Theoremes d'Annulation et Lieux de Degenerescence en Petit Corang

Pierre-Emmanuel Chaput

Received: April 19, 2004

Communicated by Thomas Peternell

Abstract. After giving an explicit description of all the non vanishing Dolbeault cohomology groups of ample line bundles on grassmannians, I give two series of vanishing theorems for ample vector bundles on a smooth projective variety. They imply a part of a conjecture by Fulton and Lazarsfeld about the connectivity of some degeneracy loci.

2000 Mathematics Subject Classification: 14F17
Keywords and Phrases: Théorèmes d'annulation, grassmannienne.

Introduction

Soit X une variété projective complexe, E un fibré vectoriel sur X et L un fibré en droites. Supposons que l'on ait une forme quadratique sur E à valeurs dans L, soit une section de $S^2E^* \otimes L$. Si k est un entier, on note $D_k(E)$ le sous-schéma de X où cette section est au plus de rang k. Dans [FL 81, Remark 2,p.50], on peut lire la conjecture suivante ($t(x) := \frac{x(x+1)}{2}$) :

Conjecture 1 *Soit E un fibré vectoriel de rang e, sur une variété X lisse, projective, connexe et de dimension n. Supposons que E est muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites L. Soit k un entier et supposons que*
– $\dim D_k(E) = \rho := n - t(e-k) \geq 1$.
– $S^2E^* \otimes L$ *est ample.*
Alors, $D_k(E)$ est connexe.

Dans cet article, je montre cette conjecture sous l'hypothèse supplémentaire que $e - k \leq 4$ et $\rho \geq 2$. J'obtiens en fait les résultats plus précis suivants :

Théorème 3 : *Sous les hypothèses de la conjecture précédante, à part que X n'est plus supposée connexe, et si de plus $\rho \geq 2$ et $e-k \leq 4$, alors l'application de restriction $H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(D_k(E), \mathcal{O}_{D_k(E)})$ est un isomorphisme pour $0 \leq q < \rho - 1$, et est injective pour $q = \rho - 1$.*

La conjecture de Fulton et Larzarsfeld a été résolue en utilisant une technique différente par Tu [Tu 89], dans le cas où k est pair. Par ailleurs, [Tu 88] montre aussi la connexité, mais à condition que $\rho \geq e-k$. Si $e-k=3$ ou 4, ma borne, 2, est donc meilleure. J'espère aussi que ce travail est un pas de plus vers une parfaite compréhension des phénomènes combinatoires qui permettent d'établir les théorèmes d'annulation. Mentionnons enfin que [Lay 96, prop 2.3] donne en utilisant la même technique que moi la connexité d'un lieu de dimension strictement positive, mais pour $e-k \leq 2$, ce qui, comme le lecteur pourra le mesurer, simplifie considérablement le problème.

Il est bien connu que la conjecture découle de théorèmes d'annulation adéquats [Man 97] : il suffit en effet d'utiliser une résolution du faisceau structural de $D_k(E)$ par des fibrés vectoriels qui sont des puissances de Schur de E, et d'appliquer les théorèmes d'annulation aux termes de cette résolution. Dans le cas où $e-k \leq 2$, seuls des crochets, à savoir des partitions dont seule la première part est éventuellement supérieure à 2, interviennent, et le théorème 2.1 dans [LN 02] convient. Dans cet article, je propose une généralisation de ce résultat pour des produits tensoriels de crochets. Cette généralisation donne bien entendu un théorème d'annulation pour toutes les partitions ; malheureusement, la borne obtenue est insuffisante pour établir la conjecture. Je propose donc dans cet article une méthode un peu nouvelle, de "comparaison de suites spectrales", pour établir des théorèmes d'annulation plus puissants. Le théorème 3 est alors conséquence des théorèmes d'annulation obtenus par cette méthode.

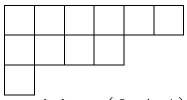
L'efficacité des théorèmes d'annulation obtenus dépend directement de notre compréhension de la cohomologie des fibrés en droites homogènes amples sur une grassmannienne ; Snow [Sno 86] a donné pour la calculer une méthode diagrammatique commode. L'inconvénient de cette méthode est qu'il est difficile d'en déduire, pour $r < e$ et l des entiers fixés, l'entier maximal p tel qu'il existe q avec $H^{p,q}[G(r,e), \mathcal{O}(l)] \neq 0$ ($G(r,n)$ désigne la grassmannienne des r-plans vectoriels dans un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{O}(l)$ est la l-ième puissance du déterminant du fibré quotient). Pourtant, comme nous allons le voir, la détermination de cet entier est cruciale pour obtenir des théorèmes d'annulation. Je propose donc une description nouvelle de la cohomologie de $\mathcal{O}(l)$ sur une grassmannienne, basée sur celle de Snow, et j'en déduis le théorème 1 qui permet de déterminer cet entier.

Je remercie mon directeur de thèse Laurent Manivel pour son aide tout au long de l'élaboration de cet article.

1 Cohomologie de Dolbeault des fibres $\mathcal{O}(l)$ sur une grassmannienne

1.1 Description explicite de toutes les partitions admissibles

Rappelons tout d'abord la description de Snow [Sno 86] des groupes de cohomologie non nuls sur une grassmannienne. Une partition est suite décroissante finie d'entiers. Je note λ_i le i-ième entier de λ ; c'est par convention la i-ième part de λ. Le poids de λ, noté $|\lambda|$, est la somme de ses parts. Sa longueur, $l(\lambda)$, est le nombre de parts non nulles. Dans de nombreuses circonstances, il est pratique de représenter les partitions par un diagramme comme le suggère l'exemple qui suit :



partition $(6, 4, 1)$.

A chaque partition λ correspond un foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même que j'appelle "de Schur" et que je note S_λ [FH 91].
Lorsque λ est une partition, on peut attribuer à chaque case de cette partition son nombre de crochet qui est le nombre de cases de λ situées en-dessous ou à droite de cette case, cette case comprise. Par exemple, les cases de la partition suivante ont été numérotées par leurs nombres de crochets :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

Convenons alors, si l est un entier, que λ sera appelée l-admissible si toutes les cases reçoivent un numéro différent de l.
Snow [Sno 86] a montré qu'il existe une bijection, à $r < e$ et l fixés, entre les composantes des groupes de cohomologie $H^{p,q}[G(r,e), \mathcal{O}(l)]$ et les partitions de longueur inférieure ou égale à r dont toutes les parts sont inférieures ou égales à $e-r$ (par la suite je les appellerai simplement partitions de taille $(e-r, r)$) qui sont l-admissibles. Si λ est une partition l-admissible, soit ${}^h\lambda^-$ (respectivement ${}^v\lambda^-$) la suite d'entiers telle que ${}^h\lambda_i^-$ (respectivement ${}^v\lambda_j^-$) est le nombre de cases situées sur la i-ième ligne (respectivement sur la j-ème colonne) dont le nombre de crochet est strictement inférieur à l. Nous allons voir que ${}^h\lambda^-$ et ${}^v\lambda^-$ sont des partitions. Si $p = |\lambda|$ et q est le nombre de cases qui ont un nombre de crochets strictement supérieur à l, alors $H^{p,q}[G(r,e), \mathcal{O}(l)]$ contient $S_\mu\mathbb{C}^e$, si μ est la partition obtenue en réordonnant toutes les parts $(l - {}^h\lambda_i^-)$ et ${}^v\lambda_j^-$.
Le seul inconvénient de cette méthode est que l'ensemble des partitions l-admissibles n'est pas aisé à décrire. Je propose dans ce paragraphe de montrer qu'il est en bijection avec l'ensemble de toutes les partitions de taille $(l-1, r)$, et d'étudier des propriétés de cette bijection.

Proposition 1 *L'application $\lambda \mapsto {}^h\lambda^-$ est une bijection de l'ensemble des partitions l-admissibles dans l'ensemble des partitions de taille $(l-1, r)$.*

Demonstration : Tout d'abord si λ est l-admissible, alors $\forall i, {}^h\lambda_i^- < l$ puisque les nombres de crochet sont strictement décroissants sur une ligne. Introduisons quelques notations.

Definition 1
- *Soit $h_{i,j}$ le nombre de crochet de la case située sur la i-ième ligne et la j-ème colonne. Convenons que $h_{i,0} = +\infty$.*
- *Pout tout i, soit $(g_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante d'entiers dont l'image est le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de l'ensemble des $h_{i,j}$.*
- *Notons δ_i l'entier $l - {}^h\lambda_i^-$, tel que $g_{i,\delta_i} = l$. Notons enfin $x_{i,j}$ le numéro de colonne de la dernière case sur la i-ième ligne de nombre de crochet supérieur à $g_{i,j}$.*

Ainsi, on a $g_{i,0} = 0$, $x_{i,0} = \lambda_i$ et pour $j >> 1$, $x_{i,j} = 0$, par nos conventions. Alors, par la définition des nombres de crochet, on a $h_{i-1,j} = h_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. Les nombres de crochet qui apparaissent sur la $(i-1)$-ième ligne sont donc $1, \cdots, \lambda_{i-1} - \lambda_i$ et les $h_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. Ainsi, $g_{i-1,j+1} = g_{i,j} + \lambda_{i-1} - \lambda_i + 1$. En particulier, $g_{i-1,\delta_i+1} > l$, donc $\delta_{i-1} \leq \delta_i$ et donc ${}^h\lambda^-$ est une partition. On démontre maintenant un résultat plus précis que la proposition 1 :

Lemme 1 *Pout toute partition ν de taille $(l-1, r)$, il existe une unique partition l-admissible λ telle que ${}^h\lambda^- = \nu$; pour celle-ci, on a :*
- $\lambda_i = \lambda_{i+l-\nu_i} + \nu_i$.
- $x_{i,j} = \lambda_{i+j}$.

Demonstration : On démontre par récurrence descendante sur i_0 qu'une partition a ses nombres de crochet différents de l à partir de la ligne i_0 et vérifie ${}^h\lambda_i^- = \nu_i$ pour $i \geq i_0$ si et seulement si elle vérifie les deux points du lemme pour $i \geq i_0$.
On a $\lambda_r = \nu_r, x_{r,0} = \lambda_r$ et $x_{r,j} = 0$ pour $j > 0$, de sorte que la propriété de récurrence est vraie pour $i_0 = r$. Soit maintenant i_0 fixé tel que cette hypothèse est vérifiée pour $i_0 + 1$. Alors posons $\delta = \delta_{i_0} (= l - \nu_{i_0})$ et $d = \lambda_{i_0} - \lambda_{i_0+1}$ (d dépend de λ_{i_0} qui est pour l'instant inconnu). On a vu que $g_{i_0,0} = 0$ et $g_{i_0,j+1} = g_{i_0,j} + d + 1$ pour $j \geq 0$. Les nombres de crochet de λ en-dessous et sur la i_0-ième ligne sont différents de l si et seulement si $g_{i_0,\delta} = l$, ce qui équivaut donc à $d = l - 1 - g_{i_0+1,\delta_{i_0}-1}$. Il existe donc exactement une possibilité pour λ_{i_0}. De plus, on a toujours $x_{i_0,j+1} = x_{i_0+1,j} = \lambda_{i_0+j+1}$ et le fait qu'effectivement ${}^h\lambda_{i_0}^- = \nu_{i_0}$ implique que $\lambda_{i_0} = x_{i_0,\delta} + \nu_{i_0} = \lambda_{i_0+\delta} + \nu_{i_0}$. •

Notation 2 *Si ν est une partition de taille $(l-1, r)$, je noterai $\widehat{\nu}$ la partition λ telle que ${}^h\lambda^- = \nu$. Par aileurs je noterai $p(\nu)$ et $q(\nu)$ le poids et le nombre de cases de nombre de crochet supérieur à l de λ.*

J'ai affirmé qu'aussi ${}^v\lambda^-$ est une partition, cela découle du fait que λ^* est l-admissible et ${}^v\lambda^- = {}^h(\lambda^*)^-$, où λ^* désigne la partition dont la i-ième part est la longueur de la i-ième colonne du diagramme représentant λ.

Si λ_1, λ_2 sont des partitions, on note $\lambda_1 \subset \lambda_2$ le fait que $\forall i, \lambda_{1,i} \leq \lambda_{2,i}$. Par une récurrence immédiate, le lemme 1 implique :

Proposition 2 *Si $\nu_1 \subset \nu_2$, alors $\widehat{\nu}_1 \subset \widehat{\nu}_2$.*

Proposition 3 *Soient k et l deux entiers et λ une partition. Si λ est l-admissible, alors elle est (kl)-admissible.*

Demonstration : En effet, si G_i désigne l'ensemble des entiers naturels qui n'apparaissent pas parmi les nombres de crochet sur la i-ième ligne, on sait que pour tout i, $l \in G_i$ et il existe d_i tel que $G_{i-1} = (d_i + 1 + G_i) \cup \{0\}$. Une récurrence immédiate prouve alors que pour tout i, G_i vérifie la propriété $x \in G_i \Rightarrow x + l \in G_i$. La proposition en découle. •

La contraposée de cette proposition implique que pour toute partition λ exactement inscrite dans un rectangle $r \times (e - r)$ (c'est-à-dire que $\lambda_1 = e - r$ et $l(\lambda) = r$), il existe une case dont le nombre de crochet est d pour tout d diviseur de $e - 1$. Une telle partition n'est donc pas d-admissible. Si λ correspond à une composante non nulle de $H^{*,*}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(d)]$, on a donc soit $\lambda_1 < e - r$ soit $l(\lambda) < r$. Ainsi, si $S_\mu \mathbb{C}^e \subset H^{*,*}[G(r, \mathbb{C}^e), \mathcal{O}(d)]$, on a soit $\mu_e = 0$, soit $\mu_1 = d$.

1.2 Partitions admissibles de poids maximal

Comme nous le verrons au paragraphe suivant, pour démontrer des théorèmes d'annulation pour la cohomologie de fibrés vectoriels amples, il est utile de bien comprendre la cohomologie des fibrés homogènes sur une grassmannienne, et plus précisément quelle est, pour l, n et r des entiers quelconques, la valeur maximale de p telle qu'il existe un entier q avec $H^{p,q}(G(r, n), \mathcal{O}(l))$ non nul. Si $n > rl$, cet entier a été déterminé par Laurent Manivel [Man 92, proposition 1.2.1, p.111] et cela a permis de démontrer de nombreux théorèmes d'annulation, dont celui de F. Laytimi et W. Nahm concernant les partitions en forme de crochets [LN 02]. Lorsque n, r et l ne satisfont plus cette inégalité, la combinatoire des partitions l-admissibles devient nettement plus compliquée et aucun résultat ne donne cet entier p.
Soit n, r, l des entiers fixés. Si $a, \alpha, \beta, c, \gamma$ sont des entiers, notons $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ la partition μ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall\ i \leq \alpha(l-a), & \mu_i = a \\ \forall\ \alpha(l-a) < i \leq \alpha(l-a) + \beta(l-a+1), & \mu_i = a-1 \\ \forall\ \alpha(l-a) + \beta(l-a+1) < i \leq \alpha(l-a) + \beta(l-a+1) + \gamma, & \mu_i = c \end{array} \right.$$

Cette partition est de longueur $(\alpha+\beta)(l-a)+\beta+\gamma$ et un calcul direct utilisant le lemme 1 montre que $\widehat{\mu}_1(a, \alpha, \beta, c, \gamma) = (\alpha + \beta)a - \beta + c$.
Notons $\delta(\alpha, \beta) = \min\{\alpha, \beta\}$ si $\beta \neq 0$, et $\delta(\alpha, 0) = \alpha$. Rappelons que si μ est une partition, $\widehat{\mu}$ a été définie comme l'unique partition telle que ${}^h\widehat{\mu}^- = \mu$ (cf lemme 1).

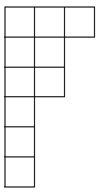
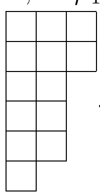
THEOREME 1 *Soient n, r et l des entiers, et λ une partition l-admissible de longueur r et telle que $\lambda_1 \leq n-r$.*
Alors, soit λ est de la forme $\widehat{\mu}(a,\alpha,\beta,c,\gamma)$ avec $\gamma \leq l-a$, soit il existe des entiers a,α,β,c,γ avec $\gamma \leq l-a$ et tels que $\widehat{\mu}(a,\alpha,\beta,c,\gamma)$ soit aussi l-admissible de longueur r et de première part inférieure ou égale à $n-r$, et que de plus $|\widehat{\mu}(a,\alpha,\beta,c,\gamma)| \geq |\lambda| + \delta(\alpha,\beta)$. De plus, ces entiers sont tels que $\alpha+\beta$ et $\gamma+c$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de n par l.

DEMONSTRATION : Considérons $n > r$ et l trois entiers, et soit λ une partition l-admissible de longueur au plus r et telle que $\lambda_1 \leq n-r$. On va raisonner sur la partition ${}^h\lambda^-$: nous allons voir que dans trois cas, on peut modifier cette partition pour en obtenir une de poids supérieur et encore de longueur au plus r et de même première part. Définissons une suite a_i par

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{i+1} = \min\{a_i + l - {}^h\lambda^-_{a_i}, r+1\}. \end{cases}$$

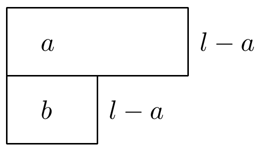
Soit A le plus grand entier i tel que $a_i \leq r$. Le lemme 1 montre que pour $i \leq A$,

$$\lambda_{a_i} = \sum_{i \leq j \leq A} {}^h\lambda^-_{a_j}.$$

En particulier, si μ est une partition telle que $\forall i \leq A, \mu_{a_i} = {}^h\lambda^-_{a_i}$, alors on a $\widehat{\mu}_1 = \lambda_1$. Par exemple, si μ la partition définie par $\forall i \leq A, \forall j \in [a_i, a_{i+1}-1]$, $\mu_j = {}^h\lambda^-_{a_i}$, on a, par la proposition 2, $\widehat{\mu} \supset \lambda$, et $\widehat{\mu}_1 = \lambda_1$. Par exemple, pour $l = 5$, on remplace la partition  par .

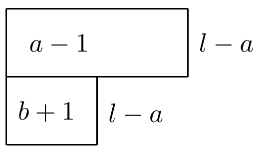
Supposons qu'il existe des entiers i, a et b avec $b \leq a-2$ et tels que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & {}^h\lambda^-_j = a \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & {}^h\lambda^-_j = b. \end{cases}$$



Alors, considérons la partition μ définie par

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & \mu_j = a-1 \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & \mu_j = b+1 \\ \forall j \notin [i+1, i+2(l-a)+1], & \mu_j = {}^h\lambda^-_j. \end{cases}$$



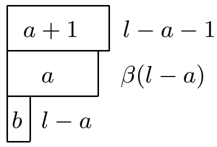
Le lemme 1 implique que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j \\ \forall j \in [i+l-a+1, i+2(l-a)+1], & \widehat{\mu}_j \geq \lambda_j + 1 \\ \forall j \notin [i+1, i+2(l-a)+1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j. \end{cases}$$

Par conséquent, on a $|\widehat{\mu}| \geq |\lambda| + l - a + 1$. Appelons "transformation A" le fait de remplacer ${}^h\lambda^-$ par μ.

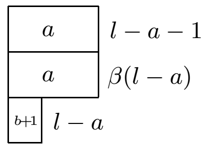
Supposons enfin l'existence d'entiers $i, a, b, \beta \geq 1$ tels que

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+l-a-1], & {}^h\lambda_j^- = a+1 \\ \forall j \in [i+l-a, i+(1+\beta)(l-a)-1], & {}^h\lambda_j^- = a \\ \forall j \in [i+(1+\beta)(l-a), i+(2+\beta)(l-a)-1], & {}^h\lambda_j^- = b. \end{cases}$$



Alors, considérons la partition μ définie par

$$\begin{cases} \forall j \in [i+1, i+(1+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = a \\ \forall j \in [i+(1+\beta)(l-a), i+(2+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = b+1 \\ \forall j \notin [i+1, i+(2+\beta)(l-a)-1], & \mu_j = {}^h\lambda_j^-. \end{cases}$$



Le lemme 1 implique que

$$\begin{cases} \forall j \in [i, i+l-a-1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j \\ \forall j \in [i+l-a, i+(2+\beta)(l-a)-2], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j + 1 \\ \forall j \notin [i+1, i+(2+\beta)(l-a)-1], & \widehat{\mu}_j = \lambda_j. \end{cases}$$

En particulier, on a donc $|\widehat{\mu}| \geq |\lambda| + 2(l-a)$. Appelons "transformation B" le fait de remplacer ${}^h\lambda^-$ par μ.

On peut donc construire une suite finie de partitions μ^i par récurrence : tout d'abord, on pose $\mu^0 = {}^h\lambda^-$. Ensuite, on impose que pour passer de μ^i à μ^{i+1}, soit on ajoute une case, soit on fait l'une des deux transformations A ou B, lorsque cela est possible de façon à ce que $\widehat{\mu}^{i+1}$ reste dans un rectangle de taille $r \times (n-r)$. A un certain indice N, on ne peut plus faire aucune de ces trois opérations. Soit (b_i) les nombres définis comme a_i pour la partition μ^N :

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{i+1} = \inf\{b_i + l - \mu^N_{b_i}, r+1\}. \end{cases}$$

Comme on ne peut plus ajouter de cases, on a $\mu^N_j = \mu^N_{b_i}$ pour $b_i \leq j \leq b_{i+1} - 1$, et comme aucune des deux configurations étudiées ne peut avoir lieu, μ^N est de type $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ avec $\gamma \leq l - a$. De plus, puisque l'on ne peut pas ajouter une case, on a soit $l[\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)] = r$, soit $c = 0$. Si $c = 0$, $\mu(a, \alpha, \beta, c, \gamma)$ ne dépend pas de γ ; on peut donc dans tous les cas supposer que

$$\alpha(l-a) + \beta(l-a+1) + \gamma = r.$$

Pour montrer que $|\mu^N| \geq |\lambda| + \delta(\alpha, \beta)$, il suffit de montrer que $|\mu^N| \geq |\mu^{N-1}| + \delta(\alpha, \beta)$. Or, quand on applique l'opération A, on obtient une partition qui a exactement $l - a$ parts égales à $a - 1$, et quand on applique l'opération B, on obtient une partition qui a exactement $2(l-a) - 1$ parts égales à a : ce ne sont

donc pas des partitions de type $\mu(a,\alpha,\beta,c,\gamma)$. On en déduit donc que pour passer de μ^{N-1} à $\mu^N = \mu(a,\alpha,\beta,c,\gamma)$, on a ajouté une case. Soit cette case se trouvait sur la r-ième ligne, et on a $|\mu^N|-|\mu^{N-1}| = \alpha+\beta+1$; soit, si $\beta > 0$, elle se trouvait sur la $\alpha(l-a)+\beta(l-a+1)$-ième ligne, et on a $|\mu^N|-|\mu^{N-1}| = \beta$; soit, enfin, elle se trouvait sur la $\alpha(l-a)$-ième ligne, et dans ce cas $|\mu^N|-|\mu^{N-1}| = \alpha$; on voit que dans tous les cas, $|\mu^N| - |\mu^{N-1}| \geq \delta(\alpha,\beta)$.
Pour achever la preuve du théorème, il ne reste plus qu'à calculer $\alpha+\beta$ et $\gamma+c$. Or, on a vu que $\widehat{\mu}_1(a,\alpha,\beta,c,\gamma) = (\alpha+\beta)a-\beta+c$; comme les transformations effectuées ne changent pas la première part, on en déduit $\lambda_1 = (\alpha+\beta)a-\beta+c$. Par ailleurs, on a $r = (\alpha+\beta)(l-a)+\beta+\gamma$. On en déduit donc que

$$n = r + \lambda_1 = (\alpha+\beta)\ l + (\gamma+c). \tag{1}$$

Or, on a vu que $\gamma \leq l-a$ et $c \leq a$. Par convention, on exclut les égalités $\gamma = l-a$ et $c = a$, car $\mu(a,\alpha,0,a,l-a) = \mu(a,\alpha+1,0,0,0)$; on a donc $\gamma + c < l$. La formule (1) exprime donc la division euclidienne de n par l, concluant la preuve du théorème.

•

2 Suite spectrale de Borel Le-Potier

Dans ce paragraphe, je rappelle la définition de la suite spectrale de Borel Le-Potier, qui est à la base de mes théorèmes d'annulation.
Soit $\pi : Y \to X$ une fibration localement triviale propre et E un fibré vectoriel sur Y. Soit $\Omega^i_{Y/X}$ le fibré des i-formes sur Y relatives à π, défini par $\Omega^i_{Y/X} = \Lambda^i \Omega_{Y/X}$ et la suite exacte de fibrés sur Y suivante :

$$0 \to \pi^*\Omega X \xrightarrow{\pi^*} \Omega Y \to \Omega_{Y/X} \to 0.$$

Soient aussi les fibrés $G^{t,p} := \Omega^{p-t}_{Y/X} \otimes \pi^*\Omega^t_X$. Pour chaque p, on a [LP 77] une suite spectrale aboutissant sur $H^{p,q}(Y,E)$ et dont les termes d'ordre 1 sont :

$${}^pE_1^{t,q-t} = H^q(Y, G^{t,p} \otimes E).$$

Pour calculer les groupes de cohomologie $H^q(Y, G^{t,p} \otimes E)$, on utilise une suite spectrale de Leray. La suite spectrale de termes d'ordre 2

$${}^{p,t}E_2^{k,j-k} = H^k(X, R^{j-k}\pi_* G^{t,p}) = H^{t,k}[X, R^{j-k}\pi_*(E \otimes \Omega^{p-t}_{Y/X})] \tag{2}$$

aboutit sur ${}^pE_1^{t,j}$. Introduisons enfin une notation :

Notation 3 *Si $\pi : Y \to X$ est une fibration et E un fibré vectoriel sur Y, notons $R^{p,q}\pi_* E$ le faisceau $R^q\pi_*(E \otimes \Omega^p_{Y/X})$.*

3 Theoreme d'annulation pour un produit tensoriel de crochets

W. Nahm et F. Laytimi ont montré un théorème d'annulation pour la cohomologie d'une puissance de Schur correspondant à un crochet d'un fibré ample [LN 02, th 2.1]. Dans ce paragraphe, je généralise leur résultat à un produit de crochets. Si α et β sont des entiers, notons $Z^{\alpha,\beta}$ le foncteur S_λ pour la partition λ de longueur $\alpha+1$ et de poids β telle que $\lambda_1 = \beta-\alpha$ et $\forall 1 < i \leq \alpha+1, \lambda_i = 1$.

Proposition 4 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X projective et lisse de dimension n. Soit $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i < k_i$; soit $\sigma = \sum \alpha_i$ et $k = \sum k_i$; alors,*

$$H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0 \text{ si } q > n-p+[\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1).$$

Posons $Q(p,\sigma) = n-p+[\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1)$.

Demonstration : Reprenant les idées de [LN 02], soit $C_2^k = \frac{k(k-1)}{2}$ et δ la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}, C_2^{\delta(n)} \leq n < C_2^{\delta(n)+1}$. On peut alors définir un ordre sur $\mathbb{N}^2$. Celui-ci est donné par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^3$ et l'injection $(x,\sigma) \mapsto (\delta(x)+\sigma, x-C_2^{\delta(x)}, \sigma)$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble $\mathbb{N}^2$ muni de cet ordre. L'intérêt principal de $\mathcal{N}$ est qu'il vérifie :

Lemme 2 *[LN 02] : Pour tous $(x,\sigma) \in \mathcal{N}, \mu \in \mathbb{Z}-\{0\}$, si $r = \delta(x)$ et si $x+\mu r \in \mathbb{N}$, alors $(x+\mu r, \sigma-\mu) < (x,\sigma)$.*

On démontre la proposition par récurrence sur les couples $(n-p,\sigma) \in \mathcal{N}$. Cette récurrence peut sembler peu naturelle et troubler le lecteur ; aussi, je donne les 10 premiers éléments de $\mathcal{N}$ pour qu'il puisse suivre plus aisément les premiers pas de la récurrence.

	$n-p$	σ	$\delta(n-p)+\sigma$	$n-p-C_2^{\delta(n-p)}$	σ
1	0	0	1	0	0
2	1	0	2	0	0
3	0	1	2	0	1
4	2	0	2	1	0
5	3	0	3	0	0
6	1	1	3	0	1
7	0	2	3	0	2
8	4	0	3	1	0
9	2	1	3	1	1
10	5	0	3	2	0

Si on place ces numéros d'apparition sur un plan repéré par $n-p$ selon l'axe des abscisses et σ selon l'axe des ordonnées, on obtient le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \sigma \\
 & & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & & 7 \\
 & & & & & 9 & 6 & 3 \\
n-p & \leftarrow & 10 & 8 & 5 & 4 & 2 & 1
\end{array}$$

La méthode employée est celle maintenant classique qui consiste à constater que les groupes de cohomologie que l'on cherche à annuler apparaissent dans une suite spectrale qui calcule la cohomologie d'un fibré en droites ample sur une variété adéquate $\mathcal{Y}$ elle-même fibrée au-dessus de X. Ce dernier groupe est nul par le théorème de Kodaira si q est suffisant ; il suffit donc de s'assurer que ces groupes "passent à travers" la suite spectrale, ce qui fait intervenir une récurrence.
Soit donc $X^n, E^e, p, q, (k_i)$ et σ_0 vérifiant les hypothèses de la proposition fixés. On va montrer l'annulation de $H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$ en supposant la proposition vraie pour tous les couples (p',σ) tels que $(n-p',\sigma) < (n-p,\sigma_0)$. Supposons la suite (k_i) croissante. Soit $r=\delta(n-p)$; soit aussi l_i et s_i les quotients et restes de la division de k_i par r : $k_i = rl_i + s_i$. Un premier lemme assure que l'on peut supposer que $e > r$ tous les l_i sont supérieurs ou égaux à

$$l_0 = \begin{cases} \frac{r\sigma_0+(n-p)}{r-1} & si \quad r > 2 \\ \sigma+1 & si \quad r=1 \end{cases}$$

Lemme 3 *Soit l un entier tel que la proposition 4 soit vraie pour une certaine valeur de $n-p$ et de σ, et pour toutes les variétés et tous les fibrés vectoriels amples, à la condition que tous les l_i soient supérieurs ou égaux à l et que $e > \delta(n-p)$. Alors cette proposition est vraie sans restrictions pour ces valeurs de e et de σ.*

Demonstration : Soit E un fibré sur une variété X et L un fibré en droites ample sur X. On peut supposer $l > \delta(n-p)$. La proposition est vraie pour $l'_i = l_i + l$ (c'est-à-dire, puisque $k'_i = rl'_i + s_i$, pour $k'_i = k_i + rl$) et les fibrés amples E' de rang supérieur à $\delta(n-p)$. Pour le fibré ample $E' = E \oplus L^{\oplus rl}$ de rang $e+rl$, et pour $k'_i = k_i + rl$, on a donc l'annulation de $H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k'_i-\alpha_i-1,k'_i}E')$ si

$$\begin{array}{rcl} q & > & [\delta(n-p)+\sigma][a(e+rl)-k'+2\sigma]-\sigma(\sigma+1) \\ & = & [\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1). \end{array}$$

Mais comme $Z^{k'_i-\alpha_i-1,k'_i}E' \supset Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E \otimes L^{\otimes rl}$, on en déduit que pour toute variété X, tous fibrés E et L, $H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E \otimes L^{\otimes arl}) = 0$ si $q > [\delta(n-p)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1)$. En vertu du lemme suivant, ce résultat reste vrai si L est trivial, et le lemme 3 est donc prouvé. •

Lemme 4 *Soient n, p, q_0, e des entiers et λ une partition tels que $H^{p,q}(X, S_\lambda E \otimes L) = 0$ pour toute variété projective lisse X de dimension n, tout fibré vectoriel ample E de rang e et tout fibré en droites ample L sur X, si $q > q_0$.*
Alors $H^{p,q}(X, S_\lambda E \otimes L) = 0$ sous les mêmes conditions, sauf que L est seulement nef.

Demonstration : La démonstration du lemme 1.5.1 p.128 dans [Man 97] est valable sous ces hypothèses. •

On suppose donc dorénavant que $l_1 \geq l_0$ et $e > r$. Si $0 < s < r < e$ sont des entiers et V un espace vectoriel de dimension e, on notera $M_{s,r}(V)$ la variété de drapeaux absolue constituée de l'ensemble des couples (V_r, V_s) de sous-espaces vectoriels de V avec

$$0 \subset V_r \subset V_s \subset V, \quad codim(V_r) = r, \quad codim(V_s) = s.$$

Soit alors $\mathcal{M}_{s,r}(E)$ la variété de drapeaux relative à E, c'est-à-dire la variété fibrée au-dessus de X dont la fibre au-dessus du point x s'identifie à la variété $M_{s,r}(E_x)$ des drapeaux de la forme

$$(0 \subset E_r \subset E_s \subset E_x), \quad codim(V_r) = r, \quad codim(V_s) = s.$$

Soit aussi $\mathcal{Q}^{l+1,l}$ le fibré en droites sur $\mathcal{M}_{s,r}(V)$ dont la fibre au-dessus du drapeau précédent s'identifie à $(\det(E_x/E_s))^{l+1} \otimes (\det(E_s/E_r))^l = \det(E/E_s) \otimes (\det(E/E_r))^l$. Considérons alors le produit au-dessus de X défini par $\mathcal{Y} := \times M_{s_i,r}(E)$ et le fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de $\mathcal{Y}$ égal au produit $\otimes \pi_i^* \mathcal{Q}_i$, si π_i désigne la projection de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{M}_{s_i,r_i}(E)$ et $\mathcal{Q}_i$ le fibré $\mathcal{Q}^{l_i+1,l_i}$ sur cette variété de drapeaux relative. Comme $e > r > s_i$ pour tout i, cette variété a bien un sens.

Laurent Manivel a étudié une partie de la cohomologie des fibrés en droites $Q^{l+1,l}$ sur une variété de drapeaux absolue, partie suffisante pour établir notre proposition. Néanmoins, j'ai besoin de généraliser ses résultats à un produit de variétés de drapeaux. Cette généralisation sera une conséquence facile de la formule de Kunneth.

Soit $M_{s,r}(V)$ une variété de drapeaux absolue et $Q^{l+1,l}$ comme précédemment. Notons $\lambda = l - 1, t(r) = \frac{r(r+1)}{2}$ et $k = rl + s$. Notons $\pi_{r,s} = \frac{s(2r-s+1)}{2}$ et pour π un entier,

$$n_s(\pi) = \#\{c \in \{0,1\}^r, |c| = s \text{ et } \sum ic_i = \pi\}$$

Ainsi $n_s(\pi) = 0$ si $\pi < 0$ ou $\pi > \pi_{r,s}$.
Alors, on a [Man 92, proposition 1.2.1, p.111 et lemme 1.3.1, p.114] :

Proposition 5 *Supposons $p = \lambda.t(r) + \pi$ avec $\pi \geq \pi_{r,s} - k + l$. Alors*

$$H^{p,q}(M_{s,r}(V), Q^{l+1,l}) = \bigoplus_{\alpha=0}^{l} n_s(\pi + r\alpha)\delta_{q,p-r\lambda-s+\alpha} Z^{k-\alpha-1,k} V.$$

Considérons maintenant un produit $Y = \times M_{s_i,r}(V)$ de variétés de drapeaux et le fibré en droites $L = \otimes \pi_i^* Q_i$, avec Q_i le fibré Q^{l_i+1,l_i} sur $M_{s_i,r}(V)$ et π_i la projection naturelle de Y sur $M_{s_i,r}$. Je propose alors la généralisation suivante de la proposition 5, si λ_i désigne $l_i - 1$, $\lambda = \sum \lambda_i$, $l = \sum l_i$, $s = \sum s_i$, et $k = \sum k_i$:

Proposition 6 *Supposons que* $p = \lambda.t(r) + \pi$ *avec* $\pi \geq \sum \pi_{r,s_i} - k + l$. *Soit* $\sigma = q + r\lambda + s - p$. *Alors*

$$H^{p,q}(Y,L) = n_s(\pi + r\sigma) \bigoplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma} \otimes_i Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V.$$

Dans cette proposition, $n_s(\pi)$ désigne le nombre

$$n_s(\pi) := \sum_{\sum \pi_i = \pi} n_{s_i}(\pi_i) = \#\{c_{i,j} \in \{0,1\}^{r^2} : \forall i \ |c_i| = s_i \text{ et } \sum_{i,j} j c_{i,j} = \pi\}.$$

Cette proposition montre que le fait qu'un groupe $\otimes_i Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V$ soit ou non dans $H^{p,q}(Y,L)$ ne dépend que de la somme σ des α_i, et non des valeurs de tous les α_i ; c'est ce qui fait que l'on obtient un théorème d'annulation où la borne ne dépend aussi que de σ.

Demonstration : On applique tout d'abord la formule de Kunneth :

$$H^{p,q}(Y,L) = \bigoplus_{\sum p_i = p, \sum q_i = q} \otimes H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1}).$$

Ecrivons chaque p_i comme $\lambda_i t(r) + \pi_i$. Si une telle suite d'entiers p_i fournit un groupe non nul, alors par la proposition 5, on a pour tout i la relation $\pi_i \leq \pi_{r,s_i}$. Si donc il existe i tel que $\pi_i < \pi_{r,i} - k_i + l_i$, comme $\pi = \sum \pi_i$, on en déduit que $\pi < \sum \pi_{r,i} - k + l$, ce qui contredit l'hypothèse de la proposition. Ainsi, pour tout i on a $\pi_{r,s_i} - k_i + l_i \leq \pi_i \leq \pi_{r,s_i}$, et donc on peut en déduire par la proposition 5 que

$$H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1}) = \oplus_{\alpha_i} n_s(\pi_i + r\alpha_i) \delta_{q_i, p_i - r\lambda_i - s_i + \alpha_i} Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V.$$

Si donc $\otimes_i Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V$ apparaît dans notre groupe de cohomologie, cela implique que $q_i = p_i - r\lambda_i - s_i + \alpha_i$, et par sommation que $q = p - r\lambda - s + \sigma$. Enfin, la multiplicité de ce groupe est bien la somme sur les π_i des produits des multiplicités de $Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V$ dans $H^{p_i,q_i}(M_{s_i,r}, Q^{l_i,l_i+1})$, soit $n_s(\pi)$. •

Notons $P_{\max} = \lambda.t(r) + \sum \pi_{r,s_i}$ et $Q_{\max} = \lambda.t(r-1) + \sum \pi_{r,s_i} - S$. Une conséquence de la proposition 6 est :

Proposition 7 *Soit* p *et* q *deux entiers. Alors :*
- *Si* $p > P_{max}$ *ou* $q > Q_{max}$, *alors* $H^{p,q}(Y,L) = 0$.
- *Si* $p \geq P_{max} - r\sigma$ *ou* $q \geq Q_{max} - (r-1)\sigma$, *alors*

$$H^{p,q}(Y,L) \subset \bigoplus_{\sum \alpha_i \leq \sigma} \otimes_i Z^{k_i - \alpha_i - 1, k_i} V.$$

On considère maintenant la fibration en variétés de drapeaux $\pi : \mathcal{Y} \to X$ introduite précédemment. Soit ${}^{P}E_m^{i,j}$ la suite spectrale de Borel-Le Potier, avec $P = p + P_{\max} - r\sigma_0$. Le résultat souhaité va être conséquence de propriétés de cette suite spectrale. La première exhibe un terme de la suite spectrale de Borel-Le Potier qui contient le groupe que l'on veut annuler :

Lemme 5 *Soit $q_0 = Q_{max} - (r-1)\sigma_0$. Alors*

$$ {}^{P}E_1^{p,q+q_0-p} \supset H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E). $$

Demonstration : Comme on a supposé que $l_1(r-1) \geq r\sigma_0 + (n-p)$, on a

$$ \begin{array}{rcl} n + P_{\max} - k_1 + l_1 & = & n + P_{\max} - l_1(r-1) - s_1 \\ & \leq & n + P_{\max} - r\sigma_0 - (n-p) \\ & = & P_{\max} + p - r\sigma_0 = P. \end{array} $$

Ainsi, si $p \leq n$, alors $P - p \geq P - n \geq P_{\max} - k_1 + l_1$. Si $p > n$, il est clair que ${}^{P}E_1^{p,q+q_0-p} = 0$. On peut donc utiliser les propositions 6 et 7 pour obtenir des renseignements sur les $H^{P-p,q'}(Y, L)$ pour tous q'. Pour tous les entiers q_1 et q_2, on a (cf notation 3)

$$ {}^{P,p}E_2^{q_1,q_2} = H^{p,q_1}[X, R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}]. $$

Si $f_{i,j}$ sont les applications de changement de cartes de E, on a vu que $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de fibre type $H^{P-p,q_2}(Y, L)$ (soit $x \in X$; $Y = \pi^{-1}(x)$ et L est la restriction du fibré en droites $\mathcal{L}$ à Y), et dont les changements de carte sont induits par $f_{i,j}$. Supposons que $H^{P-p,q_2}(Y, L) = S_\lambda E_x$. Nous savons que $|\lambda| = \sum r l_i + s_i$. On en déduit donc que pour $g \in GL(E_x)$, l'application induite par g sur $H^{P-p,q_2}(Y, L)$ est $S_\lambda g$. En effet, c'est vrai $g \in SL(E_x)$ par le théorème de Bott et pour g une homothétie, puisque l'application induite par $\lambda.Id$ est $\lambda^{\sum r l_i + s_i}$ (l'action de $\lambda.Id$ sur le fibré tangent est triviale).
Les applications de changement de cartes de $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L}$ sont donc les applications $S_\lambda f_{i,j}$, si $f_{i,j}$ est une application de changement de cartes de E. On a donc $R^{P-p,q_2}\pi_*\mathcal{L} = S_\lambda E$.

Or $H^{P-p,q_0}(Y, L) = \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$. En effet, si un terme de la forme $\oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V$ est une composante de ce groupe, alors on doit avoir $\sigma = q_0 + rL + S - (P-p) = \sigma_0$. Par ailleurs, il est clair que $n_s(\sum \pi_{r,s_i}) = 1$. On en déduit donc que ${}^{P,p}E_2^{q,q_0} = H^{p,q}(X, \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$.
Par ailleurs, si $q_2 > q_0$ et q_1 est quelconque, alors la proposition 7 montre que ${}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2} = 0$. Enfin, si $q_1 > q$ et $q_2 < q_0$, et si $H^{p,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) \subset {}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2}$, alors on a $\sigma < \sigma_0$ et $H^{p,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i : \sum \alpha_i = \sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0$ par l'hypothèse de récurrence.

Toutes les différentielles d_m issus de ou aboutissant sur ${}^{P,p}E_m^{q_0,q}$ sont donc nulles, et ${}^{P,p}E_\infty^{q_0,q} = H^{p_1,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma_0} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$, ce qui implique notre lemme. •

Pour vérifier que ce groupe passe à travers la suite spectrale de Borel-Le Potier, il suffit de montrer l'annulation des groupes ${}^{P}E_1^{p+m,q-p-m+\mathrm{sgn}(m)+q_0}$, pour tous les entiers m non nuls. Soit donc m un tel entier et p_1, q_1 et q_2 des entiers tels que ${}^{P,p_1}E_\infty^{q_1,q_2}$ soit un élément d'une filtration de ${}^{P}E_1^{p+m,q-p-m+\mathrm{sgn}(m)+q_0}$, c'est-à-dire des entiers tels que :
$p_1 = p+m$ et $q_1+q_2-p_1 = q-p-m+\mathrm{sgn}(m)+q_0$. Remarquons que de manière équivalente, on a $p_1 = p+m$ et $q_1+q_2 = q+q_0+\mathrm{sgn}(m)$.
De nouveau, il suffit de montrer que tous les groupes ${}^{P,p_1}E_2^{q_1,q_2}$ sont nuls. Or ceux-ci valent $H^{p_1,q_1}[X, H^{P-p_1,q_2}(\mathcal{Y},\mathcal{L})]$. Supposons que

$$\oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}V \subset H^{P-p_1,q_2}(Y,L).$$

Alors par la proposition 7, $P-p_1 \leq P_{\max} - r\sigma = (P-p) - r(\sigma-\sigma_0)$, donc $p_1 \geq p + r(\sigma-\sigma_0)$, soit $m \geq r(\sigma-\sigma_0)$. Par ailleurs cette même proposition assure que $q_2 \leq Q_{\max} - (r-1)\sigma = q_0 - (r-1)(\sigma-\sigma_0)$.
L'égalité $q_1+q_2 = q+q_0+\mathrm{sgn}(m)$ donne alors $q_1 \geq q+\mathrm{sgn}(m)+(r-1)(\sigma-\sigma_0)$.
Notons $\mu = \sigma-\sigma_0$, comme nous avons vu que $m \geq r\mu$, $\mathrm{sgn}(m) \geq \mathrm{sgn}(\mu)$ et nous avons donc établi :

$$\begin{gathered}\sigma = \sigma_0 + \mu \\ p_1 \geq p + \mu r \\ q_1 \geq q + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu.\end{gathered}$$

Sous ces hypothèses, il ne nous reste plus, en utilisant l'hypothèse de récurrence, qu'à prouver l'annulation de $H^{p_1,q_1}(X, \oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)$. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que $ae-k+\sigma \leq 0$, car sinon $\oplus_{\alpha_i:\sum \alpha_i=\sigma} \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E = 0$.

Lemme 6 *Dans l'ensemble ordonné $\mathcal{N}$, on a :* $(n-p_1,\sigma) < (n-p,\sigma_0)$

Demonstration : Cet ordre étant croissant selon les deux coordonnées (c'est-à-dire que si $x \leq x', y \in \mathbb{N}$, alors $(x,y) \leq (x',y)$ et $(y,x) \leq (y,x')$), cela découle du lemme 2. •

Lemme 7 *Si $q > Q(p,\sigma_0)$ alors $q_1 > Q(p_1,\sigma)$.*

Demonstration : On peut supposer que $p_1 = p+\mu r$ et $q_1 = q+\mu(r-1)+\mathrm{sgn}(\mu)$. Calculons alors $Q(p,\sigma_0) - Q(p+\mu r, \sigma_0+\mu) + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu$. Cette quantité vaut :
$2\mu r + 2\mu\sigma_0 + \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu) + (r+\sigma_0)(ae-k+2\sigma_0) - [\delta(n-p-\mu r)+\sigma_0+\mu][ae-k+2\sigma_0+2\mu]$. En remarquant que $2\mu r + 2\mu\sigma_0 = 2\mu(r+\sigma_0)$ et en factorisant par $r+\sigma_0$, on en déduit que cette quantité égale

$(ae-k+2\sigma_0+2\mu)(r+\sigma_0)-(ae-k+2\sigma_0-2\mu)[\delta(n-p+\mu r)+\sigma_0-\mu]+\mu^2+\mathrm{sgn}(\mu)$, soit $(ae-k+2\sigma)[r+\mu-\delta(r+\mu r)]+\mu^2+\mathrm{sgn}(\mu)$.
Comme $ae-k+\sigma \geq 0$, il découle de la définition de δ que ce nombre est positif. $\bullet$

Enfin, on a l'inégalité suffisante pour assurer que ${}^{P}E_{\infty}^{p,q-p+q_0}=0$:

Lemme 8 *On a $P+q+q_0-\dim\mathcal{Y}>0$.*

Demonstration : Tout d'abord,

$$2\sum \pi_{r,s_i} - S = 2rS + S - \sum s_i^2 - S \geq rS \text{ et } k=(L+a)r+S.$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rl} & P+q+q_0-\dim\mathcal{Y} \\ = & p+q+Lt(r)+Lt(r-1)+2\sum\pi_{r,s_i}-S-(2r-1)\sigma_0-n-ar(e-r) \\ \geq & \sigma_0(ae-k+\sigma_0) \end{array}$$

$\bullet$

Nous avons ainsi (péniblement) achevé la preuve de la proposition 4. Nous allons maintenant montrer une autre proposition qui rétablit la symétrie entre p et q :

Proposition 8 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X projective lisse et de dimension n. Soit $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i<k_i$; soit $\sigma=\sum\alpha_i$ et $k=\sum k_i$, alors*

$H^{p,q}(X,\otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)=0$ *si* $p>n-q+[\delta(n-q)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1)$.

Demonstration : Posons $P(q,\sigma)=n-q+[\delta(n-q)+\sigma][ae-k+2\sigma]-\sigma(\sigma+1)$. La démonstration est très similaire à celle de la proposition 4. En effet, soit $r=\delta(n-q)$ et comme précédemment $\mathcal{Y}:=\times M_{s_i,r}(E)$ et le fibré en droites $\mathcal{L}$ au-dessus de $\mathcal{Y}$ égal au produit $\otimes\pi_i^*\mathcal{Q}_i$, où l_i et s_i sont le quotient et le reste de la division euclidienne de k_i par r et $\mathcal{Q}_i=\mathcal{Q}^{l_i,l_i+1}$. Soit aussi $p+P_{max}-r\sigma_0$, le lemme 5 reste vrai et pour voir que ce groupe passe à travers la suite spectrale, il suffit comme précédemment de montrer en utilisant l'hypothèse de récurrence que si

$$\begin{gathered} \sigma=\sigma_0+\mu \\ p_1\geq p+\mu r \\ q_1\geq q+\mathrm{sgn}(\mu)+(r-1)\mu, \end{gathered}$$

alors $H^{p_1,q_1}(X,\oplus_{\alpha_i:\sum\alpha_i=\sigma}\otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E)=0$.
Ceci découle du fait que le lemme 8 reste vrai et que l'on a l'analogue des lemmes 6 et 7 :

Lemme 9 *Dans l'ensemble ordonné $\mathcal{N}$, on a : $(n-q_1,\sigma)<(n-q,\sigma_0)$.*

Demonstration : On peut aussi supposer que $q_1 = q + \mathrm{sgn}(\mu) + (r-1)\mu$ et $\sigma = \sigma_0 + \mu$. Alors si $\mu < 0$, $q_1 \geq q + r\mu$ et le lemme 2 s'applique. Si $\mu = 1$, ce même lemme fonctionne car $q_1 = q + r$. Pour $\mu > 1$, en posant $x = n - (q+r)$, ce lemme donne $(n-(q+r)-(\mu-1)\delta(n-(q+r)), \sigma+\mu) < (n-(q+r), \sigma+1)$. Comme $\delta(n-(q+r)) \leq \delta(n-q)-1$, on a $(n-(q+r)-(\mu-1)(r-1), \sigma+\mu) < (n-(q+r), \sigma+1)$.L'égalité $n-q_1 = n-q-1-\mu(r-1) = n-(q+r)-(\mu-1)(r-1)$ donne alors $(n-q_1, \sigma) < (n-q, \sigma_0)$, et le lemme est démontré. •

Lemme 10 *Si $p > P(q, \sigma_0)$ alors $p_1 > P(q_1, \sigma)$.*

Demonstration : On peut supposer que $p_1 = p + \mu r$ et $q_1 = q + \mu(r-1) + \mathrm{sgn}(\mu)$. Calculons alors $P(q, \sigma_0) - P(q + \mu(r-1) + \mathrm{sgn}(\mu), \sigma_0 + \mu) + \mu r$. Cette quantité vaut :

$$\begin{gathered} 2\mu r + 2\mu\sigma_0 + \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu) + (r+\sigma_0)(ae - k + 2\sigma_0) \\ -[\delta(n - q - \mathrm{sgn}(\mu) - \mu(r-1)) + \sigma_0 + \mu][ae - k + 2\sigma_0 + 2\mu]. \end{gathered}$$

En remarquant que $2\mu r + 2\mu\sigma_0 = 2\mu(r+\sigma_0)$ et en factorisant par $r + \sigma_0$, on voit que cette quantité égale

$$\begin{gathered} \mu^2 + \mathrm{sgn}(\mu) + (ae - k + 2\sigma_0 + 2\mu)(r + \sigma_0) \\ -(ae - k + 2\sigma_0 + 2\mu)[\delta(n - q - \mathrm{sgn}(\mu) - \mu(r-1)) + \sigma_0 + \mu], \end{gathered}$$

soit $(ae - k + 2\sigma)[r - \mu - \delta(n - q - \mathrm{sgn}(\mu) - \mu(r-1))] + \mu^2 - \mathrm{sgn}(\mu)$.
Comme $ae - k + \sigma \geq 0$ et que le lemme 9 implique
$\delta(n - q - \mathrm{sgn}(\mu) - \mu(r-1)) + \mu \leq \delta(n-q) = r$, ce dernier nombre est donc positif. •

On peut maintenant regrouper les propositions 4 et 8 sous la forme du

Theoreme 2 *Soit E un fibré ample de rang e sur une variété X de dimension n, $a \in \mathbb{N}$, $(k_i)_{1\leq i\leq a}$ et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq a}$ des entiers tels que $\alpha_i < k_i$; soit $\sigma = \sum \alpha_i$ et $k = \sum k_i$, alors*

$$\begin{gathered} H^{p,q}(X, \otimes_i Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i}E) = 0 \\ \textit{si} \\ p + q > n + [\min[\delta(n-p), \delta(n-q)] + \sigma][ae - k + 2\sigma] - \sigma(\sigma+1). \end{gathered}$$

4 Resultats topologiques en petit co-rang

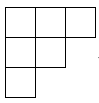
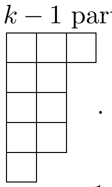
4.1 Resultats topologiques

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du

THEOREME 3 *Soit E un fibré vectoriel de rang e, sur une variété X lisse, projective et de dimension n. Supposons que E est muni d'une forme quadratique à valeurs dans un fibré en droites L. Soit k un entier et supposons que*
– $\dim D_k(E) = \rho := n - t(e-k)$.
– $S^2E^* \otimes L$ *est ample.*
– $e - k \leq 4$.
Alors, l'application de restriction $H^q(X, \mathcal{O}_X) \to H^q(D_k(E), \mathcal{O}_{D_k(E)})$ est un isomorphisme pour $0 \leq q < \rho - 1$, et est injective pour $q = \rho - 1$.

DEMONSTRATION : Notons $D := D_k(E)$. Tout d'abord, il existe une résolution du faisceau $\mathcal{O}_D$ sur $\mathcal{O}_X$ par des fibrés vectoriels : le i-ième terme R^i d'une telle résolution est donné par

$$R^i := \bigoplus_{\substack{\lambda = (2l, \mu, \mu^*) \\ |\mu| + l(2l-1) = i}} S_{\lambda(k-1)} E \otimes L^{-l(2l+k-1)}.$$

Dans cette formule, l'expression $\lambda = (2l, \mu, \mu^*)$ signifie que la partition λ est de rang $2l$, que $\lambda_i = 2l + \mu_i$ si $1 \leq i \leq 2l$ et $\lambda_{i+2l} = \mu_i^*$. Si λ est une partition, $\lambda(k-1)$ est obtenue en intercalant $k-1$ parts égales au rang de λ à λ : si par exemple $\lambda =$ , alors $\lambda(2) =$ . Si $k = 0$, alors $(2l, \mu, \mu^*)(-1)$ est la partition ν telle que $\nu_i = 2l + \mu_i$ pour $1 \leq i \leq 2l-1$, $\nu_{2l} = \mu_1^* + \mu_{2l}$, et $\nu_{2l-1+i} = \mu_i^*$ pour $i \geq 2$.

L'existence de cette résolution, bien connue des spécialistes, peut se justifier de la façon suivante : soit Y l'espace total du fibré $S^2E^* \otimes L$ et $D \subset Y$ le schéma des formes symétriques de rang au plus k. Par [JPW 81, théorème 3.19, p.139] et [Nie 81], on a une résolution de $\mathcal{O}_D$ par des $\mathcal{O}_Y$-modules localement libres analogue à celle que j'ai décrite. La section s de $S^2E^* \otimes L$ induit un morphisme $X \to Y$ et, comme l'explique Nielsen [Nie 81], on peut tirer en arrière cette résolution pour obtenir la résolution de $\mathcal{O}_{D_k(E)}$ souhaitée. Pour cela, il suffit en effet d'annuler les faisceaux $\underline{Tor}_i^Y(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X)$ pour $i > 0$, ce qui résulte d'une version du corollaire 1.10 de [PS 73], où l'on peut remplacer, avec leurs notations, l'hypothèse $prof(B_{\mathfrak{p}}) \geq prof(A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})})$ par l'hypothèse $prof(B_{\mathfrak{p}}) \geq dp_A(M)$. Pour annuler $\underline{Tor}_i^Y(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X)$, on applique ce corollaire à $Spec(B)$ un ouvert affine de X trivialisant $S^2E^* \otimes L$, $Spec(A) \subset Y$ l'image réciproque de $Spec(B)$ par la projection $Y \to X$ et M le A-module définissant le faisceau $\mathcal{O}_D$ sur $Spec(A)$. Pour tout idéal $\mathfrak{p} \subset B$ correspondant à un point du support de $M \otimes_A B$, on a $prof(B_{\mathfrak{p}}) \geq t(e-k)$, puisque X est supposée lisse et $\dim D_k(E) = n - t(e-k)$. L'hypothèse $prof(B_{\mathfrak{p}}) \geq dp_A(M)$ est donc bien vérifiée.

Convenons qu'une partition λ de la forme $(2l,\mu,\mu^*)(k-1)$ sera dite $(k-1)$-*symétrique* (si $k-1=0$, ceci signifie que $\lambda^*=\lambda$). Si λ est $(k-1)$-symétrique, notons $i(\lambda,k)$ l'entier tel que $S_\lambda E^* \otimes L^{-l(2l+k-1)} \subset R^{i(\lambda,k)}$.

En utilisant cette résolution, il est facile de montrer que le théorème 3 est conséquence de la proposition suivante (cet argument est par exemple expliqué dans [Man 97]) :

Proposition 9 *Soit F un fibré vectoriel ample de rang e sur une variété X projective lisse de dimension n. Soit k un entier tel que $0 < e-k \leq 4$ et λ une partition $(k-1)$-symétrique. Alors, $H^{n,q}(X,S_\lambda F)=0$ si $q > t(e-k)+1-i(\lambda,k)$.*

Demonstration : Puisque $e-k \leq 4$, le rang $2l$ d'une partition $(k-1)$-symétrique et de longueur inférieure ou égale à e est nécessairement inférieur ou égal à 4 ; on a donc $l=1$ ou $l=2$. Les partitions obtenues avec $l=2$ ne nous posent pas de problème, car le théorème A' de [Man 97] donne la borne $10-i$. Il suffit donc de traiter le cas $l=1$.
Pour simplifier les notations, j'ai supposé, dans le tableau suivant, que de plus $k=1$, et l'ai listé toutes les partitions λ à considérer, et indiqué, en face, l'entier q_0 tel que si $q > q_0$, alors $H^{n,q}(X,S_\lambda E)=0$ pour tout fibré E ample de rangs 4 et 5. La dernière colonne indique le numéro du lemme qui montre l'annulation du groupe de cohomologie pour la borne indiquée. L'indication A' renvoie au théorème A' de [Man 97]. La colonne intermédiaire indique la valeur $t(e-k)+1-i$ de q_0 maximale pour montrer le théorème 3. Lorsque k prend d'autres valeurs que 1 mais que $e-k$ reste égal à 3 ou 4, puisque les lemmes indiqués donnent une borne qui ne dépend que de $e-k$, on obtient encore la proposition 9.

$rang(E) = 4$

partition	q_0	7-i	lemme
$\ydiagram{2,2}$	4	6	A'
$\ydiagram{3,2,1}$	5 4	5	11 12
$\ydiagram{3,3,2}$	4	4	15
$\ydiagram{4,2,1,1}$	2	4	A'
$\ydiagram{4,4,2,2}$	0	2	A'
$\ydiagram{4,3,2,1}$	2	3	17

$rang(E) = 5$

partition	q_0	11-i	lemme
$\ydiagram{5,5,2,2,2}$	0	4	A'
$\ydiagram{5,2,1,1,1}$	3	7	A'
$\ydiagram{2,2}$	6	10	A'
$\ydiagram{3,2,1}$	8	9	11
$\ydiagram{5,4,2,2,1}$	4 3	5	13 14
$\ydiagram{3,3,2}$	8	8	15
$\ydiagram{4,2,1,1}$	8	8	15
$\ydiagram{4,4,2,2}$	6	6	16
$\ydiagram{5,3,2,1,1}$	4	6	17
$\ydiagram{4,3,2,1}$	7 6	7	19 20

4.2 Theoremes d'annulation

Dans ce paragraphe, je montre les lemmes annoncés dans le précédent. Soit X une variété projective lisse de dimension n, E un fibré ample de rang e sur X, et L un fibré en droites nef.
Pour des raisons qui sont expliquées après le lemme 13, je note $\lambda = [a,b,c,d]$ la partition de rang 2 telle que $\lambda_1 = a+2, \lambda_2 = b+2, \lambda_1^* = e-c, \lambda_2^* = e-d$. Par exemple, $S_{[0,0,0,0]}E = (\det E)^2$. De même, je note $\lambda = [a,b]$ la partition de rang 1 telle que $\lambda_1 = a+1$ et $\lambda_1^* = e-b$. Par la suite, $a \leq b, c \leq d, t, q$ sont des entiers positifs ou nuls.

Lemme 11
$$\begin{array}{lll} H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) & = 0 & \textit{si } q > 2c+d+2, \ \textit{et} \\ H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) & = 0 & \textit{si } q > 2c+d+1. \end{array}$$

Remarque : Le théorème 2 donne la borne $2c+2d+2$ au lieu de $2c+d+2$ et les autres résultats que je connais ont une borne qui dépend de k (par exemple, [Man 97, théorème A] donne la borne $k+c+d$) ; il est clair que pour démontrer le théorème 3 par cette méthode, il faut une borne indépendante de k.
Demonstration : Pour montrer ce lemme, je vais appliquer la technique, nouvelle à ma connaissance, de "comparaison de suites spectrales".
Tout d'abord, on peut supposer que $e-c$ est pair. En effet, supposons que ce lemme est vrai pour $e-c$ pair. Si $e-c$ est impair et M est un fibré en droites ample sur X, alors on peut considérer le fibré vectoriel $E \oplus M$ de rang $e+1$; comme $e+1-c$ est alors pair, on peut appliquer le lemme, et comme pour le lemme 3, on en déduit que $H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c+d+2$ et $H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c+d+1$.
Soit alors un entier l tel que $e-c = 2l$. Considérons d'abord la variété $Y = \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, notons $\pi : Y \to X$ la projection naturelle, et considérons le fibré en droites $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2l, e-d) \otimes \pi^* L^t$ sur Y. Comme $\mathcal{O}(2l, e-d)$ est ample (en effet, E est ample) et $\pi^* L$ nef, $\mathcal{L}$ est ample. Soit aussi $P = n+(2l-1)+(e-d-1)-1$. Déterminons les groupes ${}^{P,t}E_2^{i,j}$ de la suite spectrale de Leray introduite au paragraphe 2. Ceux-ci valent, par la formule (2), $H^{t,i}[X, R^{P-t,j}\pi_* \mathcal{O}(2l, e-d) \otimes L^t]$. Ces groupes sont donc nuls si $t > n$ ou $P - t > (2l-1) + (e-d-1)$. En effet, si V est un espace vectoriel fixé et l et m sont des entiers positifs, alors $H^{i,j}[\mathbb{P}V, \mathcal{O}(l)] = 0$ si $i \geq l$ (conséquence directe de la proposition 1), et donc $H^{i,j}[\mathbb{P}V \times \mathbb{P}V, \mathcal{O}(l,m)] = 0$ si $i \geq l+m$ (formule de Künneth). Les seules valeurs possibles sont donc $t = n$ ou $t = n-1$, et on a

$$\begin{array}{rcl} {}^{P,n-1}E_2^{i,0} & = & H^{n-1,i}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t), \quad \text{et} \\ {}^{P,n}E_2^{i,0} & = & H^{n,i}(X, L^t \otimes R^{(2l-1)+(e-d-1)-1,0}\pi_* \mathcal{O}(2l, e-d)) \\ & = & H^{n,i}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \\ & \oplus & H^{n,i}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t). \end{array}$$

Ces suites spectrales sont donc dégénérées, et on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} {}^{P}E_1^{n-1,q-n+1} & = & H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t), \\ {}^{P}E_1^{n,q-n} & = & H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,d]}E \otimes L^t) \\ & \oplus & H^{n,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[1,d+1]}E \otimes L^t), \end{array}$$

et les autres termes sont nuls. Par ailleurs, ${}^{P}E_{\infty}^{p,q-p}$ est une composante de $H^{P,q}(X,\mathcal{L})$; il est donc nul par le théorème de Kodaira si

$$P+q>n+2(e-1),\ \text{soit}\ q>n+2(e-1)-P=c+d+1.$$

On en déduit donc que dans ce cas, la flêche connectant ${}^{P}E_1^{n-1,q-n+1}$ et ${}^{P}E_1^{n,q-n+1}$ est un isomorphisme, ce qui conduit à :

$$\begin{array}{rl} & H^{n-1,q}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t)\\ = & H^{n,q+1}(X,S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t)\\ \oplus & H^{n,q+1}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[1,d+1]}E\otimes L^t)\ \text{si}\ q>c+d+1. \end{array}$$

En considérant une autre suite spectrale, on va obtenir une autre égalité faisant intervenir ces termes ; en comparant ces égalités, on prouvera qu'ils sont nuls. Soit donc maintenant $Y=G_2(E^*)\times_X\mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{L}=\mathcal{O}(l,e-d)$ sur Y, et posons $P=n+3(l-1)+(e-d-1)-1$. On a alors de façon similaire ${}^{P}E_1^{n-1,q-n+l}=H^{n-1,q}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t)$, mais par contre, ${}^{P}E_1^{n,q-n+l-1}=H^{n,q}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[1,d+1]}E\otimes L^t)$. Ceci conduit à l'égalité

$$\begin{array}{rcl} H^{n-1,q}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t) & = & H^{n,q+1}(X,S_{[0,c]}E\otimes S_{[1,d+1]}E\otimes L^t)\\ & \text{si} & q>2c+d+1. \end{array}$$

En comparant ces égalités, on obtient

$$H^{n,q}(X,S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t)=0,$$

soit la première affirmation du lemme. En utilisant la règle de Littlewood-Richardson, on va montrer l'autre résultat du lemme. En effet, rappelons que $c\le d$; si $c=d$, on peut conclure ; supposons donc $c<d$. Cette règle implique que

$$\begin{array}{rcl} S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,d]}E & = & \bigoplus_{0\le x\le c+1}S_{[1,0,x,d+c+1-x]}E\bigoplus R_1\\ S_{[0,c]}E\otimes S_{[1,d+1]}E & = & \bigoplus_{0\le x\le c}S_{[1,0,x,c+d+1-x]}E\bigoplus R_2, \end{array}$$

où R_1 et R_2 sont des sommes de composantes de type $S_{[0,0,x,y]}$, que l'on sait déjà annuler. L'annulation de la cohomologie de $S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,d]}E\otimes L^t$ entraine donc celle de $S_{[0,c]}E\otimes S_{[1,d+1]}E\otimes L^t$, et le lemme est alors conséquence d'une des égalités démontrées.

•

Notons que ce lemme montre par exemple $H^{n,q}(X,S_{[1,0,c,c+1]}E)=0$ si $q>3c+2$, car $S_{[1,0,c,c+1]}E\subset S_{[1,c+1]}E\otimes S_{[0,c]}E$. Ce n'est pas la borne indiquée dans le tableau p. 517. En effet, pour cette partition particulière, on peut un peu raffiner le raisonnement précédent. Auparavant, je souhaite faire une remarque d'ordre général qui allègera les calculs.

En généralisant le raisonnement utilisé pour le lemme précédent, on voit que l'on obtient simultanément l'annulation de $H^{p_1,q}(X,S_{\lambda_1}E)$ et celle de

$H^{p_2,q}(X, S_{\lambda_2}E)$; supposons que $p_1 < p_2$: la borne q_1 obtenue pour le groupe $H^{p_1,q}(X, S_{\lambda_1}E)$ est la différence entre la dimension de Y et la somme $i+j+p_1$, où i et j sont les entiers tels que si V est un espace vectoriel fixé, Y_V la fibre de la projection $Y \to X$, et $\mathcal{L}_V$ la restriction du fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une telle fibre, alors $H^{i,j}(Y_V, \mathcal{L}_V) = S_\lambda V$. La borne q_2 pour $H^{p_2,q}(X, S_{\lambda_2}E)$ vaut $q_1 + t$, où t est l'entier tel que les flêches de la suite spectrale connectent $H^{p_1,q}(X, S_{\lambda_1}E)$ et $H^{p_2,q+t}(X, S_{\lambda_2}E)$. Attention, cette recette n'est bien sûr valable que si aucun autre terme de la suite spectrale ne vient compenser les termes que l'on veut annuler. Par ailleurs, on peut facilement exprimer cette différence :

Remarque 4 *Une suite spectrale donnée par un fibré en droites sur $G_r(E^*) \times_X G_s(E^*)$ peut montrer l'annulation de $H^{p,q}(X, S_{[a,b]}E \otimes S_{[c,d]}E \otimes L^t)$ pour $q > (r-1)a + rb + (s-1)c + sd$.*

Demonstration : En effet, comme je l'ai expliqué, il s'agit d'évaluer la différence entre $\dim G_r(V)$ et $i + j$, où i et j sont les entiers tels que $H^{i,j}(G_r(V), \mathcal{O}(l)) = S_{[a,b]}V$. Cette différence vaut $ra + (r-1)b$, car $i = (l-1)t(r) - ar, j = (l-1)t(r-1) - a(r-1)$, et $\dim V = rl - a + b$. •

Dans le lemme qui suit, je traite des partitions qui sont un cas particulier de celles traitées par le lemme 11 ; pour ces partitions particulières, je peux réduire de 1 la borne donnée par le lemme 11.

Lemme 12 *Supposons $c > 0$.*

$$\begin{array}{lll} H^{n,q}(X, S_{[1,0,c+1,c]}E \otimes L^t) & = 0 & \textit{si } q > 3c+1, \textit{ et} \\ H^{n-1,q}(X, S_{[0,0,c,c]}E \otimes L^t) & = 0 & \textit{si } q > 3c. \end{array}$$

Demonstration : Tout d'abord, on peut supposer que $e - c$ est impair et $e - c >> 0$. Dans la démonstration du lemme 11, j'ai montré comment tenir compte de L^t ; pour alléger les notations, je suppose dorénavant que $t = 0$.
Soit alors l un entier tel que $e - c = 2l + 1$. Considérons d'abord la variété $Y = \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, et le fibré $\mathcal{O}(2l+1, 2l+1)$ sur Y. Comme dans la démonstration du lemme précédent, on montre que

$$2H^{n,q+1}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,c]}) = H^{n-1,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q > 2c+1.$$

Soit maintenant $\mathcal{O}(2l, l+1) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$. On a alors de façon similaire $H^{n,q+1}(X, S_{[1,c+2]}E \otimes S_{[0,c-1]}E) = H^{n-1,q}(X, S_{[0,c+1]}E \otimes S_{[0,c-1]}E)$ si $q > 3c$. Par la règle de Littlewood-Richardson, $S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,c]}E = S_{[1,c+2]}E \otimes S_{[0,c-1]}E \oplus S_{[1,0,c,c+1]}E$ (à des termes de type $S_{[0,0,x,y]}E$ près), et $S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,c]}E = S_{[0,c-1]}E \otimes S_{[0,c+1]}E \oplus S_{[0,0,c,c]}E$.
Je donne maintenant une dernière égalité faisant intervenir les groupes $H^{n,q+1}(X, S_{[1,0,c,c+1]}E)$ et $H^{n-1,q}(S_{[0,0,c,c]}E)$, qui permettra de conclure. Considérons $\mathcal{O}(e-c) \to G_2(E^*)$. La proposition 1 montre que toute partition λ, de taille au plus $(e-2) \times 2$ et $(e-c)$-admissible, vérifie soit

$\lambda_1, \lambda_2 \leq e - c - 2$, soit $\lambda_1 = \lambda_2 + e - c - 1$. Dans le deuxième cas, on a $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 \leq [e-2-(e-c-1)] + [e-2] = e+c-3$. Par contre, la partition $(e-c-2, e-c-2)$ est de poids $2(e-c-2)$. Il est clair qu'à c fixé, si e est grand, le poids de cette partition est strictement supérieur à toute constante plus le poids d'une partition du deuxième type. Quitte à augmenter e, on peut donc faire comme si seules les partitions du premier type intervenaient. En posant $P = n + 2(e-c-2) - 1$, on montre alors que

$$H^{n,q+1}(X, S_{[1,0,c,c+1]}E) = H^{n-1,q}(X, S_{[0,0,c,c]}E) \text{ si } q > 2c+1.$$

Les trois égalités montrent que si $q > 3c$, alors $H^{n,q+1}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[0,c]}E) = 0$. La première implique alors le reste du lemme. •

Lemme 13

$$\begin{array}{rcll} H^{n,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[b+1,1]}E \otimes L^t) & = & 0 & \textit{si } q > a+2, \textit{ et} \\ H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]} \otimes S_{[b,0]}E \otimes L^t) & = & 0 & \textit{si } q > a+1. \end{array}$$

Remarque : Ce lemme me donne l'occasion de justifier mes notations. Les partitions les plus faciles à traiter sont celles qui correspondent à une puissance du déterminant : en effet, puisque $(\det E)^l$ est ample pour tout l, le théorème de Kodaira donne directement que $H^{p,q}(X, (\det E)^l) = 0$ si $p + q > n$. Lorsqu'on s'écarte de cette partition, je vais expliquer qu'il existe une symétrie entre le fait d'allonger les premières parts et le fait de creuser le bas de la partition. Autrement dit, dans la notation $\lambda = [a, b, c, d]$, a et c, et b et d, jouent des rôles symétriques. On peut d'ailleurs remarquer que le théorème 2 n'échappe pas à ce principe : si l'on note $r = \min\{\delta(n-p), \delta(n-q)\}$, alors la borne vaut $q_0 = n - p + (r+\sigma)(ae - k + 2\sigma) - \sigma(\sigma+1)$. Or, avec mes notations, on a $Z^{k_i-\alpha_i-1,k_i} = [\alpha_i, e - k_i + \alpha_i]$. Notons $\beta_i = e - k_i + \alpha_i$; on a $ae - k + \sigma = \sum_i (e - k_i + \alpha_i) = \sum_i \beta_i =: \tau$. Ainsi, on a donc

$$q_0 = n - p + (r+\sigma)(\tau+\sigma) - \sigma(\sigma+1) = n - p + r(\sigma+\tau) + \sigma(\tau-1). \quad (3)$$

On voit bien que cette formule est symétrique en σ et τ (-1). Le lecteur intrigué pourra s'amuser de constater que la démonstration du théorème 2 fonctionne de façon tout à fait similaire si l'on fait jouer par τ le rôle joué par σ, et donne le même résultat. Il est vraisemblable que le démonstration de théorèmes d'annulation efficaces pour des partitions de rang strictement supérieur à 1 utilise une récurrence qui fasse intervenir de façon combinée σ et τ.
Le lemme 13, pour cette symétrie, est le symétrique du lemme 11 ; il se démontre de façon tout à fait similaire :
Demonstration : On se ramène comme précédemment au cas $e+a$ pair, puis on considère le fibré en droites $\mathcal{O}(e+a, e+b)$ sur $\mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, et le fibré en droites $\mathcal{O}(e+b, \frac{e+a}{2})$ sur $\mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$. On utilise aussi, comme pour démontrer le lemme 11, la règle de Littlewood-Richardson. En tenant compte de la remarque 4, on trouve ainsi $H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]} \otimes S_{[a+1,1]}E) = 0$ si $q > a+1$. Dans la suite spectrale, il y a une flèche entre $H^{n,q+1}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[a+1,1]}E)$ et $H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]} \otimes S_{[a+1,1]}E)$; $H^{n,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[a+1,1]}E)$ s'annule donc si $q > a+2$.

•

Par ailleurs, on peut, comme le fait le lemme 12, raffiner un peu le lemme précédent pour traiter certains cas particuliers :

Lemme 14 *Supposons* $a > 0$.

$$\begin{array}{lll} H^{n,q}(X, S_{[a+1,a,0,1]}E \otimes L^t) & = 0 & si\ q > a+1,\ et \\ H^{n-1,q}(X, S_{[a,a,0,0]}E \otimes L^t) & = 0 & si\ q > a. \end{array}$$

Demonstration : Similaire à celle du lemme 12. •

Lemme 15 $H^{n,q}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \otimes L^t) = H^{n,q}(X, S_{[0,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 4c+4$*, et* $H^{n-1,q}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 4c+3$.

Demonstration : Comme précédemment, on peut supposer que $e-c$ est pair et $t = 0$; soit donc l tel que $e-c = 2l$. Considérons le fibré en droites $\mathcal{O}(2l, 2l)$ sur $\mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, et la suite spectrale correspondante pour $P = n+2(2l-1)-2$. Les termes ${}^P E_1^{i,j}$ ne peuvent être non nuls que si i vaut $n, n-1$, ou $n-2$. Or ${}^P E_1^{n-2,q-n+2} = H^{n-2,q}(X, S_{[0,c]}E \otimes S_{[0,c]}E)$, qui est nul si $q > 4c+2$ par le théorème 2. On en déduit donc que si $q > 4c+2$, alors

$$\begin{array}{rl} & H^{n,q+2}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus 2H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) \\ = & 2H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E). \end{array}$$

De même, en considérant $\mathcal{O}(2l, l) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$, on montre que $H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E)$ si $q > 4c+2$. Ce système donne $H^{n,q+2}(X, S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) = 0$. Mais comme

$$S_{[1,c+1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \supset S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E,$$

on en déduit qu'aussi $H^{n,q+2}(X, S_{[2,c+2]}E \otimes S_{[0,c]}E) = 0$, et donc $H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,c+1]} \otimes S_{[0,c]}E) = 0$. •

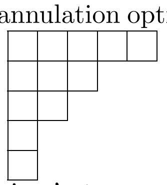
Le symétrique du lemme précédent est :

Lemme 16 $H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[a+1,1]}E \otimes L^t) = H^{n,q}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[a,0]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 2a+4$ *et* $H^{n-1,q}(X, S_{[a+1,1]} \otimes S_{[a,0]}E \otimes L^t) = 0$ *si* $q > 2a+3$.

Demonstration : Comme pour le lemme précédent, on pose $2l = a+e$ et $t = 0$, et on compare les suites spectrales correspondant à $\mathcal{O}(2l, 2l) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{O}(2l, l) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$. •

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré des partitions de type $[a, \epsilon] \otimes [b, \epsilon']$ ($\epsilon, \epsilon' = 0$ ou 1), ou de type $[\epsilon, a] \otimes [\epsilon', b]$. Etudions finalement des partitions "panachées", c'est-à-dire de type $[a, \epsilon, b, \epsilon']$.

Lemme 17 *Si a et c ont même parité, alors $H^{n,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > 2c + 2$, et $H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$ si $q > a + 2$. Si $q > \max(a, 2c) + 1$, alors $H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0$.*

Remarque : Ce lemme illustre la difficulté du problème qui consiste à obtenir des théorèmes d'annulation optimaux : le lemme 16 avec $a = 1$ donne la borne 6 pour la partition  (si $e = 5$) ; cette borne convient pour démontrer le théorème 3 mais n'est pas optimale, puisque le lemme 17 donne la borne 4 ($a = 3, c = 1$). Par contre, j'aurai besoin de cette bonne borne pour montrer le lemme 19. Pour démontrer un analogue du théorème 3 en tous rangs, il faut probablement prendre en compte ce genre de subtilités.

Demonstration : On suppose que $a + e = 2l, e - c = 2m$ et $t = 0$. Si l'on considère $\mathcal{O}(2l, 2m) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$, alors on obtient

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) =$$
$$H^{n,q+1}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus H^{n,q+1}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q > c + 1.$$

Avec $\mathcal{O}(2l, m) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$, on a

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n,q+1}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ si } q > 2c + 2.$$

Enfin, $\mathcal{O}(l, 2m) \to G_2(E^*) \times_X \mathbb{P}E^*$, donne

$$H^{n-1,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E) = H^{n,q+1}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \text{ si } q > a + 2.$$

Le lemme découle de ces trois remarques.

•

Lemme 18 *Si a et c ont même parité, alors*

$$H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E \otimes L^t) = 0 \text{ si } q > a + 2c + 2.$$

Demonstration : Si $t = 0, 2l = e + a$ et $2m = e - c$, on regarde la suite spectrale associée à $\mathcal{O}(l, m) \to G_2(E^*) \times_X G_2(E^*)$, pour $P = n + (2e - l - 3) + (3(m - 1)) - 2$. Par la remarque 4, pour $q > a + 2c + 2$, celle-ci compare $H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[0,c]}E)$ et $H^{n,q+2}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \oplus H^{n,q+2}(X, S_{[a,0]}E \otimes S_{[1,c+1]}E)$. Or, ces deux derniers groupes sont nuls, grâce au lemme 17, si $q > \max\{a, 2c\}$.

•

Lemme 19 *Si a et c ont même parité, alors*

$$H^{n,q}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E \otimes L^t) = 0 \text{ si } q > a + 2c + 4.$$

Demonstration : Si $t = 0$, $2l = e + a$ et $2m = e - c$, alors $\mathcal{O}(2l, 2m) \to \mathbb{P}E^* \times_X \mathbb{P}E^*$ donne, pour $q > a + 2c + 2$,

$$\begin{array}{ll} & H^{n,q+2}(X, S_{[a+1,1]}E \otimes S_{[1,c+1]}E) \oplus H^{n,q+2}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[0,c]}E) \\ \oplus & H^{n,q+2}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[2,c+2]}E) \\ = & H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,a+1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \oplus H^{n-1,q}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[1,c+1]}E). \end{array}$$

En effet, $H^{n-2,q}(X, S_{[a,0]} \otimes S_{[0,c]}E) = 0$ si $q > a + 2c + 2$ par le lemme 18. De même, $\mathcal{O}(l, 2m) \to G_2(E^*) \times_X \mathbb{P}E^*$ et $\mathcal{O}(2l, m) \to \mathbb{P}E^* \times_X G_2(E^*)$ donnent respectivement, pour $q > 2a + c + 2$,

$$\begin{array}{rcl} H^{n,q+2}(X, S_{[a+2,2]}E \otimes S_{[0,c]}E) & = & H^{n-1,q+1}(X, S_{[1,a+1]}E \otimes S_{[0,c]}E) \text{ et} \\ H^{n,q+2}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[2,c+2]}E) & = & H^{n-1,q}(X, S_{[0,a]}E \otimes S_{[1,c+1]}E). \end{array}$$

•

Remarquons enfin que l'on peut améliorer la borne pour $S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E$. En effet, en généralisant la démonstration du lemme précédent, on voit que l'annulation $H^{n-2,q}(X, S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E) = 0$ si $q > q_0$ implique $H^{n,q}(X, S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E) = 0$ si $q > q_0 + 2$. Le lemme précédent utilisait la borne $q_0 = 5$ montrée dans le lemme 18 ; je vais montrer que $H^{n-2,q}(X, S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E) = 0$ si $q > 4$ par un argument qui ne fonctionne que pour $S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E$. La remarque spécifique est que, par la règle de Littlewood-Richardson,

$$S_{[1,0]}E \otimes S_{[0,1]}E = (\det E)^2 \oplus \det E \otimes S_{[1,1]}E.$$

Puisqu'on a $H^{n-2,q}(X, (\det E)^2) = 0$ si $q > 2$, il suffit de montrer que $H^{n-2,q}(X, \det E \otimes S_{[1,1]}E) = 0$ si $q > 4$. Pour cela, on peut supposer que le rang de E est multiple de 4, $e = 4f$, et on regarde la suite spectrale correspondant à $\mathcal{O}(f, 4f) \to G_4(E) \times_X \mathbb{P}E$. Dans cette suite spectrale, notre groupe, $H^{n-2,q}(X, \det E \otimes S_{[1,1]}E) = 0$, est connecté à $H^{n-3,q-1}(X, (\det E)^2)$ (qui s'annule si $q - 1 > 3$), $H^{n-1,q+1}(X, \det E \otimes S_{[2,2]}E)$ (nul pour $q + 1 > 5$: lemme 17), et enfin $H^{n,q+1}(X, \det E \otimes S_{[3,3]}E) = 0$ (nul pour $q+1 > 3$ par le théorème A' de [Man 97]). On a donc démontré

Lemme 20 *$H^{n,q}(X, S_{[2,1]}E \otimes S_{[1,2]}E) = 0$ si $q > 6$.*

Ceci illustre à nouveau la complexité du sujet : on obtient de meilleures bornes pour des partitions spécifiques que celles obtenues par la méthode générale. Par ailleurs, comme nous utilisons une récurrence, le fait de ne pas obtenir le théorème d'annulation optimal pour une partition précise se répercute sur de nombreuses autres partitions, entrainant progressivement la “catastrophe”.

Références

[FH 91] W. Fulton, J. Harris, Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[FL 81] W. Fulton et R. Lazarsfeld, Connectivity and its applications in algebraic geometry. Algebraic geometry (Chicago, Ill., 1980), pp. 26–92, Lecture Notes in Math., 862, Springer, Berlin-New York, 1981.

[JPW 81] T. Józefiak, P. Pragacz, J. Weyman, *Resolutions of determinantal varieties and tensor complexes associated with symmetric and antisymmetric matrices.* Young tableaux and Schur functors in algebra and geometry (Toruń, 1980), Astérisque, pp. 109–189, 87-88, Soc. Math. France, Paris, 1981.

[Lay 96] F. Laytimi, *On degeneracy loci.* Internat. J. Math. 7 (1996), no. 6, 745–754

[LN 02] F. Laytimi, W. Nahm, *A generalization of Le Potier's vanishing theorem.* math.AG/0210010.

[LP 77] J. Le Potier, *Cohomologie de la grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel.* Math. Ann. 226 (1977), no. 3, 257–270.

[Man 97] L. Manivel, *Vanishing theorems for ample vector bundles.* Invent. Math. 127 (1997), no. 2, 401–416.

[Man 92] L. Manivel, *Théorèmes d'annulation pour la cohomologie des fibrés vectoriels amples*, thèse.

[Nie 81] H.A. Nielsen, *Free resolutions of tensor forms.* Young tableaux and Schur functors in algebra and geometry 289–302, Astérisque, 87-88.

[PS 73] C. Peskine ; L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 42, (1973), 47–119.

[Sno 86] D.M. Snow, *Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces.* Math. Ann. 276 (1986), no. 1, 159–176.

[Tu 89] L.W. Tu, *The connectedness of symmetric and skew-symmetric degeneracy loci : even ranks.* Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 381–392.

[Tu 88] L.W. Tu, J. Harris, *The connectedness of symmetric degeneracy loci : odd ranks.* Banach Center of publications, 26 : Topics in algebra, Part 2 (1988), 249–256.

Pierre-Emmanuel Chaput
Université Grenoble 1
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
UMR 5582
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Heres CEDEX
France