Cohomologie des foncteurs polynomiaux sur les groupes libres

Aurélien Djament, Teimuraz Pirashvili [1] et Christine Vespa [2]

Received: August 28, 2015
Revised: December 08, 2015

Communicated by Stefan Schwede

Resumé. We show that extension groups between two polynomial functors on free groups are the same in the category of all functors and in a subcategory of polynomial functors of bounded degree. The proof relies on functorial properties of the group ring of free groups and its filtration by powers of the augmentation ideal. We give some applications, in particular in term of homological dimension.

Résumé. On montre que les groupes d'extensions entre foncteurs polynomiaux sur les groupes libres sont les mêmes dans la catégorie de tous les foncteurs et dans une sous-catégorie de foncteurs polynomiaux de degré borné. La démonstration repose sur les propriétés fonctorielles de l'anneau de groupe des groupes libres et de sa filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation. On donne quelques applications, notamment en termes de dimension homologique.

2010 Mathematics Subject Classification: 18A25, 18G15, 20J15 (18E15, 18G10)
Keywords and Phrases: catégories de foncteurs ; groupes libres ; foncteurs polynomiaux ; groupes d'extensions.

1. Cet auteur est partiellement soutenu par la bourse ST08/3-387 de la GNSF.
2. Cet auteur est partiellement soutenu par le projet ANR-11-BS01-0002 HOGT : Homotopie, Opérades et Groupes de Grothendieck-Teichmüller.

Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude des groupes d'extensions dans la catégorie des foncteurs des groupes libres (de rang fini) vers les groupes abéliens. Cette catégorie a d'abord été considérée, du point de vue cohomologique, dans l'article de Jibladze et du deuxième auteur [9] (§ 5A) sur la cohomologie des théories algébriques. Les premier et troisième auteurs l'ont également utilisée, dans [4], pour établir des résultats d'annulation d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus. Récemment, le premier auteur a montré [2] que l'algèbre homologique dans cette catégorie de foncteurs gouverne le calcul d'autres groupes d'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients tordus. Cette algèbre homologique s'avère plus facile d'accès que dans les catégories de foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini, très étudiées en raison de leurs liens avec la topologie algébrique ou la K-théorie algébrique (cf. par exemple [6]), notamment parce que le foncteur d'abélianisation possède une résolution projective explicite simple (déjà utilisée dans [9]). L'article [4] se sert également de façon cruciale de la structure des sous-catégories de *foncteurs polynomiaux* dans cette catégorie de foncteurs.

Dans le présent travail, on montre que les groupes d'extensions entre deux foncteurs polynomiaux sur les groupes libres sont les mêmes dans la catégorie de tous les foncteurs ou dans une sous-catégorie de foncteurs polynomiaux de degré donné. Un résultat similaire vaut pour les foncteurs sur la catégorie Γ des ensembles finis pointés, comme cela résulte du théorème de type Dold-Kan établi par le deuxième auteur dans [14]. En revanche, notre résultat contraste avec la situation, plus délicate, des foncteurs sur une catégorie additive (voir [13] et [3]). Nous donnons également quelques applications.

Description des résultats Commençons par quelques notations générales. Soit k un anneau, on note k-**Mod** la catégorie des k-modules à gauche. Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie, on note $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers k-**Mod** (on notera simplement $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ pour $\mathcal{F}(\mathcal{C};\mathbb{Z})$). Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet nul et des coproduits finis, on dispose d'une notion d'*effets croisés* et de *foncteurs polynomiaux* dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ (voir la section 1 ci-après pour davantage de détails). L'origine de ces notions remonte à Eilenberg-MacLane ([5], *Chapter* II), lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie de modules, et se généralise sans difficulté au cas qu'on vient de mentionner (voir [8], § 2). Pour tout entier d, on note $\mathcal{F}_d(\mathcal{C};k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ des foncteurs polynomiaux de degré au plus d.

On note **gr** la catégorie des groupes libres de rang fini, ou plus exactement le squelette constitué des groupes $\mathbb{Z}^{*n}$ (l'étoile désignant le produit libre). Comme signalé plus haut, notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1. *Soient k un anneau, $d \in \mathbb{N}$ et F, G des objets de $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$.*

L'application linéaire graduée naturelle

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)}(F,G)$$

qu'induit le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k) \to \mathcal{F}(\mathbf{gr};k)$ *est un isomorphisme.*

Pour des catégories sources autres que **gr**, l'énoncé similaire au théorème précédent n'est généralement pas vrai. Ainsi, rappelons quelques phénomènes connus sur une petite catégorie *additive* $\mathcal{C}$. Si l'anneau k contient le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}_d(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ induit des isomorphismes entre groupes d'extensions. Ce résultat, qui fait partie du folklore, figure dans [3] (théorème 1.2). En général, même sous de bonnes hypothèses sur la catégorie additive $\mathcal{C}$, le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{C})}(F,G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(F,G)$ est un isomorphisme seulement lorsque d est assez grand par rapport à i et au degré polynomial de F (ou de G). On renvoie à la remarque 3.12 pour une discussion plus développée à ce sujet.

La démonstration du théorème 1 est donnée à la section 3. Elle repose sur :

— une propriété d'annulation cohomologique très inspirée d'une propriété analogue dans les catégories de foncteurs sur une catégorie additive due au deuxième auteur (voir [11]) ;

— les propriétés de la filtration de l'anneau d'un produit direct de groupes libres par les puissances de son idéal d'augmentation, qui sont rappelées dans la section 2.

La dernière section est consacrée aux applications. Tout d'abord, on détermine la dimension homologique dans les catégories $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ de foncteurs fondamentaux : les puissances tensorielles de l'abélianisation (proposition 4.1) et les foncteurs de Passi (corollaire 4.3). Pour les premiers, on obtient :

Proposition 1. *Soient* $d \geq n > 0$ *des entiers. Le foncteur* $\mathfrak{a}^{\otimes n}$ *est de dimension homologique* $d-n$ *dans la catégorie* $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$.

La finitude de ces dimensions constitue un phénomène rare dans les catégories de foncteurs polynomiaux et illustre la spécificité de $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$.
On montre aussi le résultat suivant (proposition 4.6) :

Proposition 2. *Soient* $d > 0$ *un entier et* k *un sous-anneau de* $\mathbb{Q}$ *dans lequel* $d!$ *est inversible. La catégorie* $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$ *est de dimension globale* $d-1$.

Dans la proposition 4.4, on considère le foncteur β_d adjoint à droite au foncteur $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}) \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]\text{-}\mathbf{Mod}\quad F \mapsto cr_d(F)(\mathbb{Z},\ldots,\mathbb{Z})$. On montre que ce foncteur, apparemment mystérieux (et en tout cas non explicite), mentionné dans [4], est exact, et induit donc des isomorphismes entre groupes d'extensions. Plus explicitement, nous obtenons :

Proposition 3. *Pour tout* $d \in \mathbb{N}$, *le foncteur* $\beta_d : \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ *est exact. Il induit des isomorphismes naturels*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\beta_d(M),\beta_d(N)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\beta_d(M),\beta_d(N)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]}(M,N).$$

Là encore, il s'agit d'un phénomène notable dans les catégories de foncteurs polynomiaux, dont les liens avec les représentations des groupes symétriques sont bien compris pour ce qui concerne la classification des objets simples, par exemple, mais généralement mystérieux du point de vue cohomologique (notamment dans le cas d'une catégorie source additive, comme les groupes *abéliens* libres de rang fini).

Remerciements Les deux derniers auteurs souhaitent remercier les organisateurs du semestre intitulé *Grothendieck-Teichmuller Groups, Deformation and Operads* qui a eu lieu à l'Institut Isaac Newton de Cambridge en 2013 et pendant lequel ce travail à débuté ainsi que l'Institut pour son hospitalité et les excellentes conditions de travail qui y sont proposées. Le second auteur est reconnaissant envers l'université de Leicester pour lui avoir accordé un congé pour recherche.

1 Rappels sur les foncteurs polynomiaux

Soient k un anneau et $\mathcal{C}$ une petite catégorie. La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ est une catégorie abélienne qui hérite des propriétés de régularité de la catégorie but k-**Mod** ; en effet, les suites exactes, sommes, produits, etc. se testent au but. Si k est commutatif, on dispose d'une structure monoïdale symétrique notée $\otimes$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ qui est le produit tensoriel sur k au but.
La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ possède suffisamment d'objets projectifs : en effet, le lemme de Yoneda montre que le foncteur

$$P_c^{\mathcal{C}} := k[\mathcal{C}(c,-)]$$

(où c est un objet de $\mathcal{C}$; $k[-]$ désigne le foncteur de linéarisation des ensembles vers k-**Mod**) représente l'évaluation en c, il est donc projectif (et de type fini), et les foncteurs $P_c^{\mathcal{C}}$ engendrent la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.
Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet nul 0 et des coproduits finis (notés ici $+$), on dispose dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ d'une notion d'*effets croisés* et de *foncteurs polynomiaux* dans $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ (ce cadre est exactement celui de [8], § 2.3) ; rappelons-en la définition. Si F est un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$, son n-ème effet croisé (*cross-effect* en anglais), où $n \in \mathbb{N}$, est le foncteur $cr_n(F) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^n;k)$ défini par

$$cr_n(F)(c_1,\dots,c_n) = \mathrm{Ker}\Big(F(c_1+\cdots+c_n) \to \bigoplus_{i=1}^{n} F(c_1+\cdots+\hat{c}_i+\cdots+c_n)\Big)$$

(le chapeau signifie que le terme correspondant doit être omis ; les applications sont induites par les morphismes canoniques $c_1+\cdots+c_n \to c_1+\cdots+\hat{c}_i+\cdots+c_n$ de $\mathcal{C}$ provenant de ce que cette catégorie possède des coproduits finis et un objet nul). Cet effet croisé définit un foncteur *exact* $cr_n : \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C}^n;k)$. L'exactitude peut se voir à partir des décompositions naturelles

$$F(c_1+\cdots+c_n) \simeq \bigoplus_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} cr_k(F)(c_{i_1},\dots,c_{i_k})$$

(cf. [8], proposition 2.4, par exemple). Une manière d'établir cette décomposition consiste à vérifier que $cr_n(F)(c_1,\dots,c_n)$ est le facteur direct de $F(c_1+\cdots+c_n)$ correspondant à l'idempotent $\sum\limits_{I\subset\{1,\dots,n\}}(-1)^{\mathrm{Card}(I)}F(e_I)$, où e_I est l'idempotent de $c_1+\cdots+c_n$ donné par la projection sur les facteurs appartenant à I.
On dispose d'un isomorphisme canonique

$$cr_n(F)(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(n)})\simeq cr_n(F)(c_1,\dots,c_n)$$

pour toute permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$; en particulier, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère naturellement sur $cr_n(F)(c,\dots,c)$.
Comme $\mathcal{C}$ possède un objet nul, tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ se scinde de manière unique (à isomorphisme près) et naturelle en la somme directe d'un foncteur constant et d'un foncteur *réduit*, c'est-à-dire nul sur l'objet nul ; on note $\bar{F}$ ce foncteur réduit. Par ailleurs, comme $\mathcal{C}$ possède des coproduits finis, on dispose d'isomorphismes canoniques $P^{\mathcal{C}}_c\otimes P^{\mathcal{C}}_d\simeq P^{\mathcal{C}}_{c+d}$, lorsque k est commutatif. On vérifie classiquement que l'on dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_1}\otimes\cdots\otimes\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_n},F)\simeq cr_n(F)(c_1,\dots,c_n).$$

Un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ est dit *polynomial* de degré au plus n si $cr_{n+1}(F)=0$. Cette condition implique l'annulation de $cr_i(F)$ pour tout entier $i>n$. On note $\mathcal{F}_n(\mathcal{C};k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ constituée des foncteurs polynomiaux de degré au plus n. C'est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ stable par limites et colimites. Le produit tensoriel de deux foncteurs polynomiaux est polynomial (on suppose ici k commutatif), avec pour degré la somme des degrés des foncteurs initiaux. Le lecteur pourra trouver davantage de détails et de propriétés des foncteurs polynomiaux dans [8], § 2.
Venons-en au cas particulier de la catégorie source **gr**, qui possède un objet nul et des coproduits finis (donnés par le produit libre $*$). Pour alléger, on notera $P^{\mathbf{gr}}_n$ pour $P^{\mathbf{gr}}_{\mathbb{Z}^{*n}}$. On dispose d'isomorphismes canoniques $P^{\mathbf{gr}}_i\otimes P^{\mathbf{gr}}_j\simeq P^{\mathbf{gr}}_{i+j}$ et $P^{\mathbf{gr}}_n(G)\simeq k[G^n]$.
On notera simplement $\bar{P}=\bar{P}^{\mathbf{gr}}_1$ la partie réduite de $P^{\mathbf{gr}}_1$. Ainsi, $\bar{P}(G)$ n'est autre que l'idéal d'augmentation de la k-algèbre $k[G]$ du groupe libre G. Pour tous $d\in\mathbb{N}$ et $F\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)}(\bar{P}^{\otimes n},F)\simeq cr_n(F)(\mathbb{Z},\dots,\mathbb{Z}).$$

2 Préliminaires sur les puissances de l'idéal d'augmentation d'un anneau de groupe

Nous donnons dans cette section plusieurs résultats concernant les puissances d'un idéal d'augmentation qui nous seront utiles dans la suite. La plupart de ces propriétés sont classiques. Une référence générale est [10].
Pour tout groupe G, on note $\mathcal{I}(G)$ l'idéal d'augmentation de l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[G]$; pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}^n(G)$ la n-ème puissance de cet idéal. Pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}^n$ définit un foncteur de la catégorie **Grp** des groupes vers la catégorie **Ab**. On dispose ainsi d'un anneau gradué $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G]) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})(G)$ naturel en G. En degré 1, on dispose d'un isomorphisme naturel $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(G) \simeq G_{ab}$ (abélianisation de G). En particulier, le produit induit des morphismes naturels $G_{ab}^{\otimes n} \to (\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})(G)$, qui sont toujours des épimorphismes (et sont des isomorphismes si G est libre — cf. remarque 2.2 infra).

Lemme 2.1. *Si G est un groupe libre, pour tous entiers naturels r et i, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$H_i(G;\mathcal{I}^r(G)) \simeq \begin{cases} (\mathcal{I}^r/\mathcal{I}^{r+1})(G) & si\ i=0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur r. L'assertion est triviale pour $r=0$, on suppose donc $r>0$ et le résultat établi pour $r-1$. Dans la suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$-modules à gauche

$$0 \to \mathcal{I}^r(G) \to \mathcal{I}^{r-1}(G) \to (\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G) \to 0,$$

l'action de G est *triviale* sur $(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G)$, car la flèche de droite s'identifie à la projection de $\mathcal{I}^{r-1}(G)$ sur ses coïnvariants sous l'action de G — ce qui prouve déjà le résultat en degré homologique 0. Comme l'homologie de G est sans torsion sur $\mathbb{Z}$ et concentrée en degré 0 et 1, puisque G est libre, on en déduit que $H_i(G;(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G))$ est nul pour $i>1$, isomorphe à $G_{ab}\otimes(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G)$ pour $i=1$ et à $(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G)$ pour $i=0$. La suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte précédente fournit donc le résultat d'annulation souhaité en degré homologique strictement positif. □

Remarque 2.2. Cette démonstration permet aussi de voir, en regardant la fin de ladite suite exacte longue, que le morphisme de liaison

$$G_{ab}\otimes(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G) \simeq H_1(G;(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G)) \to H_0(G;\mathcal{I}^r(G)) \simeq (\mathcal{I}^r/\mathcal{I}^{r+1})(G)$$

est un isomorphisme. Comme ce morphisme s'identifie au produit

$$(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(G)\otimes(\mathcal{I}^{r-1}/\mathcal{I}^r)(G) \to (\mathcal{I}^r/\mathcal{I}^{r+1})(G),$$

cela fournit une démonstration de la propriété importante et classique (qui remonte à Magnus ; voir par exemple [10], chapitre VIII, *Theorem* 6.2) que l'anneau gradué $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G])$ est naturellement isomorphe à l'algèbre tensorielle sur G_{ab} (pour G libre).

Lemme 2.3. *Soient G un groupe libre, r et i des entiers naturels. On dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{I}(G),\mathcal{I}^r(G)) \simeq \begin{cases} \mathcal{I}^{r+1}(G) & si\ i=0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Utilisant la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte courte de $\mathbb{Z}[G]$-modules à droite $0 \to \mathcal{I}(G) \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$, on voit que $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{I}(G), \mathcal{I}^r(G))$ est isomorphe à $H_{i+1}(G; \mathcal{I}^r(G))$ lorsque $i > 0$, et l'on obtient une suite exacte

$$0 \to H_1(G; \mathcal{I}^r(G)) \to \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{I}(G), \mathcal{I}^r(G)) \to \mathcal{I}^r(G) \to H_0(G; \mathcal{I}^r(G)) \to 0,$$

de sorte que le lemme 2.1 permet de conclure. □

Proposition 2.4. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la résolution barre fournit un complexe de chaînes de foncteurs* $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ *du type*

$$\cdots \to \mathcal{I}^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{I}^r \to \mathcal{I}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I}^r \to \cdots \to \mathcal{I}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{I}^r \to \mathcal{I} \otimes \mathcal{I}^r$$

dont la restriction aux groupes libres a une homologie isomorphe à $\mathcal{I}^{r+1}$ en degré 0 *et nulle en degré strictement positif.*

Démonstration. D'une manière générale, si A est un anneau augmenté, d'idéal d'augmentation $\bar{A}$, M un A-module à droite et N un A-module à gauche, on dispose d'un complexe de chaînes de groupes abéliens fonctoriel en A, M et N

$$\cdots \to M \otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes N \to M \otimes \bar{A}^{\otimes(n-1)} \otimes N \to \cdots \to M \otimes \bar{A} \otimes N \to M \otimes N$$

(complexe barre bilatère normalisé) dont l'homologie est naturellement isomorphe à $\mathrm{Tor}_*^A(M, N)$ si A et M sont sans torsion sur $\mathbb{Z}$.
La proposition s'obtient en prenant $A = \mathbb{Z}[G]$, $M = \mathcal{I}(G)$ et $N = \mathcal{I}^r(G)$ et en appliquant le lemme 2.3. □

Nous aurons besoin également d'examiner $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G])$ lorsque G est un produit direct de groupes libres. Pour cela, on donne quelques propriétés générales simples sur l'effet du foncteur $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[-])$ sur un produit direct de groupes.
On va voir que ce foncteur est *exponentiel* (i.e. transforme les produits directs en produits tensoriels) sur les groupes G tels que $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G])$ soit un groupe abélien sans torsion. (On a vu plus haut que les groupes libres possèdent cette propriété.) Remarquer que, si c'est le cas, alors les groupes abéliens $\mathcal{I}^n(G)$ et $\mathbb{Z}[G]/\mathcal{I}^n(G)$ sont également sans torsion.
Soient G et H deux groupes. Si M et N sont des sous-groupes des groupes abéliens $\mathbb{Z}[G]$ et $\mathbb{Z}[H]$ respectivement, nous noterons $M.N$ l'image de $M \otimes N$ dans $\mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}[H] \simeq \mathbb{Z}[G \times H]$. Si M et N sont des idéaux bilatères de $\mathbb{Z}[G]$ et $\mathbb{Z}[H]$ respectivement, alors $M.N$ est un idéal bilatère de $\mathbb{Z}[G \times H]$.

Proposition 2.5. *Soient G et H deux groupes. Dans $\mathbb{Z}[G \times H]$, on a*

$$\mathcal{I}(G \times H) = \mathcal{I}(G).\mathbb{Z}[H] + \mathbb{Z}[G].\mathcal{I}(H)$$

et, plus généralement,

$$\mathcal{I}^r(G \times H) = \sum_{i+j=r} \mathcal{I}^i(G).\mathcal{I}^j(H)$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La première propriété est immédiate et la deuxième s'en déduit par récurrence sur r. $\square$

Proposition 2.6. *Soient G et H deux groupes tels que les groupes abéliens* $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G])$ *et* $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[H])$ *soient sans torsion.*

1. *Pour tout entier naturel n, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})(G\times H)\simeq\bigoplus_{i+j=n}(\mathcal{I}^i/\mathcal{I}^{i+1})(G)\otimes(\mathcal{I}^j/\mathcal{I}^{j+1})(H).$$

2. *Le groupe abélien* $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}[G\times H])$ *est sans torsion.*
3. *Pour tous entiers $0\le t\le n$, on a*

$$\Big(\sum_{\substack{i+j=n\\ i<t}}\mathcal{I}^i(G).\mathcal{I}^j(H)\Big)\cap(\mathcal{I}^t(G).\mathcal{I}^{n-t}(H))=\mathcal{I}^t(G).\mathcal{I}^{n-t+1}(H)$$

dans $\mathbb{Z}[G\times H]$; ce groupe est naturellement isomorphe à $\mathcal{I}^t(G)\otimes\mathcal{I}^{n-t+1}(H)$.

Démonstration. La proposition 2.5 procure (sans aucune hypothèse sur G ni H) un épimorphisme naturel

$$\bigoplus_{i+j=n}(\mathcal{I}^i/\mathcal{I}^{i+1})(G)\otimes(\mathcal{I}^j/\mathcal{I}^{j+1})(H)\twoheadrightarrow(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})(G\times H).$$

Par ailleurs, grâce à l'hypothèse faite sur G et H, les épimorphismes canoniques $\mathcal{I}^i(G)\otimes\mathcal{I}^j(H)\twoheadrightarrow\mathcal{I}^i(G).\mathcal{I}^j(H)$ sont des isomorphismes, et l'on a

$$\mathcal{I}^i(G).\mathcal{I}^{n-i}(H)\cap\mathcal{I}^j(G).\mathcal{I}^{n-j}(H)=\mathcal{I}^j(G).\mathcal{I}^{n-i}(H)$$

pour $i\le j$. On en déduit immédiatement la proposition. $\square$

3 Démonstration du théorème 1

La classe $\mathcal{T}_n$ Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie possédant un objet nul et des coproduits finis. Pour $n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, on note $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ possédant une résolution projective dont les termes sont des sommes directes de foncteurs du type $\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_1}\otimes\cdots\otimes\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_d}$, où $d>n$ est un entier et $c_1,\dots,c_d$ sont des objets de $\mathcal{C}$.

Le cas qui nous intéresse est celui des classes $\mathcal{T}_n(\mathbf{gr})$, qui seront simplement notées $\mathcal{T}_n$ par la suite. Toutefois, les propriétés formelles ci-dessous se montrent de la même façon, immédiate, dans le cas général ; elles sont laissées au lecteur. Noter que l'on a $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})\supset\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{C})$ pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, que $\mathcal{T}_0(\mathcal{C})$ est constituée des foncteurs réduits et que $\mathcal{T}_{-1}(\mathcal{C})=\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Lemme 3.1. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $0 \to F \to G \to H \to 0$ une suite exacte courte de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Si deux des foncteurs F, G et H appartiennent à $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$, alors il en est de même pour le troisième.*
En particulier, si A et B sont deux sous-foncteurs d'un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, A et B appartenant à $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$, alors le sous-foncteur $A+B$ de F appartient à $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ si et seulement s'il en est de même pour $A \cap B$.
Plus généralement, si on dispose d'une suite exacte longue

$$\cdots \to X_1 \to X_0 \to F \to 0$$

dans $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ avec tous les X_i dans $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$, alors F appartient à $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$.

Proposition 3.2. *Si F et G appartiennent à $\mathcal{T}_i(\mathcal{C})$ et $\mathcal{T}_j(\mathcal{C})$ respectivement et que l'un de ces foncteurs prend des valeurs sans torsion sur $\mathbb{Z}$, alors $F \otimes G$ appartient à $\mathcal{T}_{i+j+1}(\mathcal{C})$.*

Corollaire 3.3. *Le produit tensoriel de $n+1$ foncteurs réduits de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ dont au moins n prennent des valeurs sans torsion sur $\mathbb{Z}$ appartient à $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$.*

Remarque 3.4. Ce corollaire est un analogue d'un résultat dû au deuxième auteur pour les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est additive, qui apparaît dans [11], et qui s'est avéré extrêmement utile en cohomologie des foncteurs.

Les classes $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ nous serviront par l'intermédiaire du résultat suivant.

Proposition 3.5. *Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, F un foncteur de $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ à valeurs sans torsion sur $\mathbb{Z}$, k un anneau et A un foncteur de $\mathcal{F}_n(\mathcal{C};k)$. Alors $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(F \otimes k, A) = 0$.*

Démonstration. Comme F est à valeurs sans torsion, $F \otimes k$ possède une résolution dont les termes sont des sommes directes de foncteurs du type $\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_d} \otimes k$, avec $d > n$.
D'autre part, on dispose d'isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_d} \otimes k, A) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(\bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_1} \otimes \cdots \otimes \bar{P}^{\mathcal{C}}_{c_d}, O_* A) \simeq cr_d(A)(c_1, \dots, c_d)$$

où $O : k\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ désigne le foncteur d'oubli, adjoint à droite à $- \otimes k$, de sorte que le foncteur de postcomposition $O_* : \mathcal{F}(\mathcal{C};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C})$ est adjoint à droite à la postcomposition par $- \otimes k$, et où le deuxième isomorphisme provient de la section 1. Le fait que les foncteurs exacts cr_d sont nuls sur $\mathcal{F}_n(\mathcal{C};k)$ pour $d > n$ permet de conclure. □

Les foncteurs K^d_n Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur d'inclusion $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}) \to \mathcal{F}(\mathbf{gr})$ possède un adjoint à gauche q_d ; $q_d(F)$ est le plus grand quotient de F appartenant à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$. On renvoie à [8], § 2.3 pour plus de détails à ce sujet.

Notation 3.6. Étant donné deux entiers naturels n et d, on pose

$$K_n^d = \mathrm{Ker}(P_n^{\mathbf{gr}} \twoheadrightarrow q_d(P_n^{\mathbf{gr}}))$$

et l'on définit $K_n^{-1} = P_n^{\mathbf{gr}}$.

Proposition 3.7. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et tout objet G de* $\mathbf{gr}$*, les sous-groupes $K_n^d(G)$ et $\mathcal{I}^{d+1}(G^n)$ de $\mathbb{Z}[G^n]$ (auquel s'identifie $P_n^{\mathbf{gr}}(G)$) coïncident.*

Démonstration. Notons J_n^d le sous-foncteur de $P_n^{\mathbf{gr}}$ donné par $G \mapsto \mathcal{I}^{d+1}(G^n) \subset \mathbb{Z}[G^n] \simeq P_n^{\mathbf{gr}}(G)$. Alors le foncteur $P_n^{\mathbf{gr}}/J_n^d$ appartient à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$. Cela résulte de ce que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, le foncteur $G \mapsto (\mathcal{I}^r/\mathcal{I}^{r+1})(G^n)$ (des groupes vers les groupes abéliens) est polynomial de degré (au plus) r, puisque c'est un quotient de $G \mapsto (G_{ab}^n)^{\otimes r}$ (voir le début de la section 2). On a donc $K_n^d \subset J_n^d$.
Montrons l'inclusion inverse. Pour tout foncteur F de $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ et tout objet G de $\mathbf{gr}$, on considère l'application naturelle

$$\kappa_d(F)(G) = \sum_{I \subset \{0,1,\dots,d\}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)} F(p_I) : F(G^{*(d+1)}) \to F(G),$$

où $p_I \in \mathbf{gr}(G^{*(d+1)}, G) \simeq \mathrm{End}(G)^{d+1}$ est le morphisme dont la i-ème composante est l'identité si $i \in I$ et le morphisme trivial sinon. La transformation naturelle $\kappa_d(F)$ est nulle lorsque F appartient à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$, car elle se factorise par l'idempotent de $F(G^{*(d+1)})$ dont l'image est par définition l'effet croisé $cr_{d+1}(F)(G, \dots, G)$.
Par conséquent, comme $q_d(F)$ appartient à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$, la composée

$$F(G^{*(d+1)}) \xrightarrow{\kappa_d(F)(G)} F(G) \twoheadrightarrow q_d(F)(G)$$

est nulle, de sorte que le noyau de la projection $F \twoheadrightarrow q_d(F)$ contient l'image de $\kappa_d(F)$. En particulier, K_n^d contient l'image de $\kappa_d(P_n^{\mathbf{gr}})$. Si $(g_j^i)_{1 \le i \le n, 0 \le j \le d}$ est une famille d'éléments d'un groupe libre de rang fini G, on a

$$\kappa_d(P_n^{\mathbf{gr}})(G)\big([(g_0^i * \dots * g_d^i)_{1 \le i \le n}]\big) = \sum_{0 \le j_1 < \dots < j_r \le d} (-1)^r [(g_{j_1}^i \dots g_{j_r}^i)_{1 \le i \le n}]$$

qui est égal au produit

$$a_0 a_1 \dots a_d \quad \text{où} \quad a_j := [(g_j^i)_{1 \le i \le n}] - [1] \in \mathcal{I}(G^n) \subset \mathbb{Z}[G^n].$$

Comme $\mathcal{I}^{d+1}(G^n)$ est engendré par ces produits, cela montre que K_n^d contient J_n^d, d'où la conclusion. □

Remarque 3.8. Dans la démonstration précédente, le noyau de la projection $F \twoheadrightarrow q_d(F)$ est en fait *égal* à l'image de $\kappa_d(F)$ — cf. [8], définition 3.16 et proposition 3.17.

Lemme 3.9. *Pour tout $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, le foncteur K_1^d appartient à $\mathcal{T}_d$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur d. Pour $d \leq 0$, c'est clair. Compte-tenu de la proposition 3.7, la proposition 2.4 peut se traduire par l'existence de suites exactes

$$\cdots \to \bar{P}^{\otimes(n+1)} \otimes K_1^{d-1} \to \bar{P}^{\otimes n} \otimes K_1^{d-1} \to \ldots$$
$$\cdots \to \bar{P}^{\otimes 2} \otimes K_1^{d-1} \to \bar{P} \otimes K_1^{d-1} \to K_1^d \to 0$$

dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$. Si K_1^{d-1} appartient à $\mathcal{T}_{d-1}$, alors $\bar{P}^{\otimes i} \otimes K_1^{d-1}$ appartient à $\mathcal{T}_d$ pour tout entier $i \geq 1$, donc K_1^d aussi (en utilisant le lemme 3.1), d'où le lemme. $\square$

Proposition 3.10. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, le foncteur K_n^d appartient à $\mathcal{T}_d$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur n que K_n^d appartient à $\mathcal{T}_d$ pour tout $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire ; compte-tenu du lemme précédent, on peut supposer $n > 1$ et l'assertion établie pour $n - 1$.
Dans la suite on conserve les notations de la fin de la section 2 et on fait sans cesse usage de l'identification canonique $P_n^{\mathbf{gr}}(G) = \mathbb{Z}[G^n]$ et de la proposition 3.7. On rappelle que, par le dernier point de la proposition 2.6, on a $K_t^i.K_s^j \simeq K_t^i \otimes K_s^j$.
Étant donné $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, on va montrer que, pour tout $t \in \{1, \ldots, d+2\}$, le foncteur

$$\sum_{\substack{i+j=d+1 \\ 0 \leq i < t}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1} \subset P_n^{\mathbf{gr}}$$

appartient à $\mathcal{T}_d$. Cela établira la proposition : en prenant $t = d+2$ et en utilisant la proposition 2.5, on en déduit bien que K_n^d appartient à $\mathcal{T}_d$.
Pour cela, on effectue une récurrence sur t. Lorsque $t = 1$, le foncteur considéré vaut $K_{n-1}^{-1}.K_1^d$. Par le lemme 3.9, K_1^d appartient à $\mathcal{T}_d$. On en déduit, par la proposition 3.2, que $K_{n-1}^{-1}.K_1^d \simeq K_{n-1}^{-1} \otimes K_1^d$ appartient à $\mathcal{T}_d$ (K_1^d étant un sous-foncteur de $P_1^{\mathbf{gr}}$, il est à valeurs $\mathbb{Z}$-plates). Supposons que pour $t - 1 \leq d + 1$ le foncteur considéré appartienne à $\mathcal{T}_d$. On a

$$\sum_{\substack{i+j=d+1 \\ 0 \leq i < t}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1} = \Big(\sum_{\substack{i+j=d+1 \\ 0 \leq i < t-1}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1} \Big) + K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme à droite de cette égalité appartient à $\mathcal{T}_d$. Le foncteur $K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+1} \simeq K_{n-1}^{t-2} \otimes K_1^{d-t+1}$ appartient également à $\mathcal{T}_d$ puisque K_1^{d-t+1} appartient à $\mathcal{T}_{d-t+1}$ par le lemme 3.9 et K_{n-1}^{t-2} appartient à $\mathcal{T}_{t-2}$ par hypothèse de récurrence et en appliquant la proposition 3.2. D'après le lemme 3.1, pour montrer que $\sum_{\substack{i+j=d+1 \\ 0 \leq i < t}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1}$ appartient à $\mathcal{T}_d$ il est donc équivalent de montrer que

$$\Big(\sum_{\substack{i+j=d+1\\ 0\leq i<t-1}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1}\Big)\cap K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+1}$$

appartient à $\mathcal{T}_d$. Par la dernière partie de la proposition 2.6 on obtient que

$$\Big(\sum_{\substack{i+j=d+1\\ 0\leq i<t-1}} K_{n-1}^{i-1}.K_1^{j-1}\Big)\cap K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+1}=K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+2}\simeq K_{n-1}^{t-2}\otimes K_1^{d-t+2}.$$

Or K_1^{d-t+2} appartient à $\mathcal{T}_{d-t+2}$ d'après le lemme 3.9 et K_{n-1}^{t-2} appartient à $\mathcal{T}_{t-2}$ par hypothèse de récurrence. On déduit de la proposition 3.2 que $K_{n-1}^{t-2}.K_1^{d-t+2}$ appartient à $\mathcal{T}_{d+1}\subset\mathcal{T}_d$. Cela termine la démonstration. □

Démonstration du théorème 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on dispose d'isomorphismes d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{C};k)}(q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\otimes k,F)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{C})}(q_d(P_n^{\mathbf{gr}}),O_*F)$$

$$\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(P_n^{\mathbf{gr}},O_*F)\simeq F(\mathbb{Z}^{*n})$$

où O_* désigne la postcomposition par le foncteur d'oubli $O:k\text{-}\mathbf{Mod}\to\mathbf{Ab}$, de sorte que les foncteurs $q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\otimes k$ forment un ensemble de générateurs projectifs de $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$.
Par conséquent, il suffit de montrer le théorème 1 pour $F=q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\otimes k$. La suite exacte courte

$$0\to K_n^d\to P_n^{\mathbf{gr}}\to q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\to 0$$

de $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ induit une suite exacte courte

$$0\to K_n^d\otimes k\to P_n^{\mathbf{gr}}\otimes k\to q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\otimes k\to 0$$

dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)$ car $q_d(P_n^{\mathbf{gr}})$ prend des valeurs sans $\mathbb{Z}$-torsion. La suite exacte longue en Ext associée à cette suite exacte courte et le fait que $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)}(P_n^{\mathbf{gr}}\otimes k,G)$ et $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)}(q_d(P_n^{\mathbf{gr}})\otimes k,G)$ sont nuls en degré cohomologique strictement positif montrent que la conclusion du théorème 1 équivaut à la nullité de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)}(K_n^d\otimes k,G)$ lorsque G appartient à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$. Cela découle des propositions 3.10 et 3.5. □

Remarque 3.11. On peut employer les mêmes méthodes pour démontrer un résultat similaire au théorème 1 pour les groupes de torsion plutôt que les groupes d'extensions.

Remarque 3.12.

1. Si $\mathcal{C}$ est une petite catégorie additive, il est exceptionnel que l'inclusion de la sous-catégorie de foncteurs polynomiaux $\mathcal{F}_d(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ induise des isomorphismes entre *tous* les groupes d'extensions : dès le degré cohomologique $i = 3$, le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathcal{C})}(F, G) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(F, G)$ peut cesser d'être un isomorphisme (même si F et G sont additifs et que l'on prend la colimite sur $d \in \mathbb{N}$). *Dans les bons cas* (avec une hypothèse de torsion bornée), ce morphisme est un isomorphisme lorsque d est assez grand par rapport à i et au degré de F ou de G. Ces résultats sont établis par le deuxième auteur dans [13] dans un cas particulier (F ou G additif et pas de torsion dans les groupes abéliens de morphismes de $\mathcal{C}$) et par le premier auteur dans [3] dans le cas général. Comme dans le présent travail, la démonstration de ces résultats nécessite d'analyser le gradué associé à la filtration de l'anneau d'un groupe (abélien, cette fois) par les puissances de l'idéal d'augmentation ; il faut toutefois aussi utiliser d'autres ingrédients, issus de la construction cubique de Mac Lane. Notons d'ailleurs que le cœur de notre démonstration consiste à montrer que la restriction des foncteurs $\mathcal{I}^{d+1}$ aux groupes libres appartient à $\mathcal{T}_d$; l'argument central de [13] (sa proposition 4.3) consiste à montrer une propriété analogue pour la restriction des foncteurs $\mathcal{I}^{d+1}$ aux groupes *abéliens* libres, propriété qui n'est valide qu'en degré cohomologique assez petit (et qui repose sur un argument d'idéal *quasi-régulier*).

2. Notons **mon** (un squelette de) la catégorie des *monoïdes* libres de rang fini. Le théorème 1 reste vrai si l'on remplace la catégorie source **gr** par **mon**. Une méthode pour le voir consiste à reprendre les arguments du présent article et les adapter à la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{mon})$. Une autre consiste à utiliser le résultat dû à Hartl et aux deuxième et troisième auteurs ([8], *Corollary* 5.38) selon lequel le foncteur de complétion en groupe $\alpha : \mathbf{mon} \to \mathbf{gr}$ induit pour chaque $d \in \mathbb{N}$ une équivalence de catégories $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}_d(\mathbf{mon})$. Dès lors, il suffit de voir que le foncteur α induit des isomorphismes entre groupes d'extensions

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(F, G) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{mon})}(F \circ \alpha, G \circ \alpha)$$

lorsque F et G sont polynomiaux. C'est en fait vrai si l'on suppose seulement que G est polynomial. Il suffit de le voir lorsque F est un foncteur projectif $P^{\mathbf{gr}}_n$; on peut alors utiliser un argument classique reposant sur le fait que le morphisme canonique d'un monoïde *libre* vers sa complétion en groupe induit un isomorphisme en homologie. Cet argument est donné en détail, dans un contexte abélien analogue, dans [1], théorème 3.3.

4 Applications

Notons $\mathfrak{a} : \mathbf{gr} \to \mathbf{Ab}$ le foncteur d'abélianisation. Ce foncteur joue un rôle fondamental dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$, où les calculs d'algèbre homologique sont grandement facilités par l'existence d'une résolution projective explicite de $\mathfrak{a}$. Celle-ci est donnée par la résolution barre (dont on tronque le degré nul : on utilise que l'homologie d'un groupe libre est naturellement isomorphe à son abélianisation en degré 1 et nulle en degré > 1), qui prend la forme :

$$\cdots \to P^{\mathbf{gr}}_{n+1} \to P^{\mathbf{gr}}_n \to \cdots \to P^{\mathbf{gr}}_2 \to P^{\mathbf{gr}}_1 \to \mathfrak{a} \to 0. \tag{1}$$

Cette résolution projective apparaît pour la première fois dans [9] (§ 5.A) ; elle est également utilisée de façon fondamentale dans [4].
En utilisant la résolution barre *normalisée*, on obtient une variante de la précédente résolution, également utile :

$$\cdots \to \bar{P}^{\otimes(n+1)} \to \bar{P}^{\otimes n} \to \cdots \to \bar{P}^{\otimes 2} \to \bar{P} \to \mathfrak{a} \to 0. \tag{2}$$

Proposition 4.1. *Soient $d \geq n > 0$ des entiers. Le foncteur $\mathfrak{a}^{\otimes n}$ est de dimension homologique $d-n$ dans la catégorie $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$: on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, -) = 0$ pour $i > d-n$, tandis que le foncteur $\mathrm{Ext}^{d-n}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, -)$ n'est pas nul.*

Démonstration. En prenant le produit tensoriel de n copies de la résolution projective de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ que procure la suite exacte (2) (dont tous les termes prennent des valeurs $\mathbb{Z}$-libres), on voit que $\mathfrak{a}^{\otimes n}$ possède une résolution projective qui, en degré i, est une somme directe de copies du foncteur $\bar{P}^{\otimes(i+n)}$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\bar{P}^{\otimes t}, F) \simeq cr_t(F)(\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z})$ est nul lorsque F est polynomial de degré $< t$ (cf. section 1), on en déduit $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, F) = 0$ pour F polynomial de degré $< n+i$.
Comme le foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, -)$ est la restriction à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ du foncteur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, -)$, d'après le théorème 1, on en déduit l'inégalité

$$\mathrm{hdim}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}) \leq d-n.$$

L'inégalité inverse se déduit de la non-nullité de $\mathrm{Ext}^{d-n}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}, \mathfrak{a}^{\otimes d})$, établie par le troisième auteur dans [15]. □

Remarque 4.2. L'analogue « abélien » de la proposition 4.1 n'est pas exact : notons $\mathbf{ab}$ la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini. Dans la catégorie $\mathcal{F}_2(\mathbf{ab})$, le foncteur d'inclusion est de dimension homologique infinie et possède une résolution projective 4-périodique, comme on le déduit de la section 6 de l'article [13].
En revanche, on dispose quand même d'un résultat très similaire à la proposition 4.1 en remplaçant la catégorie source $\mathbf{gr}$ par une catégorie additive appropriée. Soient p un nombre premier et $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie vers les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Le

foncteur d'inclusion est de dimension homologique finie $2p^{[\log_p(d)]}-2$ (où les crochets désignent la partie entière) dans la sous-catégorie $\mathcal{F}_d(p)$ des foncteurs polynomiaux de degré au plus d. Ce résultat est dû à Franjou et Smith ([7], § 4.2).

Les foncteurs $q_n(\bar{P})$ (appelés *foncteurs de Passi* dans [8]) jouent un rôle fondamental dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{gr})$ (la démonstration du théorème 1 en constitue une illustration) ; la proposition 4.1 permet facilement d'en calculer la dimension homologique.

Corollaire 4.3. *Soient $d \geq n > 0$ des entiers. Le foncteur $q_n(\bar{P})$ est de dimension homologique $d-n$ dans la catégorie $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$.*

Démonstration. On dispose de suites exactes courtes

$$0 \to \mathfrak{a}^{\otimes n} \to q_n(\bar{P}) \to q_{n-1}(\bar{P}) \to 0$$

(cf. la proposition 3.7 et le début de la section 2), d'où des inégalités

$$\mathrm{hdim}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(q_{n-1}(\bar{P})) \leq \max\big(1+\mathrm{hdim}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a}^{\otimes n}), \mathrm{hdim}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(q_n(\bar{P}))\big).$$

On en déduit l'inégalité $\mathrm{hdim}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(q_n(\bar{P})) \leq d-n$ par récurrence descendante sur n, en utilisant la proposition 4.1 et le caractère projectif de $q_d(\bar{P})$ dans la catégorie $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$.
L'inégalité inverse provient de ce que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(q_n(\bar{P}), \mathfrak{a}^{\otimes(n+i)})$ est non nul (cf. [15]) et du théorème 1. □

Avant de donner la prochaine application du théorème 1, notons que l'action de $\mathfrak{S}_d$ sur $cr_d(F)(\mathbb{Z},\dots,\mathbb{Z})$ (voir la section 1) fournit, pour tout $d \in \mathbb{N}$, un foncteur $\mathrm{cr}_d : \mathcal{F}_d(\mathbf{gr}) \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$-**Mod** associant l'effet croisé $cr_d(F)(\mathbb{Z},\dots,\mathbb{Z})$ à F. Ce foncteur possède un adjoint à gauche α_d et un adjoint à droite β_d. Le foncteur α_d possède une expression explicite simple : $\alpha_d(M) = \mathfrak{a}^{\otimes d} \underset{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]}{\otimes} M$, mais il n'est pas exact (pour $d \geq 2$). En revanche, le foncteur β_d ne semble pas posséder d'expression simple. Néanmoins, on a :

Proposition 4.4. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur $\beta_d : \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$-**Mod** $\to \mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ est exact. Il induit des isomorphismes naturels*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\beta_d(M),\beta_d(N)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(\beta_d(M),\beta_d(N)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]}(M,N).$$

Démonstration. Pour voir que β_d est exact, il suffit de vérifier que son adjoint à gauche cr_d envoie les générateurs projectifs $q_d(P_n^{\mathbf{gr}})$ de $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ (où n parcourt $\mathbb{N}$) sur des $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$-modules projectifs. Comme cr_d est exact et tue les foncteurs de degré strictement inférieur à d, il prend la même valeur sur $q_d(P_n^{\mathbf{gr}})$ et le noyau Q_n^d de la projection $q_d(P_n^{\mathbf{gr}}) \twoheadrightarrow q_{d-1}(P_n^{\mathbf{gr}})$. Or on a $Q_1^d \simeq \mathfrak{a}^{\otimes d}$ (car le gradué de l'anneau d'un groupe libre est isomorphe à l'algèbre tensorielle de son abélianisation — cf. section 2 ; on utilise également la proposition 3.7).

En général, en utilisant le premier point de la proposition 2.6 (et encore la proposition 3.7), on obtient :

$$Q_n^d \simeq \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=d} \mathfrak{a}^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{a}^{\otimes i_n} \simeq \bigoplus_{i_1+\cdots+i_n=d} \mathfrak{a}^{\otimes d}.$$

Comme cr_d envoie le foncteur $\mathfrak{a}^{\otimes d}$ sur le $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$-module $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$, cela démontre l'exactitude de β_d.
L'adjonction entre les foncteurs exacts β_d et cr_d se propage aux groupes d'extensions :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})}(F, \beta_d(N)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]}(\mathrm{cr}_d(F), N).$$

Comme la coünité $\mathrm{cr}_d\beta_d \to \mathrm{Id}$ est un isomorphisme (cf. [4], § 2, par exemple), en utilisant le théorème 1, on en déduit la dernière assertion de l'énoncé. □

Remarque 4.5.

1. En reprenant la démonstration précédente, il est facile de donner une expression explicite de $\beta_d(M)(G)$ fonctorielle en M, *mais pas en* $G \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{gr}$.
2. La proposition 4.4 contraste encore avec la situation de $\mathcal{F}(\mathbf{ab})$. On y dispose de même d'un foncteur

$$\mathcal{F}_d(\mathbf{ab}) \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]\text{-}\mathbf{Mod} \quad F \mapsto cr_d(F)(\mathbb{Z}, \ldots, \mathbb{Z})$$

qui possède des adjoints de chaque côté. L'adjoint à gauche est très similaire au foncteur α_d évoqué avant la proposition (il est donné par $M \mapsto T^d \underset{\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]}{\otimes} M \simeq (T^d \otimes M)_{\mathfrak{S}_d}$, où T^d désigne la d-ème puissance tensorielle). L'adjoint à droite est analogue à l'adjoint à gauche (il est donné par $M \mapsto (T^d \otimes M)^{\mathfrak{S}_d}$) ; c'est donc encore un foncteur explicite mais *non exact* si $d > 1$. La référence originelle pour cette question classique est [12].

La proposition 4.4 montre que les catégories $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr})$ (resp. $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; \mathbb{F}_p)$, où p est un nombre premier) sont de dimension globale infinie dès que $d \geq 2$ (resp. $d \geq p$), comme l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_d]$ (resp. $\mathbb{F}_p[\mathfrak{S}_d]$).
Notre dernier résultat montre qu'en revanche, les catégories $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; \mathbb{Q})$ (ou plus généralement $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; k)$, où k est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ où assez d'entiers sont inversés) sont de dimension globale finie.

Proposition 4.6. *Soient $d > 0$ un entier et k un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ dans lequel $d!$ est inversible. La catégorie $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; k)$ est de dimension globale $d-1$: on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)} = 0$ pour $i \geq d$, tandis que le foncteur $\mathrm{Ext}^{d-1}_{\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)}$ n'est pas nul.*

Démonstration. On montre d'abord l'inégalité $\mathrm{gldim}\,\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; k) \leq d-1$. Par le théorème 1, cela équivaut à dire que la restriction à $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; k)^{op} \times \mathcal{F}_d(\mathbf{gr}; k)$ du foncteur $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)}$ est nulle pour $i \geq d$. Pour cela, on va montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$\forall i \geq n \geq d \quad \forall F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k) \quad \forall G \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}_n(\mathbf{gr};k) \qquad \operatorname{Ext}^i(F,G)=0$$

(on omet dans la suite l'indice $\mathcal{F}(\mathbf{gr};k)$ pour les groupes d'extensions). On suppose donc le résultat établi pour les entiers strictement inférieurs à d.
Les résultats de structure de la catégorie $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$ donnés dans [4] (voir la section 2 et la démonstration de la proposition 5.3 de cet article) impliquent que, pour tout foncteur F de $\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k)$, il existe une représentation M du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ et un morphisme $u : F \to \mathfrak{a}^{\otimes d} \underset{k[\mathfrak{S}_d]}{\otimes} M$ dont le noyau N et le conoyau C appartiennent à $\mathcal{F}_{d-1}(\mathbf{gr};k)$. Pour $d=1$, on peut même supposer que u est un isomorphisme, puisque la partie constante des foncteurs se scinde. L'hypothèse de récurrence montre que $\operatorname{Ext}^i(N,G)$ et $\operatorname{Ext}^i(C,G)$ sont nuls pour G dans $\mathcal{F}_n(\mathbf{gr};k)$ et $i \geq n \geq d-1$. Par ailleurs, comme l'anneau $k[\mathfrak{S}_d]$ est semi-simple à cause de l'hypothèse faite sur k, le foncteur $T := \mathfrak{a}^{\otimes d} \underset{k[\mathfrak{S}_d]}{\otimes} M$ est somme directe de facteurs directs de $\mathfrak{a}^{\otimes d}$. La proposition 4.1 montre donc que $\operatorname{Ext}^i(T,G)=0$ pour G dans $\mathcal{F}_n(\mathbf{gr};k)$ et $i > n-d \geq 0$. On en déduit $\operatorname{Ext}^i(F,G)=0$ pour G dans $\mathcal{F}_n(\mathbf{gr};k)$ et $i \geq n \geq d$, ce qui termine la démonstration de l'inégalité $\operatorname{gldim}\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k) \leq d-1$.
L'inégalité $\operatorname{gldim}\mathcal{F}_d(\mathbf{gr};k) \geq d-1$ se déduit de ce que le groupe abélien $\operatorname{Ext}^{d-1}_{\mathcal{F}(\mathbf{gr})}(\mathfrak{a},\mathfrak{a}^{\otimes d})$ est non seulement non nul, mais aussi sans torsion (cf. [15]). □

Remarque 4.7. Contrairement à ce qui advient pour la plupart des autres résultats du présent article, dont les analogues sur **ab** sont plus difficiles à montrer que sur **gr** (voir notamment la remarque 4.2), quand ils ne sont pas faux, la situation est plus simple pour $\mathcal{F}_d(\mathbf{ab};\mathbb{Q})$, qui est une catégorie *semi-simple* pour tout $d \in \mathbb{N}$ (et ce résultat classique est aisé à prouver).

Références

[1] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.

[2] Aurélien Djament. Décomposition de Hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01214646, 2015.

[3] Aurélien Djament. Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 92(1) :63–88, 2015.

[4] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. *Comment. Math. Helv.*, 90(1) :33–58, 2015.

[5] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi,n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.

[6] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Teimuraz Pirashvili, and Lionel Schwartz. *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, volume 16 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[7] Vincent Franjou and Jeffrey H. Smith. A duality for polynomial functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(1) :33–39, 1995.

[8] Manfred Hartl, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and nonlinear Mackey functors. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6) :1461–1554, 2015.

[9] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.

[10] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[11] T. I. Pirashvili. Higher additivizations. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :44–54, 1988.

[12] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.

[13] Teimuraz Pirashvili. Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories. *Comm. Algebra*, 21(5) :1705–1719, 1993.

[14] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.

[15] Christine Vespa. Extensions between functors from groups. arXiv :1511.03098.

Aurélien Djament
CNRS
Laboratoire de Mathématiques
Jean Leray (UMR 6629)
aurelien.djament@univ-nantes.fr

Teimuraz Pirashvili
Department of Mathematics
University of Leicester
University Road
Leicester LE1 7RH
UK
tp59@leicester.ac.uk

Christine Vespa
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université de Strasbourg
vespa@math.unistra.fr