

Or, il existe un élément convenable  $Q_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  de telle sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} (S_{n-1})^p &= (X_{n-1} + Y_{n-1} + Q_{n-1})^p \\ &= X_{n-1}^p + pX_{n-1}^{p-1}Y_{n-1} + pX_{n-1}^{p-1}Q_{n-1} + U_{n-1} \end{aligned}$$

pour un un polynôme  $U_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$  de degré au plus  $p - 2$  en  $X_{n-1}$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= X_n + Y_n + \frac{1}{p^n} \left( p^{n-1}X_{n+1}^p - p^{n-1}(X_{n-1}^p + pX_{n-1}^{p-1}Y_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + pX_{n-1}^{p-1}Q_{n-1} + U_{n-1}) + P_n \right) = \\ &= X_n + Y_n - X_{n-1}^{p-1}(Y_{n-1} + Q_{n-1}) + \frac{1}{p^n}(-p^{n-1}U_{n-1} + P_n) \end{aligned}$$

La relation  $Q_{n-1} = S_{n-1} - X_{n-1} - Y_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  montre que  $R_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p^n}(-p^{n-1}U_{n-1} + P_n) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$  et que son degré en  $X_{n-1}$  est au plus  $p - 2$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Le lemme 7.1 nous permet d'utiliser des procédés de récurrence relativement à certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement dans l'étude des représentations de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Plus précisément, on a les corollaires suivantes :

**COROLLAIRE 7.2.** Soit  $z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^n p^j[\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$  et considérons  $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$ . Alors

$$[\mu] + z = \sum_{j=0}^{\infty} p^j[\lambda_j + \tilde{S}_j]$$

où  $\tilde{S}_0 = \mu$  et pour tout  $j \geq 1$ ,  $\tilde{S}_j \in \mathbf{F}_p[\lambda_0, \dots, \lambda_{j-2}, \mu][\lambda_{j-1}]$  est un polynôme de degré  $p - 1$  en  $\lambda_{j-1}$  et coefficient dominant  $-\tilde{S}_{j-1}$ .

*Démonstration.* Immédiate du Lemme 7.1.  $\square$

**COROLLAIRE 7.3.** Supposons  $p \geq 3$ . Soit  $n \geq m \geq 0$ ,  $z = \sum_{j=m}^n p^j[\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$ ,  $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} p^j[\alpha_j] \in \mathbf{Z}_p$ . Alors,

$$z + p\alpha z \equiv \sum_{j=m}^n p^j[\lambda_j + \tilde{Q}_{j-m}] \text{ modulo } p^{n+1}$$

où  $\tilde{Q}_0 = 0$ ,  $\tilde{Q}_1 = \alpha_0\lambda_m$  et, pour  $j \geq m + 2$

$$\tilde{Q}_{j-m} \in \mathbf{F}_p[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-m-1}, \lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}]$$

est un polynôme de degré  $p - 1$  en  $\lambda_{j-1}$  et coefficient dominant  $-\tilde{Q}_{j-m-1}$ .

*Démonstration.* On a dans  $W(\mathbf{F}_p)$

$$p \cdot \alpha \cdot z = (0, \dots, 0, \underbrace{\text{Prod}_0(\alpha_0, \lambda_m)}_{\text{position } Y_{m+1}}, \underbrace{\text{Prod}_1(\alpha_0, \alpha_1, \lambda_m, \lambda_{m+1})}_{\text{position } Y_{m+2}}, \dots)$$

où  $\text{Prod}_j(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$  est le spécialisé du  $j$ -ième polynôme universel de Witt pour le produit en  $(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$ .

En particulier pour  $j \geq m + 1$  on trouve en position  $Y_j$  un élément de  $\mathbf{F}_p[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-m-1}, \lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}]$ .

Le résultat suit donc du lemme 7.1, en remarquant que (cf. l'appendice A.1 dans [Mor12])

$$\text{Prod}_j(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_j) = Y_j \left( \sum_{i=0}^j p^i X_i^{p^{j-i}} \right) + Q_0(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1})$$

pour un élément  $Q_0(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1}]$ , ce qui montre que la spécialisation  $\text{Prod}_j(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$  est un polynôme de degré  $1 < p - 1$  en  $\lambda_{j+m}$  et coefficient dominant  $\alpha_0$ .  $\square$

**COROLLAIRE 7.4.** *Supposons  $p \geq 3$ . Soit  $n \geq m \geq 1$ ,  $z = \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$  et  $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$ .*

*Alors*

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor} z^{j+1} (-1)^j [\mu^j] \equiv \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j + \tilde{U}_j] \quad \text{modulo } p^{n+1}$$

où

- i)  $\tilde{U}_j = 0$  pour  $j = m, \dots, 2m - 1$ ;
- ii)  $\tilde{U}_{2m} = -\mu \lambda_m^2$ ;
- iii) pour  $j \geq 2m + 1$ ,  $\tilde{U}_j \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}, \mu]$  est un polynôme de degré  $p - 1$  en  $\lambda_{j-1}$  et coefficient dominant  $-\tilde{U}_{j-1}$ .

*Démonstration.* On a  $(-1)^j [\mu^j] = [(-\mu)^j]$  pour tout  $j \geq m$ . Écrivons

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor} z^{j+1} (-1)^j [\mu^j] \equiv z + \underbrace{\sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor + 1} z^j [(-\mu)^{j-1}]}_{\stackrel{\text{def}}{=} z}$$

Si  $z = (0, \dots, 0, \lambda_m, \dots, \lambda_n, 0, \dots) \in W(\mathbf{F}_p)$  déduit

$$z^j = (0, \dots, 0, \underbrace{\text{Pot}_0^j(\lambda_m)}_{\text{position } Y_{jm}}, \dots, \underbrace{\text{Pot}_{k-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-jm+m})}_{\text{position } Y_k}, \dots, \dots, \underbrace{\text{Pot}_{n-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{n-jm+m})}_{\text{position } Y_n}, \dots)$$

où  $\text{Pot}_k^j$  est le  $k$ -ième polynôme de Witt pour la puissance  $j$ -ième. Considérons :



$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & \overbrace{\text{Pot}_0^2(\lambda_m)}^{\text{position } Y_{2m}} & \overbrace{\text{Pot}_1^2(\lambda_m, \lambda_{m+1})}^{\text{position } Y_{2m+1}} & \dots & \overbrace{\text{Pot}_m^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{2m})}^{\text{position } Y_{3m}} & \dots & \overbrace{\text{Pot}_{(j-2)m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{(j-1)m})}^{\text{position } Y_{jm}} & \dots \\
 (0, & \dots, & 0, & & & & & & & & & \dots) \\
 (0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \text{Pot}_0^3(\lambda_m), & \dots, & \text{Pot}_{(j-3)m}^3(\lambda_m, \dots, \lambda_{(j-2)m}), & \dots) \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & \text{Pot}_0^j(\lambda_m), & \dots)
 \end{array}$$

(c'est une famille d'éléments de  $W(\mathbf{F}_p)$ ). Rappelons (cf. l'appendice A.1 de [Mor12]) que le  $n$ -ième polynôme universel de Witt pour la puissance carrée est de la forme

$$\begin{aligned} \text{Pot}_n^2(X_0, \dots, X_n) &= \\ &= \frac{1}{p^n} \left( \left( \sum_{j=0}^n X_j^{p^{n-j}} p^j \right)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1-j} \left( \text{Pot}_{n-1-j}^2(X_0, \dots, X_{n-1-j}) \right)^{p^{j+1}} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\text{Pot}_n^2(X_0, \dots, X_n) = p^n X_n^2 + 2X_n Q_1(X_0, \dots, X_{n-1}) + Q_2(X_0, \dots, X_{n-1})$$

pour des polinômes  $Q_1(X_0, \dots, X_{n-1}), Q_2(X_0, \dots, X_{n-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ . On déduit que la spécialisation de  $\text{Pot}_{k-2m}^2(X_0, \dots, X_{k-2m})$  est de la forme  $\text{Pot}_{k-2m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m-1}][\lambda_{k-m}]$ , qui est un polynôme de degré au plus 1 en  $\lambda_{k-m}$  lorsque  $k > 2m$ .

De plus, au dessous de  $\text{Pot}_{k-2m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m})$  on retrouve les éléments  $\text{Pot}_{k-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-jm+m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m-1}]$  (pour  $j \geq 3$ ), de telle sorte que

$$\tilde{z} = (0, \dots, 0, P_{2m}(\lambda_m), P_{2m+1}(\lambda_m, \lambda_{m+1}), \dots, \underbrace{P_k(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m})}_{\text{position } Y_k}, \dots)$$

où  $P_k(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}, \mu]$  est un polynôme de degré au plus 1 en  $\lambda_{k-m}$  lorsque  $k > 2m$ .

Ceci, en vue du lemme 7.1, permet de conclure. □

### 7.2 MANIPULATION A L'INTERIEUR DE $A_{r,\lambda}$

On reprends ici les notations et conventions du §4.3 et du §5. En particulier, on fixe  $n \geq 1, p \geq 3$  et  $0 \leq r \leq p - 3 - r$ .

L'objectif de cette section est d'utiliser les informations sur les polynômes de Witt déterminées au §7.1 afin de contrôler l'action de  $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$  sur l'élément  $e_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$  défini au §4.3.

LEMME 7.5. *Soit  $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$ . Si  $p \geq 5$  on a l'égalité suivante dans  $\mathcal{B}_{n+1}$  :*

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} &\equiv \\ &\equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \left( \mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - \frac{1}{2} \mu^2 \delta_{n \neq 1} F_{[r+4],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \right) \end{aligned}$$

modulo  $V_{n+1}$ , où l'on a défini  $V_{n+1}$  comme le sous  $k[K_0(p^{n+1})]$ -module suivant de  $\pi(r, \lambda, \omega)$  :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle F_{\leq(r+2,p-1,\dots,p-1)-p}^{(1,n)} \right\rangle \oplus \langle [1, x^r] \rangle_{\overline{\mathbf{F}}_p} \\ &= \mathfrak{m}^{(p-3-r)+p} M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}. \end{aligned}$$

Si  $p \geq 3$  on a

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \pmod{V_\emptyset}$$

où, cette fois,

$$\begin{aligned} V_\emptyset &\stackrel{\text{def}}{=} \langle F_{\leq(r+2,p-1,\dots,p-1)-(p-2)}^{(1,n)} \oplus \langle [1, x^r] \rangle_{\overline{\mathbf{F}}_p} \rangle \\ &= \mathfrak{m}^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On commence par remarquer que

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) e_{n+1} = 0, \quad \left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r+1}^{(n+1)}(0) = 0$$

de telle sorte qu'on est intéressé à l'étude des éléments  $F_{r,0,\dots,0}^{(m,n)}(1)$  pour  $1 \leq m \leq n$ . Notons également que si  $m \in \{3, \dots, n\}$  on a

$$F_{l'_m, \dots, l'_n}^{(m,n)} \in V_{n+1} \quad \text{si } (l'_m, \dots, l'_n) \neq (p-1, \dots, p-1) \quad (25)$$

et que  $F_{l'_2, \dots, l'_n}^{(2,n)} \in V_{n+1}$  si  $(l'_2, \dots, l'_n) \prec (p-2, p-1, \dots, p-1)$ .

Supposons désormais que  $n \geq 2$ . On a

$$\begin{aligned} &\left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r,0,\dots,0}^{(m,n)}(1) = \\ &= \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \left( \sum_{j=m+1}^{n-1} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j[\lambda_j + \tilde{U}_j] & 1 \end{bmatrix} \cdot \right. \\ &\quad \left. \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n + \tilde{U}_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r] \right) \end{aligned}$$

où les polynômes  $\tilde{U}_j$ , pour  $j = m+1, \dots, n+1$ , sont ceux définis dans l'énoncé du corollaire 7.4.

Grâce au corollaire 7.4 et la remarque (25) on déduit :

$$\begin{aligned} &\left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r,0,\dots,0}^{(m,n)}(1) \equiv \\ &\equiv (-1)^{n-2m} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \\ &\quad \cdots \sum_{\lambda_{2m} \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{2m+1}(\lambda_{2m}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{2m}[\lambda_{2m} + \tilde{U}_{2m}] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1,\dots,p-1}^{(2m+1,n)} \end{aligned}$$

modulo  $V_{n+1}$ . Si  $m \geq 2$  la remarque (25) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-2m} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \\ & \quad \cdots \sum_{\lambda_{2m} \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{2m+1}(\lambda_{2m}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{2m}[\lambda_{2m} + \tilde{U}_{2m}] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1, \dots, p-1}^{(2m+1, n)} \equiv \\ & \equiv (-1)^{n-2(m-1)} F_{r+2, 0, \dots, 0, p-1, \dots, p-1}^{(m, n)} \equiv 0. \end{aligned}$$

Pour le cas  $m = 1$  il faut s'intéresser au polynôme  $\tilde{U}_3$ . Cela est déterminé par la condition

$$\begin{aligned} & (p[\lambda_1] + p^2[\lambda_2] + p^3[\lambda_3]) + [-\mu](p[\lambda_1] + p^2[\lambda_2])^2 + p^3[\lambda_3][\mu^2] \equiv \\ & \equiv p[\lambda_1] + p^2[-\lambda_1^2\mu + \lambda_2] + p^3[\lambda_3 + \tilde{U}_3] \text{ modulo } p^4 \end{aligned}$$

et, en rappelant la loi de la somme dans  $\mathbf{Z}_p$ , on trouve

$$\begin{aligned} \tilde{U}_3(\lambda_2) & \equiv - \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{s}}{p} \lambda_2^{p-s} (-\mu\lambda_1^2)^s - 2\mu\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^3\mu^2 \\ & = (\lambda_2^{p-1}(\mu\lambda_1^2) - \frac{p(p-1)}{2p} \lambda_2^{p-2} \mu^2 \lambda_1^4) + * \end{aligned}$$

où, pour  $p \geq 5$ , l'élément  $* \in \mathbf{F}_p[\lambda_2]$  est un polynôme en  $\lambda_2$  de degré au plus  $p-3$  (notons que pour  $p=3$ , on aurait  $* = -2\mu\lambda_2^{p-2}\lambda_1 + \lambda_1^3\mu^2$ ).

Encore une fois, d'après (25) on a

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r, 0, \dots, 0}^{(1, n)} \equiv \\ & \equiv (-1)^{n-2} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \sum_{\lambda_2 \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^2[\lambda_2 - \lambda_1^2\mu] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1, \dots, p-1}^{(3, n)} \equiv \\ & \equiv (-1)^n \left( \mu F_{r+2, p-1, \dots, p-1}^{(1, n)}(0) - \frac{1}{2} \mu^2 F_{[r+4], p-2, \dots, p-1}^{(1, n)} \right). \end{aligned}$$

Le cas  $n = 1$  est aisément démontré de manière directe (avec des manipulations élémentaires).  $\square$

LEMME 7.6. Soit  $\alpha \in \mathbf{Z}_p$  et  $p \geq 3$ . On a l'égalité suivante dans  $\mathcal{B}_{n+1}$  :

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r} \bar{\alpha}(r+1) \lambda^{-2n} F_{r+1, p-1, \dots, p-1}^{(1, n)}$$

modulo  $V_{n+1}$ .

*Démonstration.* C'est analogue à la preuve du lemme précédent et est laissée au lecteur.  $\square$

PROPOSITION 7.7. *Soit  $n \geq 1$  et considérons l'extension*

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Soit  $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1+p^a & b \\ p^{n+1}c & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$ .

Pour  $p \geq 5$  on a l'égalité suivante modulo  $V_{n+1}$

$$(g-1)\tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left( \bar{b}F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} + (\overline{a-d})F_{r+1,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - (\overline{a-d})\delta_{n \neq 1}F_{[r+3],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - \frac{1}{2}\bar{b}^2\delta_{n \neq 1}F_{[r+4],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \right).$$

Pour  $p \geq 3$ , et si  $r > 0$  on peut écrire de manière plus expressive en termes d'algèbres d'Iwasawa :

$$(g-1)\tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left( \bar{b}\kappa_{\underline{p-1-(p-3-r)}}^{(n)}X^{p-3-r} + (\overline{a-d})\kappa_{\underline{p-1-(p-2-r)}}^{(n)}X^{p-2-r} \right)$$

modulo  $(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \oplus (X^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des Lemmes 5.1, 7.5, 7.6 et de la décomposition d'Iwahori de  $K_0(p^{n+1})$ .

Remarquons seulement que  $\bar{\mathbf{U}}(p^{n+1})$  agit de manière triviale sur  $F_{l_1,\dots,l_n}^{(1,n)}$ , pour toute uplet  $(l_1, \dots, l_n)$  et que, pour  $n \geq 2$ ,

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \cdot F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \equiv \alpha F_{[r+3],p-2,\dots,p-1}^{(1,n)}$$

(c'est une manipulation simple en utilisant (25) et le Corollaire 7.3, qu'on laisse au lecteur). □

REFERENCES

[AD14] Kostantin Ardakov and Ken Brown. Ring-theoretic properties of Iwasawa algebras : a survey. *Doc. Math.* , Extra Vol. :7–33, 2006.

[BD14] Christophe Breuil and Fred Diamond. Formes modulaires de Hilbert modulo  $p$  et valeurs d'extensions entre caractères galoisiens. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(5) :905–974, 2014.

[BDJ10] Kevin Buzzard, Fred Diamond, and Frazer Jarvis. On Serre's conjecture for mod  $\ell$  Galois representations over totally real fields. *Duke Math. J.*, 155(1) :105–161, 2010.

[Ber11] Laurent Berger. La correspondance de Langlands locale  $p$ -adique pour  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . *Astérisque*, (339) :Exp. No. 1017, viii, 157–180, 2011. Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026.

- [BH15] Christophe Breuil and Florian Herzig. Ordinary representations of  $G(\mathbb{Q}_p)$  and fundamental algebraic representations. *Duke Math. J.*, 164(7) :1271–1352, 2015.
- [BL94] L. Barthel and R. Livné. Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field. *Duke Math. J.*, 75(2) :261–292, 1994.
- [Bou07] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 9*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1959 original.
- [BP13] C. Breuil and V. Paskunas. *Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL_2$* , volume 2016. Memoirs of Amer. Math. Soc., 2013.
- [Bre03a] C. Breuil. Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . I. *Compositio Math.*, 138(2) :165–188, 2003.
- [Bre03b] C. Breuil. Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . II. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(2) :23–58, 2003.
- [Bre08] Christophe Breuil. Introduction générale. *Astérisque*, (319) :1–12, 2008.
- [Bre12] C. Breuil. Correspondance de langlands  $p$ -adique, compatibilité local-global et applications. *Astérisque*, 348 :119–147, 2012.
- [Col10] P. Colmez. Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\phi, \Gamma)$ -modules. *Astérisque*, (330) :281–509, 2010.
- [Dos12] G. Dospinescu. Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique. *Math. Ann.*, 354(2) :627–657, 2012.
- [EH14] Matthew Emerton and David Helm. The local Langlands correspondence for  $GL_n$  in families. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(4) :655–722, 2014.
- [Eme] M. Emerton. Local-global compatibility in the  $p$ -adic langlands programm for  $GL_2/\mathbb{Q}$ . <http://www.math.uchicago.edu/~emerton/pdffiles/lg.pdf>. preprint, 2011.
- [Hel13] David Helm. On the modified mod  $p$  local Langlands correspondence for  $GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ . *Math. Res. Lett.*, 20(3) :489–500, 2013.
- [Her09] Florian Herzig. The weight in a Serre-type conjecture for tame  $n$ -dimensional Galois representations. *Duke Math. J.*, 149(1) :37–116, 2009.
- [Her11a] F. Herzig. The classification of irreducible admissible mod  $p$  representations of a  $p$ -adic  $GL_n$ . *Invent. Math.*, 186(2) :373–434, 2011.
- [Her11b] F. Herzig. A Satake isomorphism in characteristic  $p$ . *Compos. Math.*, 147(1) :263–283, 2011.
- [Jen72] C. U. Jensen. *Les foncteurs dérivés de  $\varprojlim$  et leurs applications en théorie des modules*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Laz65] Michel Lazard. Groupes analytiques  $p$ -adiques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (26) :389–603, 1965.
- [Mor] Stefano Morra. Iwasawa modules and  $p$ -modular representations of  $\mathbf{GL}_2$ . *Israel Journal of Mathematics*. to appear.
- [Mor11] Stefano Morra. Explicit description of irreducible  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -representations over  $\overline{\mathbf{F}}_p$ . *J. of Algebra*, 339 :252–303, 2011.
- [Mor12] Stefano Morra. On some representations of the iwahori subgroup. *J. of Number Theory*, 132 :1074–1150, 2012.
- [Mor13] Stefano Morra. Invariant elements for  $p$ -modular representations of  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(12) :6625–6667, 2013.
- [Nad] Santosh Nadimpalli. Typical representations for  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ . Ph.D thesis at the Université de Paris Sud (Orsay).
- [Oll15] Rachel Ollivier. An inverse Satake isomorphism in characteristic  $p$ . *Selecta Math. (N.S.)*, 21(3) :727–761, 2015.
- [Paš10] Vytautas Paškūnas. Extensions for supersingular representations of  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . *Astérisque*, (331) :317–353, 2010.
- [Sch08] Michael Schein. Weights in Serre’s conjecture for Hilbert modular forms : the ramified case. *Israel J. Math.*, 166 :369–391, 2008.
- [Sch15] Benjamin Schraen. Sur la présentation des représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(F)$ . *J. Reine Angew. Math.*, 704 :187–208, 2015.
- [Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l’Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser87] Jean-Pierre Serre. Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ . *Duke Math. J.*, 54(1) :179–230, 1987.
- [Vig96] Marie-France Vignéras. *Représentations  $l$ -modulaires d’un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

Stefano Morra  
 Laboratoire Montpellierain  
 “A. Grothendieck”  
 Université de Montpellier  
 place E. Bataillon, Cc 051  
 34095 Montpellier cedex 5  
 France  
 stefano.morra@umontpellier.fr

