Modules Homotopiques

F. Déglise[(1)]

Received: January 22, 2010
Revised: November 30, 2010

Communicated by Alexander Merkurjev

Abstract. Based on previous works, we compare over a perfect field k the category of homotopy invariant sheaves with transfers introduced by V. Voevodsky and the category of cycle modules introduced by M. Rost: the former is a full subcategory of the latter. Using the recent construction by D.C. Cisinski and the author of a non effective version $DM(k)$ of the category of motivic complexes, we show that cycle modules form the heart of a natural t-structure on $DM(k)$, generalizing the homotopy t-structure on motivic complexes.

2010 Mathematics Subject Classification: 14F42, (14C15, 14C35)
Keywords and Phrases: motifs mixtes, complexes motiviques, modules de cycles, filtration par coniveau

Table des matières

(1) L'auteur est partiellement financé par l'ANR, projet no. ANR-07-BLAN-0142 "Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et Géométrie d'Arakelov".

Introduction. —

Théorie de Voevodsky. — Dans sa théorie des complexes motiviques sur un corps parfait k, V. Voevodsky introduit le concept central de faisceau Nisnevich invariant par homotopie avec transferts, que nous appellerons simplement faisceau homotopique. Rappelons qu'un faisceau homotopique F est un préfaisceau de groupes abéliens sur la catégorie des k-schémas algébriques lisses, fonctoriel par rapport aux correspondances finies à homotopie près, qui est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Un exemple central d'un tel faisceau est donné par le préfaisceau $\mathbb{G}_m$ qui à un schéma lisse X associe le groupe des sections globales inversibles sur X. La catégorie des faisceaux homotopiques, notée ici $HI(k)$, a de bonnes propriétés que l'on peut résumer essentiellement en disant que c'est une catégorie abélienne de Grothendieck, monoïdale symétrique fermée.

Un des points centraux de la théorie est la démonstration par Voevodsky que tout faisceau homotopique F admet une *résolution de Gersten*[(2)]. Un cas

[(2)]Les complexes du type $(\mathcal{G})$, ci-dessous, ont été introduits par Grothendieck sous le nom *résolution de Cousin*, remplaçant la théorie des faisceaux homotopiques par celle des faisceaux cohérents. Grâce à la suite spectrale associée à la filtration par coniveau d'après Grothendieck, ils ont été réintroduits un peu plus tard dans le contexte des théories cohomologiques, par Brown et Gersten en K-théorie et finallement par Bloch et Ogus dans une version axiomatique. Notons que ces derniers auteurs parlent plutôt de "*arithmetic resolution*" et il semble que le terme de *résolution de Gersten* se soit imposé par la suite. La fonctorialité de la résolution de Gersten par rapport à un morphisme de schémas lisses a été particulier de ce résultat est le fait que pour tout schéma lisse X, le groupe abélien $F(X)$ admet une résolution par un complexe de la forme:

$$(\mathcal{G}) \qquad C^*(X, \hat{F}_*) : \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \hat{F}(\kappa(x)) \to \dots \bigoplus_{x' \in X^{(n)}} \hat{F}_{-n}(\kappa(x')) \to \dots$$

Suivant Voevodsky, $F_{-n} = \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(\mathbb{G}_m^{\otimes n}, F)$. On a noté $X^{(n)}$ l'ensemble des points de codimension n de X. Pour un entier $r \geq 0$ et un point x de X, $\hat{F}_r(\kappa(x))$ désigne la fibre du faisceau homotopique F_r au point Nisnevich qui correspond au corps résiduel $\kappa(x)$, vu comme un corps de fonctions.
Un corollaire de cette résolution de Gersten est que les faisceaux homotopiques sont essentiellement déterminés par leurs fibres en un corps de fonctions. La question centrale de cet article est de savoir jusqu'à quel point ils le sont.

Théorie de Rost. — Pour définir un complexe de Gersten, du type $(\mathcal{G})$, on remarque qu'il faut essentiellement se donner un groupe abélien pour chaque corps résiduel d'un point de X. M. Rost axiomatise cette situation en introduisant les modules de cycles. Un module de cycles est un foncteur ϕ de la catégorie des corps de fonctions au-dessus de k vers les groupes abéliens gradués, muni d'une fonctorialité étendue qui permet de définir un complexe $C^*(X, \phi)$ du type $(\mathcal{G})$. Pour avoir une idée de cette fonctorialité, le lecteur peut se référer aux propriétés de la K-théorie de Milnor – mais aussi à la théorie des modules galoisiens. Rost note l'analogie entre ce complexe et le groupe des cycles de X – comme l'avaient fait Bloch et Quillen avant lui – et utilise le traitement de la théorie de l'intersection par Fulton pour montrer que la *cohomologie* du complexe, notée $A^*(X, \phi)$, est naturelle en X par rapport aux morphismes de schémas lisses.

Une comparaison. — Répondant à la question finale du premier paragraphe, nous comparons la théorie de Rost et celle de Voevodsky. D'une manière vague, notre résultat principal affirme que l'association $F \mapsto \hat{F}_*$ définit un foncteur pleinement fidèle des faisceaux homotopiques dans les modules de cycles, avec pour quasi-inverse à gauche le foncteur $\phi \mapsto A^0(., \phi)$.
Pour être plus précis dans la formulation de ce résultat, on est conduit à élargir la catégorie des faisceaux homotopiques. On définit un module homotopique F_* comme un faisceau homotopique $\mathbb{Z}$-gradué muni d'isomorphismes $\epsilon_n : F_n \to (F_{n+1})_{-1}$. La catégorie obtenue, notée $HI_*(k)$, est encore abélienne de Grothendieck, symétrique monoïdale fermée. De plus, elle contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $HI(k)$ – si F est un faisceau homotopique, le module homotopique associé a pour valeur $\mathbb{G}_m^{\otimes n} \otimes F$ (resp. F_{-n}) en degré $n \geq 0$ (resp. $n < 0$).
Dès lors, on peut montrer que le système $\hat{F}_*$ des fibres d'un module homotopique F_* en un corps de fonctions définit un module de cycles. De plus, pour

traitée dans le cas de la K-théorie par H. Gillet (voir [Gil85]) puis étendue dans le cas des modules de cycles par M. Rost.

tout module de cycles ϕ, le groupe $A^0(X,\phi)$, dépendant fonctoriellement d'un schéma lisse X, définit un module homotopique.

Théorème (*cf.* 3.7). — *Les deux associations décrites ci-dessus définissent des fonteurs quasi-inverses l'un de l'autre.*

La résolution de Gersten obtenue par Voevodsky est maintenant équivalente au résultat suivant:

Corollaire (*cf.* 3.12). — *Si F_* est un module homotopique et X un schéma lisse, $H^n(X,F_*) = A^n(X,\hat{F}_*)$.*[(3)]

Notons que ce corollaire est étendu au cas singulier à la fin de l'article (Proposition 6.10). Cette extension nécessite d'interpréter le théorème 3.7 en termes motiviques.

L'interprétation motivique. — Rappelons qu'un complexe motivique suivant Voevodsky est un complexe[(4)] de faisceaux Nisnevich avec transferts dont les faisceaux de cohomologie sont des faisceaux homotopiques. La catégorie des complexes motiviques $DM^{eff}(k)$ porte ainsi naturellement une t-structure au sens de Beilinson, Bernstein et Deligne dont le coeur est la catégorie $HI(k)$.
La catégorie $DM^{eff}(k)$ est triangulée monoïdale symétrique fermée. Elle contient comme sous catégorie pleine la catégorie des motifs purs modulo équivalence rationnelle définie par Grothendieck. C'est ainsi une catégorie "effective ", dans le sens où le motif de Tate $\mathbb{1}(1)$ n'a pas de $\otimes$-inverse. Suivant l'approche initiale de Grothendieck, on est conduit à introduire une version non effective des complexes motiviques ; c'est ce qui est fait par D.C. Cisinski et l'auteur dans [CD09b]. Il est naturel dans le contexte des complexes motiviques de remplacer la construction habituelle pour inverser $\mathbb{1}(1)$ par l'approche des topologues pour définir la catégorie homotopique stable. La catégorie $DM(k)$, dont les objets seront appelés les spectres motiviques, est ainsi construite à partir du formalisme des spectres et des catégories de modèles. C'est la catégorie monoïdale homotopique[(5)] *universelle* munie d'un foncteur dérivé monoïdal

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \to DM(k)$$

admettant un adjoint à droite Ω^∞ et telle que l'objet $\Sigma^\infty\,\mathbb{1}(1)$ est $\otimes$-inversible. Notons que dans le cadre des complexes motiviques, le foncteur Σ^∞ est pleinement fidèle d'après le théorème de simplification de Voevodsky [Voe02].
Dans cet article, nous montrons que l'on peut étendre la définition de la t-structure homotopique à la catégorie $DM(k)$, de telle manière que le foncteur Ω^∞ est t-exact. Le coeur de la t-structure homotopique sur $DM(k)$ est

(3) L'identification obtenue ici est naturelle, non seulement par rapport au pullback (lemme 3.3), mais aussi par rapport aux correspondances finies (proposition 3.10) et par rapport au pushout par un morphisme projectif (proposition 3.16).
(4) Originellement, ces complexes sont supposés bornés supérieurement. Nous abandonnons cette hypothèse dans tout l'article suivant [CD09b].
(5) c'est-à-dire la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles monoïdale.

la catégorie $HI_*(k)$ des modules homotopiques, qui est donc canoniquement identifiée à la catégorie des modules de cycles d'après le théorème 3.7 déjà cité. Ceci nous permet de donner une interprétation frappante du module de cycles $\hat{F}_*$ associé à un module homotopique F_*, à travers la notion de motifs génériques de [Dég08b].(6) Le motif générique associé à un corps de fonctions E est le pro-motif défini par tous les modèles lisses de E. On considère la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ formée par tous les twists de motifs génériques par $\mathbb{1}(n)[n] = \mathbb{1}\{n\}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $\hat{F}_*$ est simplement la restriction du foncteur représenté par F_* dans $DM(k)$ à la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$. La catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ est une catégorie de "points " pour les spectres motiviques, et la fonctorialité des modules de cycles est interprétée en termes de *morphismes de spécialisations* entre ces points. De ce point de vue, les modules homotopiques correspondent à des systèmes locaux où le groupoïde fondamental est remplacé par la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$. L'interprétation motivique nous sert finalement à introduire une condition de finitude (définition 6.6) sur les modules de cycles qui implique que leur graduation naturelle est bornée inférieurement (Corollaire 6.8) – comme c'est le cas de la plupart des modules de cycles définis par des moyens géométriques.

Plan du travail. — L'article est divisé en deux parties, l'une consacée au théorème principal 3.7 et l'autre à sa signification en termes de la théorie motivique de Voevodsky.
La première partie est faite de trois sections. Dans la section 1, on rappelle les propriétés principales des faisceaux homotopiques, et on introduit la catégorie des module homotopiques. Dans la section 2, on rappelle brièvement la théorie des modules de cycle de M. Rost et on établit quelques résultats supplémentaires utiles dans cet article. La section 3 et consacrée à la preuve du théorème central 3.7 cité précédemment. De plus, on établit plusieurs propriétés concernant la fonctorialité de l'identification 3.12 citée ci-dessus.
La deuxième partie est aussi constituée de trois sections. La section 4 contient des rappels concernant la théorie des complexes motiviques de Voevodsky ainsi que la version stable qu'on a introduite avec Cisinski dans [CD09b]. La section 5 est consacrée à la définition de la t-structure homotopique et à l'identification de son coeur avec les modules homotopiques. La section 6 est consacrée aux applications du point de vue motivique: construction de modules de cycles (section 6.1), borne inférieure (section 6.2) et extension du corollaire 3.12 au cas singulier (section 6.3).

Mise en perspective. — Ce travail a été utilisé récemment par B. Kahn dans [Kah10] pour étendre un théorème de Merkurjev. Kahn démontre par exemple que le théorème de Merkurjev est conséquence de notre théorème 3.7 (voir remarque 6.2).
Nous avons aussi utilisé les résultats de cet article dans deux travaux indépendants:

(6)Cette notion a aussi été introduite par A.Beilinson dans [Bei02].

- F. Morel a introduit une t-structure homotopique sur la catégorie homotopique stable des schémas, analogue à celle qu'on définit sur $DM(k)$. Il a conjecturé une relation très précise entre le coeur de sa t-structure, noté $\Pi_*(k)$, et les modules homotopiques (avec transferts) considérés ici: la catégorie $HI_*(k)$ est une sous-catégorie pleine de $\Pi_*(k)$, formée des objets sur lesquels l'*application de Hopf* agit trivialement. On démontre cette conjecture à partir des résultats de cet article dans [Dég10].
- On approfondit aussi la relation entre modules homotopiques et résolution de Gersten en montrant que la suite spectrale du coniveau associée à la cohomologie représentée par un spectre motivique E s'identifie canoniquement à la suite spectrale d'hyper-cohomologie à coefficients dans E associée à la t-structure homotopique (voir [Dég09, sec. 6]). Ce théorème prolonge un résultat de Bloch-Ogus (*cf.* [BO74, 6.4]).

Remerciements. — Mes remerciements vont en premier lieu à F. Morel qui a dirigé ma thèse, dans laquelle le résultat central de cet article a été établi. L'influence de ses idées est partout dans ce texte. Je remercie aussi A. Suslin et A. Merkurjev qui ont été les rapporteurs de cette thèse et dont les rapports m'ont beaucoup aidés dans la rédaction présente, ainsi que D.C. Cisinski pour sa relecture et son intérêt pour mon mémoire de thèse. Enfin, je remercie J. Ayoub, A. Beilinson, J.B. Bost, B. Kahn, J. Riou, C. Soulé et J. Wildeshaus pour leur intérêt et des discussions autour du sujet de cet article.

Notations. — On fixe un corps parfait k. Tous les schémas considérés sont des k-schémas séparés. Nous dirons qu'un schéma X est lisse si il est lisse de type fini sur k. La catégorie des schémas lisses est notée $\mathscr{L}_k$.

Nous disons qu'un schéma X est *essentiellement de type fini* s'il est localement isomorphe au spectre d'une k-algèbre qui est une localisation d'une k-algèbre de type fini.

On appelle *corps de fonctions* toute extension de corps E/k de degré de transcendance fini. Un *corps de fonctions valué* est un couple (E, v) où E est un corps de fonctions et v est une valuation sur E dont l'anneau des entiers est essentiellement de type fini sur k.

Un *modèle* de E/k est un k-schéma lisse connexe X muni d'un k-isomorphisme entre son corps des fonctions et E. On définit le pro-schéma des modèles de E :

$$(E) = \text{"}\varprojlim_{A \subset E}\text{"}\ \operatorname{Spec}(A)$$

où A parcourt l'ensemble ordonné filtrant des sous-k-algèbres de type fini de E dont le corps des fractions est E.

Voici une liste des catégories principales utilisées dans ce texte:

- $DM_{gm}^{eff}(k)$ (resp. $DM_{gm}(k)$) désigne la catégorie des motifs géométriques effectifs (resp. non nécessairement effectifs).
- $DM^{eff}(k)$ désigne la catégorie des complexes motiviques (que l'on ne suppose pas nécessairement bornés inférieurement).

– $DM(k)$ désigne la catégorie des spectres motiviques, version non effective de $DM^{eff}(k)$.
– $HI(k)$ (resp. $HI_*(k)$) désigne la catégorie des faisceaux (resp. modules) homotopiques. C'est le coeur de la t-structure homotopique sur $DM^{eff}(k)$ (resp. $DM(k)$).
– $\mathscr{M}Cycl(k)$ désigne la catégorie des modules de cycles.

PARTIE I
MODULES HOMOTOPIQUES ET MODULES DE CYCLES

1. Modules homotopiques

1.1. Rappels sur les faisceaux avec transferts. — Dans cette partie préliminaire, on rappelle la théorie de Voevodsky des faisceaux avec transferts et des faisceaux homotopiques. Nous nous référons à [Dég07] pour les détails.[7]

1.1. — Soient X et Y des schémas lisses. Rappelons qu'une *correspondance finie* de X vers Y est un cycle de $X \times Y$ dont le support est fini équidimensionel sur X. La formule habituelle permet de définir un produit de composition pour les correspondances finies qui donne lieu à une catégorie additive $\mathscr{L}_k^{cor}$ (*cf.* [Dég07, 4.1.19]). On obtient un foncteur $\gamma : \mathscr{L}_k \to \mathscr{L}_k^{cor}$, égal à l'identité sur les objets, en associant à tout morphisme le cycle associé à son graphe. La catégorie $\mathscr{L}_k^{cor}$ est enfin monoïdale symétrique. Le produit tensoriel sur les objets est donné par le produit cartésien des schémas lisses; sur les morphismes, il est induit par le produit extérieur des cycles (*cf.* [Dég07, 4.1.23]).

1.2. — Un *faisceau avec transferts* est un foncteur $F : (\mathscr{L}_k^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$ additif contravariant tel que $F \circ \gamma$ est un faisceau Nisnevich. On note $Sh^{tr}(k)$ la catégorie des faisceaux avec transferts munis des transformations naturelles. Cette catégorie est abélienne de Grothendieck (*cf.* [Dég07, 4.2.8]). Une famille génératrice est donnée par les faisceaux représentables par un schéma lisse X :

$$\mathbb{Z}^{tr}(X) : Y \mapsto c(Y, X).$$

Il existe un unique produit tensoriel symétrique $\otimes^{\mathrm{tr}}$ sur $Sh^{tr}(k)$ telle que le foncteur $\mathbb{Z}^{tr}$ est monoïdal symétrique. La catégorie $Sh^{tr}(k)$ est de plus monoïdale symétrique fermée (*cf.* [Dég07, 4.2.14]).

Définition 1.3. — Un *faisceau homotopique* est un faisceau avec transferts F invariant par homotopie : pour tout schéma lisse X, le morphisme induit par la projection canonique $F(X) \to F(\mathbb{A}^1_X)$ est un isomorphisme.

[7] Cette référence contient une relecture des preuves originales de Voevodsky ainsi que quelques compléments qui nous seront utiles.

On note $HI(k)$ la sous-catégorie pleine de $Sh^{tr}(k)$ formée des faisceaux homotopiques. Le foncteur d'oubli évident $\mathcal{O} : HI(k) \to Sh^{tr}(k)$ admet un adjoint à gauche $h_0 : Sh^{tr}(k) \to HI(k)$, $h_0(F)$ étant défini comme le faisceau associé au préfaisceau

$$X \mapsto \operatorname{coKer}\Big(F(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{s_0^*-s_1^*} F(X)\Big) \tag{1.3.a}$$

avec s_0 (resp. s_1) la section nulle (resp. unité) de $\mathbb{A}^1_X/X$ (*cf.* [Dég07, 4.4.4, 4.4.15]). D'après *loc. cit.*, le foncteur $\mathcal{O}$ est exact. La catégorie $HI(k)$ est donc une sous-catégorie épaisse de $Sh^{tr}(k)$. En particulier, c'est une catégorie abélienne de Grothendieck dont une famille génératrice est donnée par les faisceaux de la forme $h_0(X) := h_0(\mathbb{Z}^{tr}(X))$. On vérifie aisément que le foncteur $\mathcal{O}$ commute de plus à toutes les limites projectives ce qui implique que $HI(k)$ admet des limites projectives.

1.4. — Pour un corps de fonctions E, on définit la fibre de F en E comme la limite inductive de l'application de F au pro-schéma (E) :

$$\hat{F}(E) = \varinjlim_{A \subset E} F(\operatorname{Spec}(A))$$

Les foncteurs $F \mapsto \hat{F}(E)$ forment une famille conservative de foncteurs fibres(8) de $HI(k)$ (*cf.* [Dég07, 4.4.7]).

Remarque 1.5. — Ce dernier résultat repose sur la propriété très intéressante des faisceaux homotopiques suivante:

Proposition 1.6. — *Pour toute immersion ouverte dense $j : U \to X$ dans un schéma lisse, le morphisme induit*

$$j_* : h_0(U) \to h_0(X)$$

est un épimorphisme dans $HI(k)$.

Cette proposition est une conséquence du corollaire 4.3.22 de [Dég07]: il existe un recouvrement ouvert $W \xrightarrow{\pi} X$ et une correspondance finie $\alpha : W \to U$ telle que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

On peut la reformuler en disant que pour tout faisceau homotopique F, le morphisme $F(X) \to F(U)$ induit par j est un monomorphisme. On déduit de ce dernier résultat que pour tout schéma lisse connexe X de corps des fontions E, le morphisme canonique $F(X) \to \hat{F}(E)$ est un monomorphisme.

1.7. — Dans une catégorie abélienne de Grothendieck $\mathscr{A}$, une classe de flèches $\mathcal{W}$ est dite localisante si :

(i) $\mathcal{W}$ est stable par limite inductive.

(8) *i.e.* exacts commutant aux limites inductives.

(ii) Soit f et g des flèches composables de $\mathscr{A}$. Si deux des constituants de (f, g, gf) appartiennent à $\mathcal{W}$, le troisième appartient à $\mathcal{W}$.

Si $\mathcal{S}$ est un classe de flèches essentiellement petite, on peut parler de la classe de flèches localisante engendrée par $\mathcal{S}$.

Lemme 1.8. — Il existe un unique produit tensoriel symétrique $\otimes^{\mathrm{Htr}}$ *sur* $HI(k)$ *tel que le fonteur* h_0 *est monoïdal symétrique.*

Démonstration. — D'après ce qui précède, $HI(k)$ s'identifie à la localisation de la catégorie $Sh^{tr}(k)$ par rapport à la classe de flèches localisante engendrée par les morphismes $\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathbb{Z}^{tr}(X)$ pour un schéma lisse X arbitraire. Ainsi, pour tout schéma lisse X, $\mathcal{W} \otimes^{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}^{tr}(X) \subset \mathcal{W}$. Donc le produit tensoriel $\otimes^{\mathrm{tr}}$ satisfait la propriété de localisation par rapport à $\mathcal{W}$ ce qui démontre le lemme. □

La catégorie $HI(k)$ munie du produit tensoriel $\otimes^{\mathrm{Htr}}$ obtenu dans le lemme précédent est monoïdale symétrique fermée. Ce produit tensoriel est caractérisé par la relation $h_0(X) \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(Y) = h_0(X \times Y)$ déduite du lemme précédent.

Définition 1.9. — Soit $s : \{1\} \to \mathbb{G}_m$ l'immersion du point unité. On appelle *sphère de Tate* le conoyau de $h_0(s)$ dans la catégorie $HI(k)$. On la note S^1_t. Pour tout entier $n \geq 0$, on note S^n_t la puissance tensorielle n-ième de S^1_t dans la catégorie monoïdale $HI(k)$.

D'après l'invariance par homotopie, on obtient encore une suite exacte courte scindée dans $HI(k)$:

$$0 \to S^1_t \to h_0(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{j_*} h_0(\mathbb{A}^1_k) \to 0.$$

où j est l'immersion ouverte évidente.

1.10. — Soit $n \geq 0$ un entier et E/k un corps de fonction. Pour un groupe abélien M, on note $T_n(M)$ la puissance tensorielle n-ième de M pour $\otimes_{\mathbb{Z}}$.
En utilisant le morphisme canonique $\mathbb{G}_m \to h_0(\mathbb{G}_m)$ et la définition du produit tensoriel $\otimes^{\mathrm{Htr}}$, on obtient un morphisme canonique:

$$\lambda^n_E : T_n(E^\times) \to \widehat{S^n_t}(E).$$

Notons encore

$$\pi_n : T_n(E^\times) \to K^M_n(E)$$

l'épimorphisme canonique à valeur dans le n-ème groupe de K-théorie de Milnor de E. On utilisera de manière centrale le résultat suivant dû à Suslin et Voevodsky (voir [SV00, th. 3.4]):

Théorème 1.11 (Suslin-Voevodsky). — *Avec les notations qui précèdent, le morphisme* λ^n_E *se factorise de manière unique par* π_n *et induit un isomorphisme:*

$$K^M_n(E) \to \widehat{S^n_t}(E).$$

On déduit de ce théorème le lemme suivant:

Lemme 1.12. — *L'automorphisme ϵ de permutation des facteurs sur $S_t^2 = S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} S_t^1$ est égal à -1.*

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 1.6, il suffit de montrer que pour tout corps de fonctions E/k, ϵ agit par -1 sur la fibre $\widehat{S_t^2}(E)$.
D'après le théorème précédent, la flèche canonique:

$$\lambda_E^2 : E^\times \otimes_{\mathbb{Z}} E^\times \to \widehat{S_t^2}(E)$$

est un épimorphisme. De plus, pour tout couple (a, b) d'unités de E, la relation suivante $\lambda_E^2(b, a) = -\lambda_E^2(a, b)$ est vérifiée, d'après la relation analogue bien connue dans $K_2^M(E)$. On conclut du fait que $\epsilon.\lambda_E^2(a, b) = \lambda_E^2(b, a)$. □

1.13. — Pour un entier $n \geq 0$ et un faisceau homotopique F, on pose $F_{-n} = \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(S_t^n, F)$. Par définition, pour tout schéma lisse X,

$$F_{-1}(X) = F(\mathbb{G}_m \times X)/F(X).$$

Le foncteur $?_{-n}$ est le n-ième itéré du fonteur $?_{-1}$. Ainsi la proposition 3.4.3 de [DÉG08B] entraine :

Lemme 1.14. — *L'endofoncteur $HI(k) \to HI(k), F \mapsto F_{-n}$ est exact.*

Le résultat suivant est un corollaire du théorème de simplification de Voevodsky [VOE02].

Proposition 1.15. — *L'endofoncteur $HI(k) \to HI(k), F \mapsto S_t^n \otimes^{\mathrm{Htr}} F$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas $n = 1$. La preuve anticipe la suite de l'exposé puisqu'elle utilise la catégorie $DM_-^{eff}(k)$ des complexes motiviques de Voevodsky définie dans [VOE02]. Le théorème central de *loc. cit.* affirme que le twist de Tate est pleinement fidèle dans $DM_-^{eff}(k)$. Il en résulte que le morphisme canonique $F \to \underline{\mathrm{Hom}}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathbb{Z}^{tr}(1)[1], F(1)[1])$ est un isomorphisme. D'après [DÉG08B, 3.4.4], le membre de droite est égal à $\underline{\mathrm{H}}^0(F(1)[1])_{-1}$. Or par définition, $\underline{\mathrm{H}}^0(F(1)[1]) = S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F$ et la transformation naturelle correspondante $F \to (S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F)_{-1}$ est l'application d'adjonction. □

1.2. DÉFINITION. —

1.16. — On note $\mathbb{Z}$–$HI(k)$ la catégorie des faisceaux homotopiques $\mathbb{Z}$-gradués. Pour un tel faisceau F_* et un entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $F_*\{n\}$ le faisceau gradué dont la composante en degré i est F_{i+n}. Si F est un faisceau homotopique, on note encore $F\{n\}$ le faisceau gradué concentré en degré $-n$ égal à F. La catégorie $\mathbb{Z} - HI(k)$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs la famille $(h_0(X)\{i\})$ indexée par les schémas lisses X et les entiers $i \in \mathbb{Z}$.
Cette catégorie est monoïdale symétrique :

$$\left(F_* \hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}} G_*\right)_n = \oplus_{p+q=n} F_p \otimes^{\mathrm{Htr}} G_q.$$

Pour la symétrie, on adopte la convention donnée par la règle de Koszul :

$$\oplus_{p+q=n} F_p \otimes^{\mathrm{Htr}} G_q \xrightarrow{\sum(-1)^{pq}.\epsilon_{pq}} \oplus_{p+q=n} G_q \otimes^{\mathrm{Htr}} F_p$$

où ϵ_{pq} désigne l'isomorphisme de symétrie pour la structure monoïdale des faisceaux homotopiques.

On note S_t^* le monoïde libre dans $\mathbb{Z}-HI(k)$ engendré par le faisceau S_t^1 placé en degré 1. Il est égal en degré n à S_t^n. Compte tenu de la règle de Koszul ci-dessus et du lemme 1.12, c'est un monoïde commutatif dans $\mathbb{Z}-HI(k)$. On note $S_t^*-\mathrm{mod}$ la catégorie des modules sur S_t^*. C'est une catégorie abélienne monoïdale de Grothendieck avec pour générateurs $(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{i\})$ pour X un schéma lisse et $i \in \mathbb{Z}$. Comme S_t^* est un monoïde libre, se donner un S_t^*-module

$$\tau : S_t^* \,\hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}} F_* \to F_*$$

revient à se donner une suite de morphismes

$$S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F_n \xrightarrow{\tau_n} F_{n+1}$$

appelés *morphismes de suspension*.

Définition 1.17. — Un *module homotopique* est un S_t^*-module (F_*, τ) tel que le morphisme adjoint à τ_n

$$\epsilon_n : F_n \to \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(S_t^1, F_{n+1}) = (F_{n+1})_{-1}$$

est un isomorphisme. On note $HI_*(k)$ la sous-catégorie de $S_t^*-\mathrm{mod}$ formée des modules homotopiques.

Il revient au même de se donner la suite de morphismes $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou la suite de d'isomorphismes $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour définir une structure de module homotopique sur un faisceau homotopique gradué F_*. Par la suite, la notation (F_*, ϵ_*) pour un module homotopique fera toujours référence aux isomorphismes ϵ_n.

1.18. — Compte tenu du lemme 1.14, le foncteur d'oubli $HI_*(k) \to S_t^*-\mathrm{mod}$ est exact et conservatif. Il admet de plus un adjoint à gauche L définit pour tout faisceau homotopique F et tout entier $i \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$L\big(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} F\{i\}\big)_n = \begin{cases} S_t^{n+i} \otimes^{\mathrm{Htr}} F & \text{si } n+i \geq 0 \\ F_{n+i} & \text{si } n+i \leq 0 \end{cases}$$

en adoptant la notation de 1.13. Le fait que L prend ses valeurs dans les faisceaux homotopiques résulte de 1.15. On pose plus simplement $\sigma^\infty F\{i\} = L\big(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} F\{i\}\big)$. La catégorie $HI_*(k)$ est donc une sous-catégorie abélienne de $S_t^*-\mathrm{mod}$, avec pour générateurs la famille

(1.18.a) $$h_{0,*}(X) = \sigma^\infty h_0(X)\{i\}$$

pour un schéma lisse X et un entier $i \in \mathbb{Z}$ – le symbole $*$ correspond à la graduation naturelle de module homotopique.

Si (F_*, ϵ_*) est un module homotopique, on pose $\omega^\infty F_* = F_0$. On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$\sigma^\infty : HI(k) \leftrightarrows HI_*(k) : \omega^\infty \tag{1.18.b}$$

tels que σ^∞ est pleinement fidèle (prop. 1.15) et ω^∞ est exact (lemme 1.14). Ainsi, pour tout schéma lisse X, tout module homotopique F_* et tout $(n,i) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathrm{Hom}_{HI_*(k)}(h_{0,*}(X), F_*\{i\}[n]) = H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_i). \tag{1.18.c}$$

Lemme 1.19. — Il existe sur $HI_*(k)$ une unique structure monoïdale symétrique telle que le foncteur L est monoïdal symétrique.

Démonstration. — Compte tenu de ce qui précède, le foncteur L est un foncteur de localisation: pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on obtient par définition $(S^*_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n\})_{-n+1} = S^1_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)$. Par adjonction, l'identité de $S^1_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)$ induit donc un morphisme de S^*_t-modules

$$S^*_t \otimes^{\mathrm{Htr}} (S^1_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n-1\}) \to S^*_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n\}.$$

Utilisant à nouveau le jeu des adjonctions introduites ci-dessus, $HI_*(k)$ est la localisation de S^*_t–mod par rapport à la classe de flèches localisante $\mathcal{W}$ (*cf.* 1.7) engendrée par les morphismes précédents. Pour tout couple (Y, m), Y schéma lisse, $m \in \mathbb{Z}$, il est évident que $\mathcal{W} \hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}} (S^*_t \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(Y)\{m\}) \subset \mathcal{W}$. Ainsi, $\hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}}$ vérifie la propriété de localisation par rapport à $\mathcal{W}$ ce qui conclut. □

La catégorie $HI_*(k)$ est donc monoïdale symétrique fermée avec pour neutre le module homotopique S^*_t. Le foncteur σ^∞ est de plus monoïdal symétrique. Enfin, l'objet $\sigma^\infty S^1_t$ est inversible pour le produit tensoriel avec pour inverse $\sigma^\infty \mathbb{Z}^{tr}\{-1\}$.

Remarque 1.20. — La catégorie $HI_*(k)$ est la catégorie monoïdale abélienne de Grothendieck *universelle* pour les propriétés qui viennent d'être énoncées. La construction donnée ici est parfaitement analogue à la construction de la catégorie des spectres en topologie algébrique, comme le suggère nos notations – en particulier pour le faisceau S^1_t qui joue le rôle de la sphère topologique. La construction ici est facilitée parce que nous sommes dans un cadre abélien et que la sphère S^1_t est anti-commutative. Le théorème de simplification 1.15 rend la construction du foncteur L plus facile mais n'est pas indispensable.

1.3. Réalisation des motifs géométriques. — Rappelons que la catégorie des motifs géométriques effectifs $DM^{eff}_{gm}(k)$ définie par Voevodsky est l'enveloppe pseudo-abélienne de la localisation de la catégorie $K^b(\mathscr{L}^{cor}_k)$ des complexes de $\mathscr{L}^{cor}_k$ à équivalence d'homotopie près par la sous-catégorie triangulée épaisse engendrée par les complexes suivants :

1. $\ldots 0 \to U \cap V \to U \oplus V \to X \to 0 \ldots$
   pour un recouvrement ouvert $U \cup V$ d'un schéma lisse X.
2. $\ldots 0 \to \mathbb{A}^1_X \to X \to 0 \ldots$
   induit par la projection canonique pour un schéma lisse X.

Rappelons que cette catégorie est triangulée monoïdale symétrique. Pour un schéma lisse X, on note simplement $M(X)$ le complexe concentré en degré 0 égal à X vu dans $DM_{gm}^{eff}(k)$.
Pour tout complexe borné C de $\mathscr{L}_k^{cor}$, on note $\mathbb{Z}^{tr}(C)$ le complexe de faisceau avec transferts évident. Pour un faisceau homotopique F, posons $\varphi_F(C) = \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C), F)$. Rappelons que pour un schéma lisse X, $\mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(X)[-n], F) = H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F)$ (*cf.* [Voe00b, 3.1.9]); la cohomologie Nisnevich de F est de plus invariante par homotopie (*cf.* [Voe00a, 5.6]). On en déduit que le foncteur φ_F ainsi défini se factorise et induit un foncteur cohomologique encore noté $\varphi_F : DM_{gm}^{eff}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$.
On définit le motif de Tate *suspendu*(9) $\mathbb{Z}\{1\}$ comme le complexe

$$\ldots \to \mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{G}_m \to 0 \ldots$$

où $\mathbb{G}_m$ est placé en degré 0, vu dans $DM_{gm}^{eff}(k)$. Avec une convention légèrement différente de celle de Voevodsky, adpatée à nos besoins, on définit la catégorie des motifs géométriques $DM_{gm}(k)$ comme la catégorie monoïdale symétrique universelle obtenue en inversant $\mathbb{Z}\{1\}$ pour le produit tensoriel. Un objet de $DM_{gm}(k)$ est un couple (C, n) où C est un complexe de $\mathscr{L}_k^{cor}$ et n un entier, noté suggestivement $C\{n\}$. Les morphismes sont définis par la formule

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(C\{n\}, D\{m\}) = \varinjlim_{r \geq -n, -m} \mathrm{Hom}\, DM_{gm}^{eff}(k)(C\{r+n\}, D\{r+n\}).$$

Cette catégorie est de manière évidente équivalente à la catégorie définie dans [Voe00b] obtenue en inversant le motif de Tate $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}\{1\}[-1]$. Elle est donc triangulée monoïdale symétrique.
Considérons maintenant un module homotopique (F_*, ϵ_*). Pour tout motif géométrique $C\{n\}$, on pose

$$\varphi(C\{n\}) = \varinjlim_{r \geq -n} \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, F_r)$$

où les morphismes de transitions sont

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, F_r) &\xrightarrow{\epsilon_{r*}} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, (F_{r+1})_{-1}) \\ &= \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n+1\}, F_{r+1}),\end{aligned}$$

les morphismes étant considérés dans la catégorie $D(Sh^{tr}(k))$. Comme dans le cas des motifs effectifs, ceci induit un foncteur de *réalisation cohomologique* associé à (F_*, ϵ_*) :

$$\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$$

Notons que ce foncteur est naturellement gradué $\varphi_n(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r\}) = \varphi(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r-n\})$ de sorte que, d'après le théorème de simplification 1.15, pour tout schéma lisse X, $\varphi_n(\mathbb{Z}^{tr}(X)) = F_n(X)$

Remarque 1.21. — On déduit du théorème de simplification 1.15 la relation suivante: $\varphi(M(X)\{n\}) = F_{-n}(X)$.

(9) En effet, $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$.

2. Modules de cycles

Dans cette section, on rappelle la théorie de Rost des modules de cycles exposée dans [Ros96] ainsi que les compléments que nous lui avons apportés dans [Dég08a]. L'étude de la fonctorialité de la suite exacte longue de localisation à l'aide d'un morphisme de Gysin raffiné est nouvelle (*cf.* proposition 2.6).

2.1. Rappels. — Un *pré-module* de cycles ϕ (*cf.* [Ros96, (1.1)]) est la donnée pour tout corps de fonctions E d'un groupe abélien $\mathbb{Z}$-gradué $\phi(E)$ satisfaisant à la fonctorialité suivante :

(D1) Pour toute extension de corps $f : E \to L$, on se donne un morphisme appelé *restriction* $f_* : \phi(E) \to \phi(L)$ de degré 0.

(D2) Pour toute extension finie de corps $f : E \to L$, on se donne un morphisme appelé *norme* $f^* : \phi(L) \to \phi(E)$ de degré 0.

(D3) Pour tout élément $\sigma \in K_r^M(E)$ du r-ième groupe de K-théorie de Milnor de E, on se donne un morphisme $\gamma_\sigma : \phi(E) \to \phi(E)$ de degré r.

(D4) Pour tout corps de fonctions valué (E, v), on se donne un morphisme appelé *résidu* $\partial_v : \phi(E) \to \phi(\kappa(v))$ de degré -1.

Considérant ces données, on introduit fréquemment un cinquième type de morphisme, associé à un corps de fonctions valué (E, v) et à une uniformisante π de v, de degré 0, $s_v^\pi = \partial_v \circ \gamma_\pi$, appelé *spécialisation*.
Ces données sont soumises à un ensemble de relations (*cf.* [Ros96, (1.1)]). On peut se faire une idée de ces relations en considérant le foncteur de K-théorie de Milnor qui est l'exemple le plus simple de pré-module de cycles.
Considérons un schéma X essentiellement de type fini sur k. Soit x, y deux points de X. Soit Z l'adhérence réduite de x dans X, $\tilde{Z}$ sa normalisation et $f : \tilde{Z} \to Z$ le morphisme canonique. Supposons que y est un point de codimension 1 dans Z et notons $\tilde{Z}_y^{(0)}$ l'ensemble des points génériques de $f^{-1}(y)$. Tout point $z \in \tilde{Z}_y^{(0)}$ correspond alors à une valuation v_z sur $\kappa(x)$ de corps résiduel $\kappa(z)$. On note encore $\varphi_z : \kappa(y) \to \kappa(z)$ le morphisme induit par f. On définit un morphisme $\partial_y^x : \phi(\kappa(x)) \to \phi(\kappa(y))$ par la formule suivante :

$$\partial_y^x = \begin{cases} \sum_{z \in \tilde{Z}_y^{(0)}} \varphi_z^* \circ \partial_{v_z} & \text{si } y \in Z^{(1)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons ensuite le groupe abélien :

$$C^p(X; \phi) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \phi(\kappa(x)).$$

On dit que le pré-module de cycles ϕ est un *module de cycles* (*cf.* [Ros96, (2.1)]) si pour tout schéma essentiellement de type fini X,

(FD) Le morphisme

$$d_{X,\phi}^p : \sum_{x \in X^{(p)}, y \in X^{(p+1)}} \partial_y^x : C^p(X; \phi) \to C^{p+1}(X; \phi)$$

est bien définit.

(C) La suite
$$\ldots \to C^p(X;\phi) \xrightarrow{d^p_{X,\phi}} C^{p+1}(X;\phi) \to \ldots$$
est un complexe.

Les modules de cycles forment de manière évidente une catégorie que l'on note $\mathscr{M}Cycl(k)$.
On introduit une graduation sur le complexe de la propriété (C) :
$$C^p(X;\phi)_n = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} M_{n-p}(\kappa(x)).$$
On note $A^p(X;\phi)_n$ le p-ième groupe de cohomologie de ce complexe, appelé parfois *groupe de Chow à coefficients dans ϕ.*
Pour un schéma lisse X de corps des fonctions E, le groupe $A^0(X;\phi)_n$ est donc le noyau de l'application bien définie
$$\phi_n(E) \xrightarrow{\sum_{x\in X^{(1)}} \partial_x} \phi_{n-1}(\kappa(x))$$
où ∂_x désigne le morphisme résidu associé à la valuation sur E correspondant au point x.

2.2. Fonctorialité. —

2.1. — Le complexe gradué $C^*(X;\phi)_*$ est contravariant en X par rapport aux morphismes plats (*cf.* [Ros96, (3.4)]). Il est covariant par rapport aux morphismes propres équidimensionnels (*cf.* [Ros96, (3.5)]).

2.2. — Dans [Dég06, 3.18], nous avons prolongé le travail original de Rost et nous avons associé à tout morphisme $f : Y \to X$ localement d'intersection complète ([Dég06, 3.12]) tel que Y est lissifiable ([Dég06, 3.13]) un *morphisme de Gysin*
$$f^* : C^*(X;\phi) \to C^*(Y;\phi)$$
qui est un composé d'un morphisme de complexes et de l'inverse formel d'un morphisme de complexe qui est un quasi-isomorphisme (plus précisément, il s'agit de l'inverse formel d'un morphisme p^* pour p la projection d'un fibré vectoriel). Pour désigner une telle flèche formelle, on utilise la notation abrégée $f^* : X \bullet\!\!\longrightarrow Y$.[10]
Ce morphisme de Gysin f^* satisfait les propriétés suivantes :

1. Lorsque f est de plus plat, f^* coincide avec le pullback plat évoqué plus haut.
2. Si $g : Z \to Y$ est un morphisme localement d'intersection complète avec Z lissifiable, $(fg)^* = g^*f^*$.

[10] Les flèches de ce type sont bien définies dans la catégorie dérivée des groupes abéliens et induisent en particulier un morphisme sur les groupes de cohomologie.

Dans le cas où f est une immersion fermée régulière, l'hypothèse que Y est lissifiable est inutile ; le morphisme f^* est défini en utilisant la déformation au cône normal, suivant l'idée originale de Rost (*cf.* [Dég06, 3.3]). On utilisera par ailleurs le résultat suivant dû à Rost ([Ros96, (12.4)]) qui décrit partiellement ce morphisme de Gysin :

Proposition 2.3. — *Soit X un schéma intègre de corps des fonctions E, et $i : Z \to X$ l'immersion fermée d'un diviseur principal régulier irréductible paramétré par $\pi \in \mathcal{O}_X(X)$. Soit v la valuation de E correspondant au diviseur Z. Alors, le morphisme $i^* : A^0(X;\phi) \to A^0(Z;\phi)$ est la restriction de $s_v^\pi : \phi(E) \to \phi(\kappa(v))$.*

2.4. — A tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Delta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

tel que i est une immersion fermée régulière, on associe un *morphisme de Gysin raffiné* $\Delta^* : X' \bullet\!\!\longrightarrow Y'$. Ce morphisme Δ^* vérifie les propriétés suivantes :

1. Si j est régulière et le morphisme des cônes normaux $N_{Y'}(X') \to g^{-1}N_Y(X)$ est un isomorphisme, $\Delta^* = j^*$.
2. Si f est propre, $i^*f_* = g_*\Delta^*$.

De plus, si l'immersion canonique $C_{Y'}(X') \to g^{-1}N_Y(X)$ du cône de j dans le fibré normal de i est de codimension pure égale à e, le morphisme Δ^* est de degré cohomologique e.

2.5. — Pour tout couple de schémas lisses (X, Y) et pour toute correspondance finie $\alpha \in c(X, Y)$, on définit un morphisme $\alpha^* : Y \bullet\!\!\longrightarrow X$ (*cf.* [Dég06, 6.9]). On peut décrire ce dernier comme suit. Supposons que α est la classe d'un sous-schéma fermé irréductible Z de $X \times Y$. Considèrons les morphismes:

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{i} Z \times X \times Y \xrightarrow{q} Y$$

où p et q désignent les projections canoniques et i le graphe de l'immersion fermée $Z \to X \times Y$. Alors,

$$\alpha^* = p_* i^* q^* \qquad (2.5.a)$$

où i^* désigne le morphisme de Gysin de l'immersion fermée régulière i, q^* le pullback plat et p_* le pushout fini.
La propriété $(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$ est démontrée dans [Dég06, 6.5].

2.3. Suite exacte de localisation. — La suite exacte de localisation n'est pas étudiée (ni rappelée) dans [Dég06]. Nous la rappelons maintenant suivant [Ros96] et démontrons un résultat supplémentaire concernant sa fonctorialité. Pour une immersion fermée $i : Z \to X$ purement de codimension c, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$, on obtient en utilisant la fonctorialité rappelée ci-dessus une suite exacte courte scindée de complexes

$$0 \to C^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \xrightarrow{i_*} C^p(X;\phi)_n \xrightarrow{j^*} C^p(U;\phi)_n \to 0. \tag{2.5.b}$$

On en déduit une suite exacte longue de localisation
(2.5.c)

$$\ldots \to A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \xrightarrow{i_*} A^p(X;\phi)_n \xrightarrow{j^*} A^p(U;\phi)_n \xrightarrow{\partial_Z^U} A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \to \ldots$$

où le morphisme ∂_Z^U est définit au niveau des complexes par la formule $\sum_{x\in U^{(p)}, z\in Z^{(p-c+1)}} \partial_z^x$.
Cette suite est naturelle par rapport au pushout propre et au pullback plat. La proposition suivante est nouvelle :

Proposition 2.6. — Considérons un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Z \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "\iota"'] & X \end{tikzcd}$$

tel que ι est une immersion fermée régulière. Supposons que i (resp. k) est une immersion fermée d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$ (resp. $l : V \to X$). Notons $h : V \to U$ le morphisme induit par ι. Supposons enfin que i (resp. k) est de codimension pure égale à c (resp. d). Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\Delta^*"] & A^p(X;\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\iota^*"] & A^p(U;\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[d, "h^*"] & A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A^{p-d}(T;\phi)_{n-d} \arrow[r, "k_*"] & A^p(Y;\phi)_n \arrow[r, "l^*"] & A^p(V;\phi)_n \arrow[r, "\partial_T^V"] & A^{p-d+1}(T;\phi)_{n-d} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Remarque 2.7. —
1. On peut généraliser la proposition précédente au cas des morphismes de Gysin raffinés comme dans la proposition 4.5 de [DÉG06]. Nous laissons au lecteur le soin de formuler cette généralisation.
2. Alors que l'hypothèse sur la codimension pure de i est naturelle, celle sur k ne l'est pas, en particulier dans un cas non transverse. Elle ne nous sert qu'à exprimer les degrés cohomologiques de tous les morphismes et peut aisément être supprimée si on accepte des morphismes non homogènes par rapport au degré cohomologique.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 4.5 de *loc. cit.* dans le cas du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, "k"] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr, "i"] \arrow[dd] & \\ & Y \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & X \arrow[dl, equal] \\ Y \arrow[rr, "\iota"'] & & X. & \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif[(11)], avec les notations analogues de *loc. cit.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "i_*"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & C_T Z \arrow[r, "\nu'_*"] \arrow[d, "k''_*"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & k^* N_Y X \arrow[d, "k'_*"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & T \arrow[l, "p_T^*"'] \arrow[d, "k_*"] \\
X \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "(1')"] & N_Y X \arrow[r, equal] \arrow[d, "l'^*"] \arrow[dr, phantom, "(2')"] & N_Y X \arrow[d, "l'^*"'] \arrow[dr, phantom, "(3')"] & Y \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "l^*"] \\
U \arrow[r, "\sigma_U"'] & N_U V \arrow[r, equal] & N_U V & U \arrow[l, "p_U^*"]
\end{tikzcd}$$

Les carrés (1), (2), (3) sont commutatifs d'après *loc. cit.* et les carrés (1'), (2'), (3') le sont pour des raisons triviales. Les flèches $\bullet\!\!\longrightarrow$ qui apparaissent dans ce diagramme sont bien des morphismes de complexes et induisent donc des morphismes de suite exacte longue de localisation. Il suffit alors d'appliquer le fait que les morphismes p^*, p_T^* et p_U^* sont des quasi-isomorphismes pour conclure. □

Corollaire 2.8. — Considérons un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Z \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

de schémas lisses tels que i (resp. k) est une immersion fermée de codimension pure égale à c, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$ (resp. $l : V \to X$). Notons $h : V \to U$ le morphisme induit par f. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "g^*"] & A^p(X;\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] & A^p(U;\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[d, "h^*"] & A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{p-c}(T;\phi)_{n-c} \arrow[r, "k_*"] & A^p(Y;\phi)_n \arrow[r, "l^*"] & A^p(V;\phi)_n \arrow[r, "\partial_T^V"] & A^{p-c+1}(T;\phi)_{n-c} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.9. — Dans l'article [Dég08b], une *paire fermée* est un couple (X, Z) tel que X est un schéma lisse et Z un sous-schéma fermé. On dit que (X, Z) est lisse (resp. de codimension n) si Z est lisse (resp. purement de codimension n dans X).

Si $i : Z \to X$ est l'immersion fermée associée, un *morphisme de paires fermées* (f, g) est un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & Z \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

qui est topologiquement cartésien. On dit que (f, g) est *cartésien* (resp. *transverse*) quand le carré est cartésien (resp. et le morphisme induit sur les cônes

[(11)] Il y a une faute de frappe dans le diagramme commutatif de *loc. cit.* Il faut lire $t^* N_Z X$ au lieu de $N_Y X$.

normaux $C_TY \to g^{-1}C_ZX$ est un isomorphisme). [12]
Le corollaire précédent montre que la suite de localisation associée à un module de cycles ϕ et une paire fermée (X,Z) est naturelle par rapport aux morphismes transverses.

2.4. Module homotopique associé. —

2.10. — Considérons un module de cycles ϕ. D'après 2.5, $A^0(.;\phi)_*$ définit un préfaisceau gradué avec transferts. D'après [Dég06, 6.9], c'est un faisceau homotopique gradué. On le note F_*^ϕ et on lui définit une structure de module homotopique comme suit:
Soit X un schéma lisse. On considère le début de la suite exacte longue de localisation (2.5.c) associée à la section nulle $X \to \mathbb{A}^1_X$:

$$0 \to F_n^\phi(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{j_X^*} F_n^\phi(\mathbb{G}_m \times X) \xrightarrow{\partial_0^X} F_{n-1}^\phi(X) \to \dots$$

On peut décrire le morphisme ∂_0^X si X est connexe de corps des fonctions E comme étant induit par le morphisme

$$\partial_0^E : \phi_n(E(t)) \to \phi_{n-1}(E)$$

associé à la valuation standard de $E(t)$.
Soit $s_1 : X \to \mathbb{G}_m \times X$ la section unité. Rappelons que $(F_n^\phi)_{-1}(X) = \mathrm{Ker}(s_1^*)$. Or par invariance par homotopie de F_n^ϕ, le morphisme canonique $\mathrm{Ker}(s_1^*) \to \mathrm{coKer}(j^*)$ est un isomorphisme. Ainsi, le morphisme ∂_0^X induit un morphisme

$$\epsilon_{n,X} : (F_n^\phi)_{-1}(X) \to F_{n-1}^\phi(X).$$

On vérifie que la suite de localisation précédente est compatible aux transferts en X, comme cela résulte de la description des transferts rappelée en 2.5 et du corollaire 2.8. Ainsi, ϵ_n définit un morphisme de faisceaux homotopiques. Pour tout corps de fonctions E, $A^1(\mathbb{A}^1_E;\phi) = 0$ (*cf.* [Ros96, (2.2)(H)]). Donc la fibre de ϵ_n en E est un isomorphisme ce qui implique que c'est un isomorphisme de faisceaux homotopiques d'après 1.4.
Ainsi, $(F_*^\phi, \epsilon_*^{-1})$ définit un module homotopique qui dépend fonctoriellement de ϕ.

3. Equivalence de catégories

3.1. Transformée générique. — Considérons un couple (E,n) formé d'un corps de fonctions E et d'un entier relatif n. Rappelons que l'on a associé dans [Dég08b, 3.3.1] au couple (E,n) un *motif générique*

$$M(E)\{n\} = \text{"}\varprojlim_{A\subset E}\text{"}\ M(\mathrm{Spec}(A))\{n\}$$

[12] Lorsque (X,Z) est lisse de codimension n le fait que le morphisme (f,g) est transverse entraîne que (Y,T) est lisse de codimension n (k est régulier).

dans la catégorie des pro-objets de $DM_{gm}(k)$. On note $DM^{(0)}_{gm}(k)$ la catégorie des motifs génériques.

3.1. — Considérons un module homotopique (F_*, ϵ_*) ainsi que le foncteur de réalisation $\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$ qui lui est associé dans la section 1.3. On note $\hat{\varphi}$ le prolongement évident de φ à la catégorie des pro-objets. Il résulte de [Dég08b, 6.2.1] que la restriction de $\hat{\varphi}$ à la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ est un module de cycles, que l'on note $\hat{F}_*$ et que l'on appelle la *transformée générique* de F_*. Rappelons brièvement certaines parties de la construction de [Dég08b]. Notons d'abord que pour tout motif générique $M(E)\{n\}$, $\hat{\varphi}(M(E)\{n\}) = \hat{F}_{-n}(E)$ n'est autre que la fibre de F_{-n} en E (*cf.* 1.4). La transformée $\hat{F}_*$ s'interprète donc comme le *système des fibres* de F_*. Ce sont les *morphismes de spécialisation* entre ces fibres qui donnent la structure de pré-module de cycles :

(D1) Fonctorialité évidente de F_*.

(D2) ([Dég08b, 5.2]) Pour une extension finie L/E, on trouve des modèles respectifs X et Y de E et L ainsi qu'un morphisme fini surjectif $f : Y \to X$ dont l'extension induite des corps de fonctions est isomorphe à L/E. Le graphe de f vu comme cycle de $X \times Y$ définit une correspondance finie de X vers Y notée ${}^{t}f$ – la *transposée* de f. On en déduit un morphisme $({}^{t}f)^* : F_*(X) \to F_*(Y)$. On montre que ce morphisme est compatible à la restriction à un ouvert de X et il induit donc la fonctorialité attendue.

(D3) ([Dég08b, 5.3]) Soit E un corps de fonctions et $x \in E^\times$ une unité. Considérons un modèle X de E munit d'une section inversible $X \to \mathbb{G}_m$ qui correspond à x. Considérons l'immersion fermée $s_x : X \to \mathbb{G}_m \times X$ induite par cette section. On en déduit un morphisme

$$\gamma_x : F_{n-1}(X) \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} (F_n)_{-1}(X) \xrightarrow{\nu} F_n(\mathbb{G}_m \times X) \xrightarrow{s_x^*} F_n(X)$$

où ν est l'inclusion canonique. Ce morphisme est compatible à la restriction suivant un ouvert de X et induit la donnée D3 pour $\hat{F}_*$.

(D4) ([Dég08b, 5.4]) Soit (E, v) un corps de fonctions valué. On peut trouver un schéma lisse X munit d'un point x de codimension 1 tel que l'adhérence réduite Z de x dans X est lisse et l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à l'anneau des entiers de v. On pose $U = X - Z$, $j : U \to X$ l'immersion ouverte évidente. Rappelons que le motif $M_Z(X)$ de la paire (X, Z) est définie comme l'objet de $DM^{eff}_{gm}(k)$ représenté par le complexe concentré en degré 0 et -1 avec pour seule différentielle non nulle le morphisme j. Ce motif s'inscrit naturellement dans le triangle distingué

$$M_Z(X)[-1] \xrightarrow{\partial'_{X,Z}} M(U) \xrightarrow{j_*} M(X) \xrightarrow{+1}$$

On a définit dans [Dég08b, sec. 2.2.5] un *isomorphisme de pureté*

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \to M(Z)(1)[2].$$

On en déduit un morphisme

$$\partial_{X,Z} : F_n(U) = \varphi_n(M(U)) \xrightarrow{\varphi_n(\partial'_{X,Z})} \varphi_n(M_Z(X)[-1])$$
$$\xrightarrow{(\varphi_n(\mathfrak{p}_{X,Z}^{-1})} \varphi_n(M(Z)\{1\}) = (F_n)_{-1}(Z) \xrightarrow{\epsilon_n^{-1}} F_{n-1}(Z),$$

ayant posé $\varphi_n(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{M}\{-n\})$ pour un motif $\mathcal{M}$. Le morphisme résidu du module de cycles $\hat{F}_*$ est donné par la limite inductive des morphismes $\partial_{U,Z\cap U}$ suivant les voisinages ouverts U de x dans X.

3.2. Résolution de Gersten: fonctorialité I. —

3.2. — Considérons un module de cycles ϕ et F^ϕ le module homotopique qui lui est associé dans le paragraphe 2.10 – jusqu'au paragraphe 3.5, on n'indique pas la graduation pour alléger les notations. D'après [Ros96, 6.5], on dispose pour tout schéma lisse X et tout entier $p \in \mathbb{Z}$ d'un isomorphisme canonique $A^p(X;\phi) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X;F^\phi)$.
On rappelle la construction de cet isomorphisme tout en le généralisant au cas de la topologie Nisnevich. Soit X un schéma lisse et X_{Nis} le petit site Nisnevich associé. Les morphismes de X_{Nis} étant étales, on obtient, en utilisant la fonctorialité rappelée dans 2.1, un préfaisceau de complexes de groupes abéliens sur X_{Nis}:

$$C^*_X(\phi) : V/X \mapsto C^*(V;\phi).$$

On vérifie que c'est un faisceau Nisnevich (voir [Dég08b], preuve de 6.10). On pose de plus:

$$F^\phi_X = \underline{\mathrm{H}}^0(C^*_X(\phi)).$$

Ainsi, F^ϕ_X est la restriction du faisceau F^ϕ, défini sur le site Nisnevich $\mathscr{L}_k$, au petit site X_{Nis}. D'après [Ros96, 6.1], le morphisme évident

$$F^\phi_X \to C^*_X(\phi) \tag{3.2.a}$$

est un quasi-isomorphisme.(13) Il induit donc un isomorphisme

$$H^p_{\mathrm{Nis}}(X;F^\phi_X) \to H^p_{\mathrm{Nis}}(X;C^*_X(\phi)).$$

Notons par ailleurs que le complexe $C^*_X(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten au sens de [CD09a, 1.1.9] (voir à nouveau [Dég08b], preuve de 6.10). D'après la démonstration de [CD09a, 1.1.10], on en déduit que le morphisme canonique

$$H^p(C^*(X;\phi)) \to H^p_{\mathrm{Nis}}(X;C^*_X(\phi))$$

est un isomorphisme. Ces deux isomorphismes définissent comme annoncé :

$$\rho_X : A^p(X;\phi) = H^p(C^*(X;\phi)) \xrightarrow{\sim} H^p_{\mathrm{Nis}}(X;F^\phi_X) \simeq H^p_{\mathrm{Nis}}(X;F^\phi). \tag{3.2.b}$$

Lemme 3.3. — L'isomorphisme ρ_X construit ci-dessus est naturel en X par rapport aux morphismes de schémas.

(13) Le complexe de faisceaux $C^*_X(\phi)$ est la *résolution de Gersten* du faisceau F^ϕ_X. C'est en fait la version Nisnevich de la résolution de Cousin au sens de [Har66].

Démonstration. — Notons que, du fait que F_X^ϕ est la restriction d'un faisceau F^ϕ sur $\mathscr{L}_k$, pour tout morphisme $f : Y \to X$ de schémas lisses, on obtient une transformation naturelle canonique:

$$F_X^\phi \to f_* F_Y^\phi$$

qui induit dans la catégorie dérivée:

$$\tau_f : F_X^\phi \to \mathrm{R}f_* F_Y^\phi.$$

La preuve consiste à relever cette transformation naturelle au niveau de la résolution $C_X^*(\phi)$.
On considère d'abord le cas où f est plat. Suivant le paragraphe 2.1, on dispose d'un morphisme de complexes

$$f^* : C^*(X;\phi) \to C^*(Y;\phi)$$

qui est naturel en X par rapport aux morphismes étales. La transformation naturelle sur X_{Nis} correspondante définit un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur X_{Nis}:

$$\eta_f : C_X^*(\phi) \to f_* C_Y^*(\phi)) = \mathrm{R}f_* C_Y^*(\phi). \tag{3.3.a}$$

(La dernière identification résulte du fait que $C_Y^*(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten.) Par définition de la structure de faisceau sur F^ϕ, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F_X^\phi \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d] & \mathrm{R}f_* F_Y^\phi \arrow[d] \\ C_X^*(\phi) \arrow[r, "\eta_f"] & \mathrm{R}f_* C_Y^*(\phi). \end{tikzcd}$$

On en déduit la naturalité de ρ par rapport aux morphismes plats. Remarquons au passage que si f est la projection d'un fibré vectoriel, η_f est un quasi-isomorphisme.
Il reste à considérer le cas d'une immersion fermée $f = i : Z \to X$ entre schémas lisses. Notons N le fibré normal associé à i. La spécialisation au fibré normal définie par Rost (*cf.* [Ros96, sec. 11]) est un morphisme de complexes

$$\sigma_Z X : C^*(X;\phi) \to C^*(N;\phi)$$

qui est de plus naturel en X par rapport aux morphismes étales (*cf.* [Dég06, 2.2]). Notons ν le morphisme composé

$$N \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{i} X.$$

On en déduit dans la catégorie dérivée un morphisme canonique

$$\sigma_i : C_X^*(\phi) \to \mathrm{R}\nu_* C_N^*(\phi).$$

Puisque le morphisme η_p est un quasi-isomorphisme, on obtient alors un morphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$\eta_i : C_X^*(\phi) \to \mathrm{R}i_* C_Z^*(\phi). \tag{3.3.b}$$

Rappelons enfin que, par définition du pullback sur F^ϕ, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F^\phi(X) \arrow[rr, "i^*"] \arrow[d] & & F^\phi(Z) \arrow[d] \\ C^*(X;\phi) \arrow[r, "\sigma_Z(X)"] & C^*(N;\phi) & C^*(Z;\phi). \arrow[l, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

On en déduit que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F^\phi_X \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d] & \mathrm{R}i_*F^\phi_Z \arrow[d] \\ C^*_X(\phi) \arrow[r, "\eta_i"] & \mathrm{R}i_*C^*_Z(\phi) \end{tikzcd}$$

ce qui conclut. □

Remarque 3.4. — 1. On généralisera ce lemme au cas des correspondances finies dans la proposition 3.10.

2. Les constructions (3.3.a) et (3.3.b) de la preuve précédente permettent d'associer à tout morphisme de schémas $f : Y \to X$ un diagramme commutatif dans la catégorie dérivée des faisceaux sur X_{Nis}:

$$\begin{tikzcd} F^\phi_X \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d] & \mathrm{R}f_*F^\phi_Y \arrow[d] \\ C^*_X(\phi) \arrow[r, "\eta_f"] & \mathrm{R}f_*C^*_Y(\phi), \end{tikzcd}$$

en considérant la factorisation de f par son morphisme graphe qui est une immersion régulière. On peut montrer par ailleurs que η_f est compatible à la composition des morphismes.

3.5. — On reprend les notations du paragraphe 3.2 Considérons par ailleurs le foncteur de réalisation

$$\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$$

associé au module homotopique F^ϕ suivant la section 1.3. L'isomorphisme ρ_X correspond par définition à un isomorphisme:

$$A^p(X,\phi)_n \to \varphi_n(M(X)[-p]).$$

Considérons de plus une immersion fermée $i : Z \to X$ entre schémas lisses et $j : U \to X$ l'immersion ouverte du complémentaire. Supposons que i est de codimension pure égale à c. On déduit de la suite exacte de localisation (2.5.b) une unique flèche pointillée qui fait commuter le diagramme de complexes suivant (on utilise à nouveau le fait que $C^*_X(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^*(Z,\phi)_{n-c}[-c] \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dashed, "(1)"'] & C^*(X,\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & C^*(U,\phi)_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_Z(X, C^*_X(\phi))_n \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma(X, C^*_X(\phi))_n \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{R}\Gamma(U, C^*_X(\phi))_n \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La flèche (1) est un quasi-isomorphisme, puisqu'il en est de même des deux autres flèches verticales. Considérons le motif $M_Z(X)$ associé à la paire fermée (X,Z) – *cf.* 3.1, (D4). En utilisant l'isomorphisme (1) et l'identification canonique $H^p_Z(X;F^\phi)_n = \varphi_n(M_Z(X)[-p])$, on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial^U_Z"] \arrow[d, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho'_{X,Z}"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[d, "\rho_X"] \\ \varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r] & \varphi_n(M_Z(X)[-p]) \arrow[r] & \varphi_n(M(X)[-p]) \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. Le morphisme $\rho'_{X,Z}$ est de plus naturel en (X,Z) par rapport aux morphismes transverses (définis en 2.9). Cela résulte en effet du corollaire 2.8, ou plus précisément du diagramme commutatif apparaissant dans la démonstration de 2.6, en utilisant d'une part l'unicité de la flèche pointillée (1) et d'autre part la description de la fonctorialité dérivée de $C^*_X(\phi)$ établie ci-dessus – *i.e.* les transformations naturelles τ_f et τ_i.
Comme conséquence de cette construction, on obtient le lemme clé suivant:

Lemme 3.6. — Reprenons les notations qui précèdent. Considérons le triangle de Gysin (cf. [Voe00b, 3.5.4]*) associé à* (X,Z)*:*

$$M(U) \to M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(c)[2c] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M(U)[1].$$

Alors, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial^U_Z"] \arrow[dd, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho_Z"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[dd, "\rho_X"] \\ & \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p]) \arrow[d, equal] & \\ \varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r, "\varphi_n(\partial_{X,Z})"] & \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) \arrow[r, "\varphi_n(i^*)"] & \varphi_n(M(X)[-p]). \end{tikzcd}$$

Démonstration. — On utilise la construction du triangle de Gysin effectuée dans [Dég08b]. Considérons l'isomorphisme de pureté définit dans [Dég08b, sec. 2.2.5]

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \to M(Z)(c)[2c].$$

D'après ce qui précède, l'isomorphisme composé

$$\rho_{X,Z} : A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \xrightarrow{\rho'_{X,Z}} \varphi_n(M_Z(X)[-p]) \\ \xrightarrow{\varphi(\mathfrak{p}_{X,Z})} \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) = \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p])$$

s'inscrit dans le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[dd, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho_{X,Z}"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[dd, "\rho_X"] \\
& \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p]) \arrow[d, equal] & \\
\varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r, "\varphi_n(\partial_{X,Z})"] & \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) \arrow[r, "\varphi_n(i^*)"] & \varphi_n(M(X)[-p]).
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de voir que $\rho_{X,Z} = \rho_Z$. Notons que d'après ce qui précède, le morphisme $\rho_{X,Z} - \rho_Z$ est naturel en (X,Z) par rapport aux morphisme transverses (définis en 2.9). Soit $P_Z X$ la complétion projective du fibré normal de Z dans X. Considérons l'éclatement $B_Z(\mathbb{A}^1_X)$ de $Z \times \{0\}$ dans X, ainsi que le diagramme de déformation classique qui lui est associé

$$(X,Z) \xrightarrow{(d,i_1)} (B_Z(\mathbb{A}^1_X), \mathbb{A}^1_Z) \xleftarrow{(d',i_0)} (P_Z X, Z).$$

Les carrés correspondants à (d,i_1) et (d',i_0) sont transverses. On est donc réduit au cas où $(X,Z) = (P_Z X, Z)$. Dans ce cas, l'immersion fermée i admet une rétraction et le morphisme $\rho_{X,Z}$ (resp. ρ_Z) est déterminé de manière unique par ρ_X. $\square$

3.3. Théorème et démonstration. —

Théorème 3.7. — Les foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
HI_*(k) & \leftrightarrows & \mathscr{M}Cycl(k) \\
F_* & \mapsto & \hat{F}_* \\
F_*^\phi & \leftarrow & \phi
\end{array}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Il s'agit de construire les deux isomorphismes naturels qui réalisent l'équivalence.

Premier isomorphisme : Considérons un module de cycles ϕ, F_*^ϕ le module homotopique associé. Par définition, pour tout corps de fonctions E, il existe une flèche canonique

$$a_E : \hat{F}_n^\phi(E) = \varinjlim_{A \subset E} A^0(\mathrm{Spec}(A);\phi)_n \to \phi_n(E).$$

C'est trivialement un isomorphisme et il reste à montrer que a définit un morphisme de modules de cycles. La compatibilité à (D1) est évidente. La compatibilité à (D2) résulte du fait que pour un morphisme fini surjectif $f : Y \to X$, le morphisme $A^0({}^t f;\phi)$ est le pushout f_* propre (*cf.* [Dég08b, 6.6]).

Compatibilité à (D3) : On reprend les notations du point (D3) de 3.1 pour le module homotopique F_*^ϕ et pour une unité $x \in E^\times$. On considère la flèche canonique

$$a'_E : \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) = \varinjlim_{A \subset E} A^0\big(\mathrm{Spec}(A[t,t^{-1}]);\phi\big)_n \longrightarrow \phi_n(E(t)).$$

Pour tout E-point y de $\operatorname{Spec}(E[t])$, on note v_y la valuation de $E(t)$ correspondante, d'uniformisante $t-y$. D'après la proposition 2.3, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \arrow[r, "s_x^*"] \arrow[d, "a'_E"'] & \hat{F}_n^\phi(E) \arrow[d, "a_E"] \\ \phi_n(E(t)) \arrow[r, "s_{v_x}^{t-x}"] & \phi_n(E). \end{tikzcd}$$

Par définition du morphisme structural ϵ_* de F_*^ϕ (*cf.* 2.10), le morphisme $\nu' : \hat{F}_{n-1}^\phi(E) \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} (\hat{F}_n^\phi)_{-1}(E) \xrightarrow{\nu} \bar{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E))$ est la section de la suite exacte courte

$$0 \to \hat{F}_n^\phi(E) \xrightarrow{p^*} \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \xrightarrow{\partial} \hat{F}_{n-1}^\phi(E) \to 0$$

qui correspond à la rétraction s_1^* de p^*, pour $s_1 : (E) \to \mathbb{G}_m \times (E)$ la section unité de la projection $p : \mathbb{G}_m \times (E) \to (E)$. En particulier, ν' est caractérisé par les propriétés $\partial\nu' = 1$ et $s_1^*\nu' = 0$.

Notons $\varphi : E \to E(t)$ l'inclusion canonique. On peut vérifier en utilisant les relations des pré-modules de cycles les formules suivantes :

(1) $\forall \rho \in \phi_n(E), \partial_{v_0}(\{t\}.\varphi_*(\rho)) = \rho.$

(2) $\forall y \in E^\times, \forall \rho \in \phi_n(E), \partial_{v_y}(\{t\}.\varphi_*(\rho)) = 0.$

(3) $\forall y \in E^\times, \forall \rho \in \phi_n(E), s_{v_y}^{t-y}(\{t-y\}.\varphi_*(\rho)) = \{y\}.\rho.$

D'après (2), l'application $\phi_n(E) \to \phi_n(E(t)), \rho \mapsto \{t\}.\varphi_*(\rho)$ induit une unique flèche pointillée rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \hat{F}_n^\phi(E) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "a_E"'] & \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \arrow[d, "a'_E"] \\ \phi_n(E(t)) \arrow[r, "\{t\}.\varphi_*"] & \phi_n(E). \end{tikzcd}$$

D'après la relation (1) et la relation (3) avec $y = 1$, cette flèche pointillée satisfait les deux propriétés caractérisant ν'. On déduit donc de la relation (3) avec $y = x$ que $\nu' \circ s_x^*(\rho) = \{x\}.\rho$ ce qui prouve la relation attendue.

Compatibilité à (D4) : Considérons les notations du point (D4) dans 3.1. La compatibilité au résidu est alors une conséquence directe du lemme 3.6 appliqué, pour tout voisinage ouvert U de x dans X, à l'immersion fermée $i : Z \cap U \to U$ dans le cas $c = 1$, $p = 1$.

Deuxième isomorphisme : Considérons un module homotopique (F_*, ϵ_*). Pour tout schéma lisse X, en considérant la limite inductive des morphismes de restriction $F(X) \to F(U)$ pour les ouverts U de X, on obtient une flèche $F_*(X) \to C^0(X; \hat{F}_*)$ qui induit par définition des différentielles un morphisme $b_X : F_*(X) \to A^0(X; \hat{F}_*)$ homogène de degré 0.

Le point clé est de montrer que cette flèche est naturelle par rapport aux correspondances finies. Soit $\alpha \in c(X,Y)$ une correspondance finie entre schémas lisses, que l'on peut supposer connexes. Rappelons que pour tout ouvert dense $j : U \to X$, le morphisme $j^* : A^0(X; \hat{F}_*) \to A^0(U; \hat{F}_*)$ est injectif d'après la suite exacte de localisation (2.5.c). Ainsi, on peut remplacer α par $\alpha \circ j$ et X par U. Par additivité, on se ramène encore au cas où α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de $X \times Y$, fini et dominant sur X. Dès lors, $\alpha \circ j = [Z \times_X U]$. Donc puisque k est parfait, quitte à réduire X, on peut supposer que Z est lisse sur k. Rappelons que d'après 2.5, $\alpha^* = p_* i^* q^*$ pour les morphismes évidents suivants

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{i} Z \times X \times Y \xrightarrow{q} Y.$$

On est donc ramené à vérifier la naturalité dans les trois cas suivants :
Premier cas : Si $\alpha = q$ est un morphisme plat, la compatibilité résulte alors de la définition du pullback plat sur $A^0(.;\hat{F}_*)$ est de la définition de D1.
Deuxième cas : Si $\alpha = {}^t p$, $p : Z \to X$ morphisme fini surjectif entre schémas lisses. Ce cas résulte de la définition du pushout propre sur A^0 et de la définition de D2.
Troisième cas : Supposons $\alpha = i$, pour $i : Z \to X$ immersion fermée régulière entre schémas lisses. Comme on l'a déjà vu, l'assertion est locale en X. On se réduit donc en factorisant i au cas de codimension 1. On peut aussi supposer que Z est un diviseur principal paramétré par $\pi \in \mathcal{O}_X(U)$, pour $U = X - Z$. D'après la proposition 2.3, on est ramené à montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_*(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & F_*(Z) \arrow[d] \\
\hat{F}_*(\kappa(X)) \arrow[r, "s_v^\pi"] & \hat{F}_*(\kappa(Z)).
\end{tikzcd}$$

Tenant compte de la naturalité du morphisme structural ϵ_* du module homotopique F_*, on se ramène à la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(M(X)\{1\}) \arrow[rrr, "i^*"] \arrow[d, "j^*"'] & & & \varphi(M(Z)\{1\}) \arrow[d, equal] \\
\varphi(M(U)\{1\}) \arrow[r, "\nu"] & \varphi(M(\mathbb{G}_m \times U)) \arrow[r, "\gamma_\pi^*"] & \varphi(M(U)) \arrow[r, "\partial_{X,Z}"] & \varphi(M(Z)\{1\})
\end{tikzcd}$$

où ν est l'inclusion canonique, γ_π est induit par $\pi : U \to \mathbb{G}_m$ et $\partial_{X,Z} = \partial'_{X,Z} \circ \mathfrak{p}_{X,Z}^{-1}$ avec les notations de 3.1(D4) est le morphisme résidu au niveau des motifs. Or la commutativité de ce diagramme résulte exactement de [Dég08b, 2.6.5].
Le morphisme $b : F_* \to A^0(.;\hat{F}_*)$ est donc un morphisme de faisceaux avec transferts. Or, il est évident que le morphisme induit sur les fibres en un corps de fontions quelconque est un isomorphisme. Il en résulte (*cf.* 1.4) que b est un isomorphisme. Enfin, on établit facilement la compatibilité de b avec les morphismes structuraux des modules homotopiques F_* et $A^0(.;\hat{F}_*)$ compte tenu de la construction 2.10 – on utilise simplement la fonctorialité de b par rapport à $j_X : \mathbb{G}_m \times X \to \mathbb{A}^1_X$ et $s_1 : X \to \mathbb{G}_m \times X$. □

3.8. — Le théorème précédent montre que la catégorie des modules de cycles est monoïdale symétrique avec pour élément neutre le foncteur de K-théorie de

Milnor. Le produit tensoriel est de plus compatible au foncteur de décalage de la graduation des modules de cycles – *i.e.* le foncteur noté $\{\pm 1\}$ dans $HI_*(k)$. A tout schéma lisse X, on associe un module de cycles

$$\hat{h}_{0,*}(X) = (h_{0,*}(X))^\wedge.$$

D'après le théorème précédent, la famille de modules de cycles $(\hat{h}_{0,*}(X)\{n\})$ pour un schéma lisse X et un entier $n \in \mathbb{Z}$ est génératrice dans la catégorie abélienne $\mathscr{M}Cycl(k)$.

Notons que ces générateurs caractérisent le produit tensoriel des modules de cycles:

$$\hat{h}_{0,*}(X)\{n\} \otimes \hat{h}_{0,*}(Y)\{m\} = \hat{h}_{0,*}(X \times Y)\{n+m\}.$$

On peut enfin donner une formule explicite pour calculer ces modules de cycles. Considérons pour tous schémas lisses X et Y le groupe

$$\pi(Y, X) = \mathrm{coKer}\left(c(\mathbb{A}^1_Y, X) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} c(Y, X)\right).$$

Notons que ce groupe s'étend de manière évidente aux schémas réguliers essentiellement de type fini sur k et que l'on dipose d'un théorème de commutation aux limites projectives de schémas pour ces groupes étendus (*cf.* [Dég07, 4.1.24]). Par ailleurs, si E est un corps de fonctions, et X un schéma projectif lisse, $\pi(\mathrm{Spec}(E), X) = CH_0(X_E)$, groupe de Chow des 0-cycles de X étendu à E.

On déduit de tout cela les calculs suivants: pour tout corps de fonctions E et tout schéma projectif lisse X,

$$\hat{h}_{0,0}(X).E = CH_0(X_E).$$

De plus, pour tout entier $n > 0$,

$$\hat{h}_{0,n}(X).E = \mathrm{coKer}\left(\oplus_{i=0}^n CH_0(\mathbb{G}_m^{n-1} \times X_E) \to CH_0(\mathbb{G}_m^n \times X_E)\right)$$
$$\hat{h}_{0,-n}(X).E = \mathrm{Ker}\left(\pi(\mathbb{G}_{m,E}^n, X) \to \oplus_{i=0}^n \pi(\mathbb{G}_{m,E}^{n-1}, X)\right)$$

où les flèches sont induites par les injections évidentes $\mathbb{G}_m^i \times \{1\} \times \mathbb{G}_m^{n-1-i} \to \mathbb{G}_m^n$.

3.4. Résolution de Gersten: fonctorialité II. —

3.9. — Dans ce paragraphe, on complète les résultats du paragraphe 3.2. On fixe un module de cycles ϕ et on note F^ϕ le module homotopique qui lui est associé. On peut étendre la construction de *loc. cit.* au cas d'un k-schéma de type fini X: on associe à ce schéma un complexe de faisceaux sur X_{Nis}:

$$C_X^*(\phi) : V/X \mapsto C^*(V; \phi)$$

et un faisceau $F_X^\phi = \underline{\mathrm{H}}^0(C_X^\phi)$. Le complexe $C_X^*(\phi)$ vérifie encore la propriété de Brown-Gersten mais par contre, le morphisme canonique:

$$F_X^\phi \to C_X^*(\phi)$$

n'est plus nécessairement un isomorphisme. Cette construction nous sert à montrer le résultat suivant:

*Proposition 3.10. — Considérons les notations ci-dessus. Alors, l'isomorphisme $\rho_X : A^p(X,\phi) \to H^p(X;F^\phi)$ pour un schéma lisse X (*cf. (3.2.b)*) est naturel par rapport aux correspondances finies.*

Démonstration. — La preuve reprend le principe de la preuve du lemme 3.3. Soit $f : Y \to X$ un morphisme plat ou une immersion fermée régulière entre schémas de type fini. Il est clair que les constructions de *loc. cit.* se généralisent et permettent de définir un morphisme canonique η_f qui s'insère dans un diagramme commutatif de la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur X_{Nis}:

$$\begin{tikzcd} F^\phi_X \arrow[r, "\tau_f"] \arrow[d] & \mathrm{R}f_* F^\phi_Y \arrow[d] \\ C^*_X(\phi) \arrow[r, "\eta_f"] & \mathrm{R}f_* C^*_Y(\phi). \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, si $p : Z \to X$ est un morphisme fini, il induit (*cf.* 2.1) un morphisme de complexes

$$p_* : C^*(Z;\phi) \to C^*(X;\phi)$$

qui est naturel en X par rapport aux morphismes étales (*cf.* [Ros96, (4.1)]). On en déduit un morphisme canonique $tr_p : p_* C^*_Z(\phi) \to C^*_X(\phi)$ qui induit un diagramme commutatif dans la catégorie dérivée (p_* est exact):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}p_*(F^\phi_Z) \arrow[r, "tr^0_p"] \arrow[d] & F^\phi_X \arrow[d] \\ \mathrm{R}p_* C^*_Z(\phi) \arrow[r, "tr_p"] & C^*_X(\phi). \end{tikzcd}$$

Revenons à la preuve de la proposition. Il suffit de montrer la naturalité de ρ_X pour une correspondance finie $\alpha \in c(X,Y)$ telle que α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de $X \times Y$. Suivant le paragraphe 2.4, on considère les morphismes:

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{i} ZXY \xrightarrow{q} Y.$$

D'après *loc. cit.*, $\alpha^* = p_* i^* q^*$. Appliquant les constructions qui précèdent, on obtient un diagramme commutatif dans la catégorie dérivée des groupes abéliens:

$$\begin{tikzcd} H^p(Y;F^\phi_Y) \arrow[r, "(\tau_q)_*"] \arrow[d] & H^p(ZXY;F^\phi_Y) \arrow[r, "(\tau_i)_*"] \arrow[d] & H^p(Z;F^\phi_Z) \arrow[r, "(tr^0_p)_*"] \arrow[d] & H^p(X;F^\phi_X) \arrow[d] \\ H^p(Y;C^*_Y(\phi)) \arrow[r, "(\eta_q)_*"] & H^p(ZXY;C^*_Z(\phi)) \arrow[r, "(\eta_i)_*"] & H^p(Z;C^*_Z(\phi)) \arrow[r, "(tr_p)_*"] & H^p(X;C^*_X(\phi)) \end{tikzcd}$$

On vérifie que la composée des flèches de la première ligne coincide avec α^* et cela permet de conclure. $\square$

3.11. — Soit F_* un module homotopique, $\phi = \hat{F}_*$ sa transformée générique. Considérons l'isomorphisme $b : F_* \to F_*^{\phi}$ qui lui est associé d'après le théorème 3.7. Compte tenu de l'isomorphisme (3.2.b), on en déduit un isomorphisme

$$\epsilon_X : H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_*) \xrightarrow{b_*} H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_*^{\phi}) \xrightarrow{\rho_X^{-1}} A^n(X; \hat{F}_*). \tag{3.11.a}$$

La proposition précédente a comme corollaire immédiat:

Corollaire 3.12. — Avec les notations ci-dessus, ϵ_X est un isomorphisme naturel en X par rapport aux correspondances finies.

3.13. — Considérons le module homotopique S_t^*. D'après le théorème de Suslin-Voevodsky rappelé en 1.11, pour tout corps de fonctions E, $\widehat{S_t^*}(E) \simeq K_*^M(E)$. Cet isomorphisme est de plus compatible aux structures de module de cycles. Pour la norme, cela résulte de [SV00, 3.4.1]. Pour le résidu associé à un corps de fontions valué (E, v), on se réduit à montrer que $\partial_v(\pi) = 1$ pour le module de cycle $\hat{S}_t^*$, ce qui résulte de [Dég07, 2.6.5].
On en déduit l'isomorphisme de Bloch(14) pour tout schéma lisse X :

$$\epsilon_X^{\mathrm{B}} : H^n_{\mathrm{Nis}}(X; S_t^n) \to A^n(X; K_*^M)_n = CH^n(X).$$

On a obtenu ci-dessus que cet isomorphisme est compatible aux transferts.
Rappelons que pour tout module de cycles ϕ, il existe un accouplement de modules de cycles $K_*^M \times \phi \to \phi$ au sens de [Ros96, 1.2]. Il induit d'après [Ros96, par. 14] un accouplement

$$CH^n(X) \otimes A^m(X; \phi)_r \to A^{m+n}(X; \phi)_{r+n}.$$

Considérant un module homotopique F_*, on dispose d'un (iso)morphisme de modules homotopiques $S_t^* \otimes F_* \to F_*$. Pour un schéma lisse X, de diagonale $\delta : X \to X \times X$, on en déduit un accouplement

$$H^n(X; S_t^*)_n \otimes H^m(X; F_*)_r \to H^{m+n}(X; F_*)_{r+n}$$

définit en associant à deux morphismes $a : h_{0,*}(X) \to S_t^*\{n\}[n]$ et $b : h_{0,*}(X) \to F_*\{r\}[m]$ la composée

$$h_{0,*}(X) \xrightarrow{\delta_*} h_{0,*}(X) \otimes h_{0,*}(X) \xrightarrow{a \otimes b} S_t^* \otimes F_*\{n+r\}[n+m] \xrightarrow{\sim} F_*\{n+r\}[n+m].$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la compatibilité suivante :

Lemme 3.14. — Avec les notations introduites ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^n(X; S_t^*)_n \otimes H^m(X; F_*)_r \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X^{\mathrm{B}} \otimes \epsilon_X"'] & H^{n+m}(X; F_*)_{n+r} \arrow[d, "\epsilon_X"] \\
CH^n(X) \otimes A^m(X; \hat{F}_*)_r \arrow[r] & A^{m+n}(X; \hat{F}_*)_{n+r}
\end{tikzcd}$$

(14) En effet, d'après l'isomorphisme que l'on vient d'expliciter, le faisceau gradué S_t^* est le faisceau de K-théorie de Milnor non ramifié.

Ainsi, l'isomorphisme ϵ_X^{B} est compatible au produit, et l'isomorphisme ϵ_X est compatible aux structures de module décrites ci-dessus.

3.15. — Notons $\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$ le foncteur de réalisation associé à F_* (*cf.* section 1.3). D'après la proposition précédente, le foncteur φ prolonge le foncteur $A^*(.;\hat{F}_*)$. Ainsi, on a étendu canoniquement la cohomologie à coefficients dans un module de cycles quelconque en un foncteur de réalisation triangulé de $DM_{gm}(k)$. Nous notons encore

$$\epsilon_X : \varphi(M(X)\{-r\}[-n]) \to A^n(X;\hat{F}_*)_r$$

l'isomorphisme qui se déduit par construction de l'isomorphisme (3.11.a).
Soit $f : Y \to X$ un morphisme projectif entre schémas lisses, de dimension relative constante d. Dans [DÉG08A, 2.7], on a construit $f^* : M(X)(d)[2d] \to M(Y)$, morphisme de Gysin associé à f dans $DM_{gm}(k)$.

Proposition 3.16. — Considérons les notations introduites ci-dessus. Alors, le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\varphi\big(M(X)\{d-r\}[d-n]\big) \arrow[r, "\varphi(f^*)"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & \varphi\big(M(Y)\{-r\}[-n]\big) \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\
A^{n-d}(X;\hat{F}_*)_{r-d} \arrow[r, "f_*"] & A^n(Y;\hat{F}_*)_r
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Dans cette preuve, on utilisera particulièrement le lemme suivant :

Lemme 3.17. — Soit X un schéma lisse et E/X un fibré vectoriel de rang n. Soit $p : P \to X$ le fibré projectif associé, et λ le fibré inversible canonique sur P tel que $\lambda \subset p^{-1}(E)$. On note $c = c_1(\lambda) \in CH^1(X)$ la première classe de Chern de λ.
Alors, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i=0}^n A^*(X;\hat{F}_*) & \to & A^*(P;\hat{F}_*) \\ x_i & \mapsto & p^*(x_i).c^i. \end{array}$$

en utilisant la structure de $CH^*(X)$-module (ici notée à droite) de $A^*(X;\hat{F}_*)$ rappelée en 3.13.

Pour obtenir ce lemme, il suffit d'appliquer le théorème du fibré projectif dans $DM_{gm}(k)$ (*cf.* [VOE00B, 2.5.1]) et de regarder son image par φ compte tenu du lemme 3.14.
Soit E un fibré vectoriel sur X et P sa complétion projective. On déduit de ce lemme le cas où $f = p$. En effet, d'après la formule de projection

$$p_*(p^*(x_i).c^i) = x_i.p_*(c^i)$$

pour les groupes de Chow à coefficients (*cf.* [DÉG06, 5.9]), on déduit que p_* est la projection évidente à travers le théorème du fibré projectif. L'analogue de ce calcul pour $\varphi(p^*)$ résulte des définitions de [DÉG08A].

Compte tenu de la définition du morphisme de Gysin et du cas que l'on vient de traiter, nous sommes ramenés au cas où $f = i : Z \to X$ est une immersion fermée, que l'on peut supposer de codimension pure égale à c. Ce cas est alors une conséquence directe du lemme 3.6. $\square$

PARTIE II
MOTIFS MIXTES TRIANGULÉS

4. Rappels

Dans cette section, on rappelle la théorie de Voevodsky des complexes motiviques et l'extension qu'on lui a donnée avec D.C. Cisinski suivant les lignes de Morel et Voevodsky.

4.1. Catégorie effective. —

4.1. — La catégorie $Sh^{tr}(k)$ (*cf.* paragraphe 1.2) est abélienne de Grothendieck. On note $\mathscr{T}_{\mathbb{A}^1}$ la sous-catégorie triangulée localisante de la catégorie dérivée $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ engendrée par les complexes de la forme:

$$\cdots \to \mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathbb{Z}^{tr}(X) \to 0 \cdots$$

Définition 4.2 (Voevodsky). — On définit la catégorie des motifs effectifs comme le quotient de Verdier:

$$DM^{eff}(k) = \mathrm{D}(Sh^{tr}(k))/\mathscr{T}_{\mathbb{A}^1}.$$

Suivant les idées de la théorie de l'homotopie des schémas de Morel et Voevodsky, on peut décrire cette catégorie grâce à la notion de localisation de Bousfield. Le concept central dans cette théorie est le suivant:

Définition 4.3. —

1. Soit C un complexe de faisceaux avec transferts.
   On dit que C est $\mathbb{A}^1$-*local* si pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme suivant, induit par la projection canonique, est un isomorphisme:
   $$H^n_{\mathrm{Nis}}(X, C) \to H^n_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1_X, C).$$
   On dit que C est *Nis-fibrant* si pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme canonique suivant est un isomorphisme:
   $$H^n(C(X)) \to H^n_{\mathrm{Nis}}(X, C).$$
   On dit que C est $\mathbb{A}^1$-*fibrant* si il est $\mathbb{A}^1$-local et Nis-fibrant.
2. Soit $f : C \to D$ un morphisme de $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$.
   On dit que f est une $\mathbb{A}^1$-*équivalence* si pour tout complexe $\mathbb{A}^1$-local L, le morphisme induit
   $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))}(D, L) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))}(C, L)$$

est un isomorphisme.

On dit que f est une $\mathbb{A}^1$-*fibration* si c'est un épimorphisme dans $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ et son noyau est $\mathbb{A}^1$-fibrant.

La proposition suivante (voir [CD09b, ex. 3.3, 4.12]) donne une bonne structure homotopique à la catégorie $DM^{eff}(k)$.

Proposition 4.4. — 1. *La catégorie* $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ *avec pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes et pour fibrations les épimorphismes dont le noyau est Nis-fibrant est une catégorie de modèles symétrique monoïdale dont la catégorie homotopique associée est* $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$.

2. *La localisation de Bousfield de la catégorie de modèles précédente par rapport à la classe d'objets* $\mathscr{T}_{\mathbb{A}^1}$ *est encore une catégorie de modèles symétrique monoïdale avec pour équivalences faibles les* $\mathbb{A}^1$*-équivalences et pour fibrations les* $\mathbb{A}^1$*-fibrations.*

On déduit de cette proposition que le morphisme de projection canonique

$$L_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{D}(Sh^{tr}(k)) \to DM^{eff}(k)$$

est monoïdal et admet un adjoint à droite $\mathcal{O} : DM^{eff}(k) \to \mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ pleinement fidèle. L'image essentielle de ce dernier est formée des complexes $\mathbb{A}^1$-locaux. Par la suite, on identifie $DM^{eff}(k)$ à cette image essentielle. En particulier, pour tout complexe C, $L_{\mathbb{A}^1}(C)$ est $\mathbb{A}^1$-local.

On notera simplement $\otimes$ le produit tensoriel sur $DM^{eff}(k)$ et $\mathbb{1}$ l'unité pour $\otimes$.

Remarque 4.5. — Cette description des objets de $DM^{eff}(k)$ comme complexes $\mathbb{A}^1$-locaux n'a rien d'original. Elle est essentiellement due à Voevodsky suivant son article fondateur [Voe00a] (voir aussi le théorème 5.1 ci-dessous).

Rappelons au passage que d'après [Voe00a, 3.2.6], le foncteur canonique

$$DM^{eff}_{gm}(k) \to DM^{eff}(k) \tag{4.5.a}$$

est pleinement fidèle. Notons de plus que son image essentielle est égale à la sous-catégorie pleine formée des objets compacts de $DM^{eff}(k)$ (*cf.* [CD09b, ex. 5.5]).

4.2. Catégorie non effective. —

4.6. — Soit T le conoyau du morphisme $\mathbb{Z}^{tr}(k) \xrightarrow{s_*} \mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m)$ induit par la section unité. Utilisant la notation de la section 1.3, on définit le *complexe motivique de Tate suspendu* dans $DM^{eff}(k)$ par la formule: $\mathbb{1}\{1\} := L_{\mathbb{A}^1}(T)$.[15]

Dans l'énoncé qui suit, nous dirons qu'une catégorie est *monoïdale homotopique* si c'est un quotient de Verdier d'une catégorie dérivée munie d'un produit tensoriel dérivé. La proposition qui suit est bien connue (*cf.* [Hov01] pour

[15] Rappelons à nouveau qu'avec la notation habituelle $\mathbb{1}\{1\} = \mathbb{1}(1)[1]$. Le twist $\mathbb{1}\{1\}$ apparaît plus naturel pour notre propos c'est pourquoi on adopte cette notation ici.

l'aspect catégorie de modèles pure et [CD09b, 7.15] pour l'aspect catégorie dérivée):

Proposition 4.7. — Il existe une unique catégorie monoïdale homotopique $DM(k)$ munie d'une adjonction de catégories homotopiques

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \leftrightarrows DM(k) : \Omega^\infty \tag{4.7.a}$$

vérifiant

1. Σ^∞ *est monoïdal,*
2. $\Sigma^\infty L_{\mathbb{A}^1}(T)$ *est inversible pour le produit tensoriel sur* $DM(k)$,

et qui soit universelle (initiale) pour ces propriétés.

On note encore $\otimes$ le produit tensoriel sur $DM(k)$ et $\mathbb{1}$ l'objet unité. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{1}\{n\}$ la puissance tensorielle n-ième de l'objet inversible $\mathbb{1}\{1\}$ dans $DM(k)$; pour tout spectre motivique K, on pose $K\{n\} := K \otimes \mathbb{1}\{n\}$.

4.8. — Rappelons que la construction de $DM(k)$ reprend celle de la catégorie d'homotopie stable de la topologie algébrique. On utilise ici la version classique (*i.e.* non symétrique) des spectres qui sera plus commode pour notre propos.[16]
On définit un *spectre motivique* comme une famille $(E_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que E_n est un complexe de faisceaux avec transferts et $\sigma_n : T \otimes^{\mathrm{tr}} E_n \to E_{n+1}$ un morphisme de faisceaux avec transferts dit *de suspension*. On notera simplement E pour le spectre $(E_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que E est un Ω-*spectre* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe de faisceaux avec transferts E_n est $\mathbb{A}^1$-fibrant et le morphisme adjoint à σ_n:

$$\tau_n : E_n \to \underline{\mathrm{Hom}}(T, E_{n+1}) \tag{4.8.a}$$

est un quasi-isomorphisme (voir [Hov01, 3.1]).
Un morphisme f de spectres motiviques est un morphisme de complexes gradués compatible avec les morphismes de suspensions. On dit que f est une *équivalence stable* (resp. *quasi-isomorphisme*) si pour tout Ω-spectre E, $\mathrm{Hom}(f, E)$ est un isomorphisme (resp. f est un quasi-isomorphisme degré par degré). La catégorie $DM(k)$ est la localisation de la catégorie des spectres motiviques par rapport aux équivalences stables (voir [Hov01, 3.4]).

Exemple 4.9. — Soit X un schéma lisse. On peut donner la description suivante du spectre associé au complexe $\mathbb{A}^1$-local $L_{\mathbb{A}^1}\mathbb{Z}^{tr}(X)$ par le foncteur Σ^∞:

$$\big(\Sigma^\infty L_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{Z}^{tr}(X))\big)_n := L_{\mathbb{A}^1}\big(T^{\otimes^{\mathrm{tr}},n} \otimes^{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}^{tr}(X)\big),$$

les morphismes de suspensions étant donnés par les applications évidentes. On déduit de plus du théorème de simplification de Voevodsky [Voe00a], que $\Sigma^\infty L_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{Z}^{tr}(X))$ est un Ω-spectre. Par la suite, on le notera simplement $M(X)$.

[16] Dans [CD09b], on utilise les spectres symétriques pour définir $DM(k)$ et sa structure monoïdale symétrique. L'équivalence de cette définition avec celle présentée ici résulte de [Hov01, 9.1, 9.3].

Remarque 4.10. — Nous utiliserons par la suite les points techniques suivants concernant les spectres motiviques[17]:

1. Si E et E' sont des Ω-spectres, un morphisme $f : E \to E'$ est une équivalence faible si et seulement si c'est un quasi-isomorphisme. De plus, la catégorie $DM(k)$ s'identifie à la localisation de la catégorie des Ω-spectres par rapport aux quasi-isomorphismes.
2. Un triangle entre Ω-spectres
$$E' \to E \to E'' \to E[1]$$
est distingué dans $DM(k)$ si et seulement si pour tout entier $n \geq 0$, le triangle correspondant
$$E'_n \to E_n \to E''_n \to E_n[1]$$
est distingué dans $DM^{eff}(k)$. Ce dernier triangle est en particulier distingué dans $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$.
3. Si E est un Ω-spectre et $n \in \mathbb{Z}$ un entier, $\Omega^\infty\big(E\{n\}\big) = E_n$.

Remarque 4.11. — D'après la propriété universelle de $DM(k)$, le foncteur (4.5.a) s'étend de manière unique en un foncteur:

$$DM_{gm}(k) \to DM(k). \tag{4.11.a}$$

On démontre dans [CD07] – à la suite de la définition 10.1.4 – que ce foncteur est pleinement fidèle avec pour image essentielle la sous-catégorie formée des objets compacts.

5. t-structure homotopique

Notre référence pour les t-structures est [BBD82, sec. 1.3].

5.1. Cas effectif.

— Le théorème suivant est une reformulation du résultat central de la théorie des complexes motiviques (*cf.* [Voe00b, 3.1.12]):

Théorème 5.1 (Voevodsky). — *Soit C un complexe de faisceaux avec transferts. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *C est $\mathbb{A}^1$-local.*
(ii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ est $\mathbb{A}^1$-local.*
(iii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ est invariant par homotopie.*

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (ii) résulte de la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente et sa réciproque résulte du théorème de Voevodsky *loc. cit.* □

[17] Ces assertions résultent de [Hov01, 3.4] ; plus précisément du fait que les Ω-spectres sont les objets fibrants pour la *structure de catégorie de modèles stable* sur la catégorie des spectres motiviques.

Rappelons que la catégorie $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ porte naturellement une t-structure (*cf.* [BBD82, 1.3.2]): un complexe C est positif (resp. négatif) si pour tout $i<0$ (resp. $i>0$) le faisceau de cohomologie $\underline{\mathrm{H}}^i(C)$ est nul.

Corollaire 5.2. — Il existe une unique t-structure sur $DM^{eff}(k)$ telle que le foncteur $\mathcal{O} : DM^{eff}(k) \to \mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ est t-exact[18].
Le foncteur canonique:

$$DM^{eff}(k) \to HI(k), C \mapsto \underline{\mathrm{H}}^0(C)$$

induit une équivalence de catégories entre $HI(k)$ et le coeur de $DM^{eff}(k)$ pour cette t-structure.

Suivant Voevodsky, on appelle cette t-structure sur $DM^{eff}(k)$ la *t-structure homotopique.*
Considérons les notations qui suivent la définition 1.3. Si F est un faisceau avec transferts, on obtient l'identification: $\underline{\mathrm{H}}^0(L_{\mathbb{A}^1}F) = h_0(F)$.[19] En particulier, pour tout schéma lisse X:

$$\underline{\mathrm{H}}^0\left(L_{\mathbb{A}^1}\mathbb{Z}^{tr}(X)\right) = h_0(X). \tag{5.2.a}$$

Rappelons au passage le calcul du motif de Tate (voir [SV00, 3.2]):

$$\mathbb{1}\{1\} := L_{\mathbb{A}^1}(T) = S^1_t. \tag{5.2.b}$$

5.2. Cas non effectif. — Notons que le Hom interne des complexes de faisceaux avec transferts se dérive à droite pour la structure de catégorie de modèles du point 2 de la proposition 4.4. On le note $\mathrm{R}_{\mathbb{A}^1}\,\underline{\mathrm{Hom}}$. Le théorème suivant nous sera essentiel. C'est un corollaire de la théorie de Voevodsky: il résulte de [Voe00a, 4.34].

Théorème 5.3. — L'endofoncteur de $DM^{eff}(k)$ défini par la formule

$$K \mapsto \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1}\,\underline{\mathrm{Hom}}(S^1_t, K)$$

est t-exact et sa restriction au coeur de $DM^{eff}(k)$, identifié avec $HI(k)$, coincide avec le foncteur $F \mapsto F_{-1}$ défini au paragraphe 1.13.

5.4. — Considérons un Ω-spectre $E = (E_n, \sigma_n)$ au sens du paragraphe 4.8. Fixons un entier $n \geq 0$. On associe à E un faisceau homotopique par la formule:

$$\underline{\mathrm{H}}^0_n(E) = \underline{\mathrm{H}}^0(E_n).$$

Considérons l'isomorphisme (4.8.a). Notons que, puisque T est cofibrant et E_{n+1} est $\mathbb{A}^1$-fibrant pour la structure de catégorie de modèles du point (2) de 4.4, on obtient:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(T, E_{n+1}) = \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1}\,\underline{\mathrm{Hom}}(T, E_{n+1}) = \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1}\,\underline{\mathrm{Hom}}(S^1_t, E_{n+1})$$

[18] *i.e.* il respecte les objets positifs ainsi que les objets négatifs.
[19] En effet, $h_0(F)$ est $\mathbb{A}^1$-local d'après le théorème précédent et le morphisme canonique $F \to h_0(F)$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible (voir aussi [Voe00b, 3.2.3]).

D'après le théorème précédent, le morphisme $\underline{\mathrm{H}}^0(\tau_n)$ induit donc un isomorphisme:

$$\epsilon_n : \underline{\mathrm{H}}^0_n(E) \to \big(\underline{\mathrm{H}}^0_{n+1}(E)\big)_{-1}$$

Si l'on pose $\underline{\mathrm{H}}^0_{-n}(E) := \big(\underline{\mathrm{H}}^0(E_0)\big)_{-n}$, on a définit ainsi un module homotopique (*cf.* définition 1.17) que l'on note $\underline{\mathrm{H}}^0_*(E)$.
On a construit ainsi un foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0_*$ sur les Ω-spectres. Puisqu'il respecte manifestement les quasi-isomorphismes, il induit, d'après le premier point de la remarque 4.10, un unique foncteur:

$$\underline{\mathrm{H}}^0_* : DM(k) \to HI_*(k).$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on pose: $\underline{\mathrm{H}}^m_*(E) = \underline{\mathrm{H}}^0_*(E[m])$.

Lemme 5.5. — Considérons les notations introduites ci-dessus.

1. *Le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0_* : DM(k) \to HI_*(k)$ est un foncteur cohomologique qui commute aux sommes quelconques.*
2. *La famille de foncteurs $(\underline{\mathrm{H}}^m_*)_{m\in\mathbb{Z}}$ est conservative.*

Démonstration. — Le point 1 résulte des propriétés analogues du foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0 : DM^{eff}(k) \to HI(k)$, du deuxième point de la remarque 4.10, et du lemme 1.14.
Concernant le point 2, d'après la remarque 4.10(1), on se ramène à montrer que pour un morphisme $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ entre Ω-spectres, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f est un quasi-isomorphisme (au sens du paragraphe 4.8).
(ii) pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^m_*(f)$ est un isomorphisme de modules homotopiques.

Par définition du foncteur $\underline{\mathrm{H}}^m_0$, cette équivalence résulte du corollaire 5.2 et du lemme 1.14. □

On dit qu'un spectre motivique est *positif* (resp. *négatif*) si pour tout $n < 0$ (resp. $n > 0$), $\underline{\mathrm{H}}^n_*(E) = 0$. Soit $\tau_{\leq 0}$ le foncteur de troncation négative pour la t-structure homotopique sur $DM^{eff}(k)$. On vérifie en utilisant à nouveau le théorème 5.3 que l'application de $\tau_{\leq 0}$ degré par degré à un Ω-spectre E définit un $|Omega$-spectre négatif $\tau_{\leq 0}E$ et un morphisme canonique:

$$\tau_{\leq 0}E \to E.$$

Proposition 5.6. — La catégorie DM(k), munie de la notion d'objets négatifs et positifs introduite ci-dessus, est une t-structure dont le foncteur de troncation négatif est le foncteur $\tau_{\leq 0}$ introduit ci-dessus et dont le foncteur cohomologique associé est le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0_*$.

On appelle cette t-structure la *t-structure homotopique* sur $DM(k)$.

5.7. — Notons les propriétés caractéristiques suivantes de cette t-structure:

1. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} DM(k) \arrow[r, "\underline{\mathrm{H}}^0_*"] \arrow[d, "\Omega^\infty"'] & HI_*(k) \arrow[d, "\omega^\infty"] \\ DM^{eff}(k) \arrow[r, "\underline{\mathrm{H}}^0"] & HI(k) \end{tikzcd}$$

   avec la notation de (1.18.b) pour ω^∞. En particulier, Ω^∞ est t-exact.
2. Pour tout objet E de $DM(k)$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\underline{\mathrm{H}}^0_*\big(E\{n\}\big) = \underline{\mathrm{H}}^0_*(E)\{n\}$$

   en utilisant la notation du paragraphe 1.16 pour le membre de droite. Ainsi, le produit tensoriel par $\mathbb{1}\{1\}$ est t-exact.
3. Pour tout schéma lisse X,

$$\underline{\mathrm{H}}^0_*\big(M(X)\big) = h_{0,*}(X)$$

   avec la notation de l'exemple 4.9 (resp. (1.18.a)) à gauche (resp. à droite).

La première assertion résulte du troisième point de la remarque 4.10. La deuxième assertion se déduit du cas $n = -1$ qui résulte lui-même de la définition. La troisième résulte de la remarque 4.9 et de (5.2.a).

Notons finalement qu'un objet E de $DM(k)$ est positif si et seulement si pour tout schéma lisse X et tout couple d'entiers $(n, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Hom}_{DM(k)}\big(M(X)\{n\}[i], E\big) = 0.$$

On en déduit aisément la proposition suivante:

*Proposition 5.8. — Le produit tensoriel sur $DM(k)$ est t-exact à droite (*i.e.* préserve les objets négatifs).*

5.3. Coeur homotopique. — Notons $\underline{\mathrm{H}}^0_*(DM(k))$ le coeur de $DM(k)$ pour la t-structure homotopique de la proposition 5.6. Notons le corollaire suivant de la proposition 5.8:

Corollaire 5.9. — Le produit tensoriel sur $DM(k)$ induit une structure monoïdale symétrique sur $\underline{\mathrm{H}}^0_*(DM(k))$ dont l'objet unité est $\underline{\mathrm{H}}^0_*(\mathbb{1})$ et le produit tensoriel est défini par la formule:

$$E \bar{\otimes} E' := \underline{\mathrm{H}}^0_*(E \otimes E'). \tag{5.9.a}$$

Ce corollaire résulte plus précisément du lemme suivant laissé au lecteur[20]:

Lemme 5.10. — Soit $\mathscr{T}$ une catégorie triangulée monoïdale munie d'une t-structure telle que le produit tensoriel est t-exact à droite.
Alors, pour tous objets K et L négatifs de $\mathscr{T}$,

$$\underline{\mathrm{H}}^0(K \otimes L) \simeq \underline{\mathrm{H}}^0\big(\underline{\mathrm{H}}^0(K) \otimes L\big).$$

[20] On fera attention toutefois que ce lemme est faux sans bornes sur K et L.

L'identification du coeur de la t-structure homotopique sur $DM(k)$ est maintenant aisée:

Théorème 5.11. — *Le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0_*$ induit une équivalence de catégories abéliennes monoïdales:*

$$\underline{\mathrm{H}}^0_*(DM(k)) \to HI_*(k) \simeq \mathscr{M}Cycl(k),$$

l'équivalence de droite étant celle du théorème 3.7.

Démonstration. — Tout module homotopique définit évidemment un Ω-spectre au sens du paragraphe 4.8. On vérifie facilement que cela défini un quasi-inverse au foncteur de l'énoncé.
Concernant les structures monoïdales, on note tout d'abord que $\underline{\mathrm{H}}^0_*(\mathbb{1}) = K^M_*$ compte tenu du théorème 1.11 et du point 2 du paragraphe 5.7. D'après la formule (5.9.a), et les points 2 et 3 du paragraphe *loc. cit.*, pour tous schémas lisses X, Y et tout couple d'entiers $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, on obtient:

$$\begin{aligned} h_{0,*}(X)\{n\}\bar{\otimes} h_{0,*}(Y)\{m\} &= \underline{\mathrm{H}}^0_*(\Sigma^\infty M(X)\{n\})\bar{\otimes}\underline{\mathrm{H}}^0_*(\Sigma^\infty M(X)\{n\}) \\ &= \underline{\mathrm{H}}^0_*(\Sigma^\infty M(X \times Y)\{n+m\}) = h_{0,*}(X \times Y)\{n+m\}. \end{aligned}$$

Cela conclut d'après le lemme 1.19. □

Remarque 5.12. — Reprenons les notations de la section 3.1. Utilisant le foncteur pleinement fidèle (4.11.a), on définit un foncteur:

$$DM^{(0)}_{gm}(k) \to \text{pro–}DM(k) \xrightarrow{\underline{\mathrm{H}}^0_*} \text{pro–}HI_*(k).$$

On vérifie que ce foncteur est pleinement fidèle.(21)
Il en résulte que la catégorie des motifs génériques est la sous-catégorie pleine de la catégorie abélienne pro–$HI_*(k)$, formée des pro-objets de la forme $\underline{\mathrm{H}}^0_*(M(L)\{n\})$ pour un corps de fonctions L/k et un entier $n \in \mathbb{Z}$. Ces pro-objets correspondent à des foncteurs fibres de la catégorie $HI_*(k)$ (*i.e.* exacts, commutant aux sommes infinies). Cette interprétation des motifs génériques est donc très proche de la notion de points d'un topos. La transformée générique d'un module homotopique F_* est finalement donnée par la *restriction de F_* à cette catégorie de points.*(22)

6. Applications et compléments

6.1. Construction de modules de cycles. —

(21) Par le théorème de simplification de Voevodsky [Voe02], on se ramène au cas effectif qui est démontré dans [Dég08b, 3.4.7].

(22) Dans un topos arbitraire, il est très rare que la restriction d'un faisceau à une famille conservative de points donnée définisse une équivalence de catégories.

6.1. — Pour un objet M de $DM(k)$, on note $\hat{\underline{\mathrm{H}}}^0_*(M)$ la transformée générique (par. 3.1) du module homotopique $\underline{\mathrm{H}}^0_*(M)$ (par. 5.4). Cette construction nous permet de construire des modules de cycles intéressants.
Ainsi, pour tout schéma algébrique X, on peut définir suivant [Voe00b] un complexe motivique $\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\,\mathbb{Z}^{tr}(X)$ – qui coincide avec le complexe motivique $M(X)$ lorsque X est lisse. Pour tout entier $i \geq 0$, on pose donc:

$$\hat{h}_{i,*}(X) := \underline{\mathrm{H}}^{-i}_*\left(\Sigma^\infty\,\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\,\mathbb{Z}^{tr}(X)\right). \tag{6.1.a}$$

Pour tout corps de fonctions L, le gradué de degré 0 de ce module de cycles est donné par l'homologie de Suslin de X:

$$\hat{h}_{i,0}(X).L = H_i^{sing}(X_L/L)$$

avec les notations de [SV96].[23]
Si X est projectif lisse de dimension pure d, le motif $M(X) = \Sigma^\infty\,\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\,\mathbb{Z}^{tr}(X)$ dans $DM(k)$ est fortement dualisable avec pour dual fort $M(X)(-d)[-2d]$.[24]
Il en résulte que pour tout corps de fonctions L,

$$\hat{h}_{i,n}(X).L = H^{2d+i+n,d+n}_{\mathcal{M}}(X_L), \tag{6.1.b}$$

où $H^{s,t}_{\mathcal{M}}(X_L)$ désigne la cohomologie motivique de X étendue à L en degré s et twist t.

Remarque 6.2. — Supposons k de caractéristique 0. Comme remarqué par B. Kahn dans [Kah10], on obtient un théorème de Merkurjev (*cf.* [Mer08, Th. 2.10]) comme corollaire du théorème 3.7. En effet, pour X propre et lisse, on peut identifier le module de cycles $\hat{h}_{i,*}(X)$ introduit ici avec le module de cycles K^X construit par Merkurjev. On renvoie le lecteur à [Kah10] pour d'autres utilisations des modules de cycles $\hat{h}_{0,*}(X)$.

6.2. Modules de cycles constructibles. — On introduit l'hypothèse suivante sur le corps k:

($\mathcal{M}_k$) Pour tout corps de fonctions E/k, il existe un k-schéma projectif lisse dont le corps des fonctions est k-isomorphe à E.

Cette hypothèse est évidemment une conséquence de la résolution des singularités au sens classique pour k.

---

(23) Si X est lisse ou si l'on admet la résolution des singularités pour k, on peut montrer que pour tout couple $(i,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, le groupe $\hat{h}_{i,n}(X).L$ est le conoyau de la flèche

$$\bigoplus_{i=1}^{n} H_i^{sing}(\mathbb{G}_m^{n-1} \times X_L/L) \to H_i^{sing}(\mathbb{G}_m^n \times X_L/L)$$

induite par la somme des inclusions $\mathbb{G}_m^{n-1} \to \mathbb{G}_m^n$ de la forme $Id \times s_1 \times Id$ où s_1 est la section unité.

(24) C'est une conséquence de [Voe00b, chap. 5, 2.1.4] et de la dualité dans les motifs de Chow. On obtient une démonstration plus directe à l'aide du morphisme de Gysin suivant [Dég08a, 2.16].

Le résultat suivant est bien connu[25]:

Proposition 6.3. — *Soit d un entier et $\mathscr{P}_{\leq d}$ la sous-catégorie triangulée de $DM(k)$ engendrée par les motifs de schémas projectifs lisses de dimension inférieure à d.*
Soit X un schéma lisse de dimension inférieure à d.

(i) *Si $(\mathcal{M}_k)$ est vérifiée, $M(X)$ appartient à $\mathscr{P}_{\leq d}$.*
(ii) *Le motif rationel $M(X) \otimes \mathbb{Q}$ appartient à $\mathscr{P}_{\leq d} \otimes \mathbb{Q}$.*

On en déduit le résultat suivant:

Proposition 6.4. — *Soit X un schéma lisse de dimension d et $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers.*

(i) *Si X est projectif lisse, $\hat{h}_{i,-n}(X) = 0$ si $n > d$.*
(ii) *Si $(\mathcal{M}_k)$ est vérifiée, $\hat{h}_{i,-n}(X) = 0$ si $n > d$.*
(iii) *Dans tous les cas, $\hat{h}_{i,-n}(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ si $n > d$.*

Démonstration. — Le point (i) est un corollaire de la formule (6.1.b) et du théorème de simplification de Voevodsky car ce dernier affirme qu'il n'y a pas de cohomologie motivique en poids strictement négatif.
Soit $\mathscr{C}_{\leq d}$ la sous-catégorie pleine de $DM(k)$ formée des motifs $\mathcal{M}$ tel que pour tout corps de fonctions E et tout couple $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$, $n > d$,

$$\mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(E), \mathcal{M}\{-n\}[-i]) = 0.$$

Cette catégorie est une sous-catégorie triangulée. D'après (i), elle contient les motifs $M(P)$ pour P projectif lisse de dimension inférieure à d. La proposition précédente permet donc de conclure. $\square$

Remarque 6.5. — Considérons un schéma algébrique X de dimension d. Sous l'hypothèse de résolution des singularités, on peut trouver un hyper-recouvrement $p : \mathcal{X} \to X$ pour la topologie cdh tel que pour tout entier $n \geq 0$, $\mathcal{X}_n$ est projectif lisse de dimension inférieure à d. Utilisant les techniques de [Voe00a], on peut montrer que le morphisme induit $\mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}^{tr}(X)$ est un isomorphisme dans $DM^{eff}(k)$. Le point (ii) de la proposition ci-dessus est dès lors valable sans hypothèse de lissité sur X.
Notons que d'après le théorème de De Jong, on peut toujours trouver un hyper-recouvrement p comme ci-dessus pour la h-topologie. D'après [CD07, 10.4.4, 15.1.2], le morphisme $p_* : M(\mathcal{X}) \to M(X)$ est un isomorphisme dans $DM(k) \otimes \mathbb{Q}$. Le point (iii) est donc valable sans hypothèse de lissité.

Définition 6.6. — Nous dirons qu'un module homotopique (resp. module de cycles) est *constructible* s'il appartient à la sous-catégorie épaisse[26] de $HI_*(k)$ (resp. $\mathscr{M}Cycl(k)$) engendrée par les objets $\sigma^\infty h_i(X)\{n\}$ (resp. $\hat{h}_i(X)\{n\}$) pour un schéma lisse X et un couple d'entiers $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$.

---

[25] On obtient une preuve très élégante en utilisant un argument dû à J. Riou facilement adapté de la preuve de [Rio05, th. 1.4].
[26] *i.e.* stable par noyau, conoyau, extension, sous-objet et quotient.

Remarque 6.7. — 1. Grâce à la t-structure homotopique, on peut considérer une autre condition de finitude sur les modules homotopiques. Un module homotopique F_* est dit *fortement constructible* s'il est de la forme $\underline{\mathrm{H}}^0_*(\mathbb{E})$ pour un motif géométrique $\mathbb{E}$.[27] Dans ce cas, F_* est constructible dans le sens précédent mais la réciproque n'est pas claire.

2. Les modules homotopiques constructibles ne jouissent pas des propriétés de finitude de leur analogue l-adique. Ainsi, il y a lieu de considérer parallèlement la notion plus forte de module homotopique *de type fini*[28]: F_* est de type fini s'il existe un épimorphisme $\sigma^\infty h_0(X) \to F_*$. Ces subtilités interviennent car le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0$ ne préserve pas la propriété d'être géométrique (*i.e.* compact) – contrairement à son analogue l-adique, le foncteur cohomologique associé à la t-structure canonique, qui préserve la constructibilité.
3. Dans le prolongement de la remarque précédente, notons qu'il est probable que la plupart des modules homotopiques constructibles ne soient pas fortement dualisables. La seule exception que l'on connaisse à cette règle est le cas d'un k-schéma étale X et du module homotopique $\sigma^\infty h_0(X)$. Ce dernier est fortement dualisable dans $HI_*(k)$ (ou même dans $HI(k)$) et il est son propre dual fort.

Corollaire 6.8. — *La graduation d'un module de cycles constructible M est bornée inférieurement dès que l'une des deux propriétés suivantes est réalisée:*

- *La propriété $(\mathcal{M}_k)$ est satisfaite.*
- *M est sans torsion.*

6.3. Homologie de Borel-Moore. —

6.9. — Pour la proposition qui suit, on suppose l'existence pour tout schéma algébrique X d'un *motif à support compact* $M^c(X)$ dans $DM(k)$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(C1) $M^c(X)$ est covariant par rapport aux immersion fermées et contravariant par rapport aux immersions ouvertes.

(C2) Si $i : Z \to X$ est une immersion fermée et $j : U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire, il existe un triangle distingué canonique:

$$M^c(Z) \xrightarrow{i_*} M^c(X) \xrightarrow{j^*} M^c(U) \xrightarrow{+1}$$

(C3) Si X est lisse de dimension pure d, $M(X)$ est fortement dualisable avec pour dual fort $M^c(X)\{-d\}[-d]$. De plus, la contravariance de $M^c(X)$ par rapport aux immersions ouvertes correspond par dualité à la covariance naturelle de $M(X)$.

[27] De même, un module de cycles est fortement constructible si le module homotopique associé l'est.

[28] Cette notion, introduite dans la thèse de l'auteur [DÉG02], a été étudiée indépendamment par J. Ayoub dans l'appendice de [HK06].

Si k vérifie la résolution des singularités, Voevodsky a obtenu cette construction dans [Voe00b, par. 4].
Soit ϕ un module de cycles. Rappelons la numérotation homologique du complexe des cycles à coefficients dans ϕ (*cf.* [Ros96, §5]): pour $(n, s) \in \mathbb{Z}^2$, et un schéma algébrique X,

$$C_n(X; \phi)_s = \bigoplus_{x \in X_{(n)}} \phi_{s+n}(\kappa(x))$$

où $X_{(n)}$ désigne l'ensemble des points de dimension n de X.

Proposition 6.10. — Soit ϕ un module de cycles et F_* le module homotopique associé (théorème 3.7).
Alors, utilisant l'hypothèse et les notations qui précèdent, pour tout schéma lissifiable[29] *X et tout couple $(n, s) \in \mathbb{Z}^2$,*

$$A_i(X, \phi)_s \simeq \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{1}[i], M^c(X) \otimes F_*\{s\}).$$

Démonstration. — La catégorie $DM(k)$ est naturellement munie d'un Hom enrichi en complexes (en tant que localisation d'une catégorie dérivée). On introduit les complexes suivants, gradués par rapport à $s \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} C_*(X)_s &= C_*(X; \phi)_s, \\ D_*(X)_s &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, M^c(X) \otimes F_*\{s\}). \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que X est lisse de dimension pure d. On obtient alors un quasi-isomorphisme canonique:

$$\begin{aligned} \epsilon_X : D_*(X)_s &= \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, M^c(X) \otimes F_*\{s\}) \\ &\overset{(1)}{\simeq} \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(M(X), F_*\{s+d\}[d]) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, F_{s+d})[d] \\ &\overset{(2)}{\simeq} C^*(X, \phi)_{s+d}[d] = C_*(X, \phi)_s. \end{aligned}$$

L'isomorphisme (1) résulte de la propriété (C3) ci-dessus et l'isomorphisme (2) est induit par (3.2.a). Cet isomorphisme est naturel en X par rapport aux immersions ouvertes.
Dans le cas général, on peut supposer que X est connexe. Puisque il est lissifiable, il existe un schéma lisse Y, qu'on peut supposer connexe, et une immersion fermée $i : X \to Y$. Soit $j : U \to Y$ l'immersion ouverte complémentaire. Utilisant la propriété (C2) et la suite (2.5.c), on obtient une flèche pointillée dans $D(\mathscr{A}b)$ formant un morphisme de triangles distingués:

(6.10.a)
$$\begin{tikzcd} D_*(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\epsilon_X"'] & D_*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_Y"] & D_*(U) \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "\epsilon_U"] & {} \\ C_*(X) \arrow[r] & C_*(Y) \arrow[r] & C_*(U) \arrow[r, "+1"] & {} \end{tikzcd}$$

[29] *i.e.* il existe une immersion fermée de X dans un schéma lisse

Alors, ϵ_X est un quasi-isomorphisme compatible à la graduation. Il induit l'isomorphisme attendu. □

Remarque 6.11. — Rappelons que suivant [Voe00b, par. 4], $M^c(X)$ est covariant par rapport aux morphismes propres et contravariant par rapport aux morphismes plats équidimensionnels. On peut montrer que l'isomorphisme de la proposition précédente est canonique, contravariant par rapport aux morphismes plats équidimensionnels et covariant par rapport aux morphismes propres, en utilisant les techniques des sections 3.2 et 3.4.
En caratéristique 0, on pourrait aussi utiliser la méthode de *descente par hyper-enveloppes* de [GS96] pour obtenir la proposition précédente, remplaçant le choix d'une lissification par celui d'un hyper-recouvrement cdh – on exploite la fonctorialité *covariante* de $C_*(X)$ et $D_*(X)$. Ceci permet de se débarrasser de l'hypothèse: X lissifiable.

Références

[BBD82] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein & P. Deligne – "Faisceaux pervers", Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5–171.

[Bei02] A. Beilinson – "Remarks on n-motives and correspondences at the generic point", Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., vol. 3, Int. Press, Somerville, MA, 2002, p. 35–46.

[BO74] S. Bloch & A. Ogus – "Gersten's conjecture and the homology of schemes", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 7 (1974), p. 181–201 (1975).

[CD07] D.-C. Cisinski & F. Déglise – "Triangulated categories of motives", 2007.

[CD09a] ———, "Mixed weil cohomologies", arXiv:0712.3291v2, 2007, revised in 2009.

[CD09b] ———, "Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories", *HHA* 11 (2009), no. 1, p. 219–260.

[Dég02] F. Déglise – "Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques", Thèse, Univ. Paris VII, 2002.

[Dég06] ———, "Transferts sur les groupes de chow à coefficients", *Mathematische Zeitschrift* 252 (2006), no. 2, p. 315–343.

[Dég07] ———, "Correspondences and transfers", *Algebraic cycles and motives* (J. Nagel & P. Chris, éds.), Cambridge university press, April 2007.

[Dég08a] ———, "Around the gysin triangle I", arXiv:0804.2415, avril 2008.

[Dég08b] ———, "Motifs génériques", *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 119 (2008), p. 173–244.

[Dég09] ———, "Modules homotopiques", arXiv:0904.4747v1, 2009.

[Dég10] ———, "Orientable homotopy modules", arXiv:1005.4187, 2010.

[Gil85] H. Gillet – "Some new Gysin homomorphisms for the Chow homology of varieties", *Proc. London Math. Soc. (3)* 50 (1985), no. 1, p. 57–68.

[GS96] H. Gillet & C. Soulé – "Descent, motives and K-theory", *J. Reine Angew. Math.* 478 (1996), p. 127–176.

[Har66] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[HK06] A. Huber & B. Kahn – "The slice filtration and mixed Tate motives", *Compos. Math.* 142 (2006), no. 4, p. 907–936.

[Hov01] M. Hovey – "Spectra and symmetric spectra in general model categories", *J. Pure Appl. Alg.* 165 (2001), p. 63–127.

[Kah10] B. Kahn – "Relatively unramified elements in cycle modules", `http://www.math.jussieu.fr/~kahn/preprints/modcyclnr.pdf`, 2010.

[Mer08] A. Merkurjev – "Unramified elements in cycle modules", *J. Lond. Math. Soc. (2)* 78 (2008), no. 1, p. 51–64.

[Rio05] J. Riou – "Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340 (2005), no. 6, p. 431–436.

[Ros96] M. Rost – "Chow groups with coefficients", *Doc. Math. J.* (1996), p. 319–393.

[SV96] A. Suslin & V. Voevodsky – "Singular homology of abstract algebraic varieties", *Invent. Math.* 123 (1996), no. 1, p. 61–94.

[SV00] ______, "Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients", The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, p. 117–189.

[Voe00a] V. Voevodsky – "Cohomological theory of presheaves with transfers", Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 87–137.

[Voe00b] ______, "Triangulated categories of motives over a field", Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

[Voe02] ______, "Cancellation theorem", preprint, 2002.

F. Déglise
CNRS, LAGA (UMR 7539)
Institut Galilée
Université Paris 13
99 avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse
France