Zur Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit

Karl-Heinz Hoffmann, Victor N. Starovoitov

Received: March 13, 1997

Communicated by Alfred K. Louis

Abstract. In dieser Arbeit untersuchen wir die Bewegung einer Festkugel im beschränkten Gebiet, das mit einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit gefüllt ist. Wir beweisen, dass die Festkugel die Wand des Behälters mit der Geschwindigkeit Null erreicht. Als eine Folgerung wird die Lösbarkeit der Aufgabe gezeigt.

1991 Mathematics Subject Classification: 35Q30

1 Einführung und Hauptergebnisse.

Es sei Ω ein Gebiet im R^3 mit Rand $\partial\Omega$. Wir nehmen an, daß Ω mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt ist, und ein Festkörper darin schwimmt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese Bewegung zu beschreiben.
Die Hauptschwierigkeit der Aufgabe besteht darin, daß der Körper an die Wand des Behälters stoßen kann. Es ist nicht ganz klar, welche Bedingungen man in diesem Moment erhält. Daher wurde das Problem bisher mathematisch nur für solche Gebiete betrachtet, die mit dem ganzen Raum übereinstimmen ([1], [2]). Eine Übersicht über mechanische und numerische Behandlungen des Problems kann man in [3] finden. In [4] haben wir für den zweidimensionalen Fall bewiesen, daß der Körper die Wand mit der Geschwindigkeit Null erreicht, wenn sein Rand und der Rand des Gebietes zur Klasse C^2 gehören. Als eine Folgerung wurde die Lösbarkeit der Aufgabe gezeigt. Jetzt wird dieses Ergebnis auf den dreidimensionalen Fall erweitert werden. Wir setzen einschränkend voraus, daß das Gebiet Ω und der Körper Kugeln sind. Die Ergebnisse gelten aber auch, wenn man mehrere Kugeln im Gebiet betrachtet. Diese Voraussetzung wird eigentlich nur im Satz 2 benutzt. Um die Berechnungen zu vereinfachen, nehmen wir außerdem an, daß die Dichten der Flüssigkeit und des Körpers beide gleich eins sind, und keine Volumenkräfte vorhanden sind.

Es seien $V(t)$ das Gebiet, das der Festkörper einnimmt, und $\Gamma(t)$ sein Rand zur Zeit t. Es ist die Aufgabe, das Geschwindigkeitsfeld $\bar{v}$ der Flüssigkeit, die Geschwindigkeit $\bar{u}_* = d\bar{x}_*/dt$ des Schwerpunktes $\bar{x}_*$ des Festkörpers (des Mittelpunktes der Kugel V) und seine Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ zu finden, die den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_t + (\bar{v}\cdot\nabla)\bar{v} = \mathrm{div}P, \\ \mathrm{div}\bar{v} = 0, \\ P = -pI + D(\bar{v}), \end{array}\right. \qquad \bar{x} \in \Omega\backslash V(t) \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{l} m\frac{d\bar{u}_*}{dt} = \int\limits_{\Gamma(t)} P < \bar{n} > ds, \\ J_*\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \int\limits_{\Gamma(t)} (\bar{x}-\bar{x}_*)\times P < \bar{n} > ds, \end{array} \tag{1.2}$$

genügen. Hier sind m die Masse des Körpers, J_* der Tensor des Inertiamomentes des Körpers bezüglich seines Schwerpunktes, P der Spannungstensor, p der Druck und $D(\bar{v})$ der Deformationsgeschwindigkeitstensor mit den Komponenten

$$D_{ij}(\bar{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Für das Gleichungssystem (1.1)–(1.2) stellen wir folgende Rand- und Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad \bar{v} = \bar{v}_0,\ \bar{u}_* = \bar{u}_*^0,\ \bar{\omega} = \bar{\omega}_0,\ V = V_0, \tag{1.3}$$

$$\Gamma(t): \quad \bar{v}(\bar{x},t) = \bar{u}_*(t) + \bar{\omega}(t)\times(\bar{x}-\bar{x}_*(t)), \tag{1.4}$$

$$\partial\Omega: \quad \bar{v} = 0. \tag{1.5}$$

Wir nennen (1.1)–(1.5) *Aufgabe A*.

Nun definieren wir den Begriff der verallgemeinerten Lösung der Aufgabe A. Es seien

$$\varphi(\bar{x},t) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in V(t), \\ 0, & \bar{x} \in \Omega \setminus V(t), \end{cases}$$

$$K(\chi) = \{\bar{\psi} \in H_0^1(\Omega) \mid D(\bar{\psi})(\bar{x}) = 0 \text{ für } \bar{x} \in S(\chi),\ \mathrm{div}\bar{\psi} = 0\},$$

wobei χ die charakteristische Funktion einer Teilmenge von Ω ist, und $S(\chi)$ die Menge der Punkte mit $\chi = 1$ bezeichnet. Mit $L_p(0,T;K(\chi))$, $p \geq 1$, bezeichnen wir die Menge der Funktionen aus $L_p(0,T;H_0^1(\Omega))$, die für fast alle $t \in [0,T]$ zu $K(\chi)$ gehören.

Es seien $Char(E)$ die Klasse der charakteristischen Funktionen aller Teilmengen einer Menge E und $Q = [0,T]\times\Omega$ für $T < \infty$.

Definition 1. *Ein Paar von Funktionen*

$$\bar{v} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;K(\varphi)),$$
$$\varphi \in Char(Q) \cap C^{1/p}(0,T;L_p(\Omega)),\ 1 < p < \infty,$$

heißt verallgemeinerte Lösung der Aufgabe A, wenn die Integralidentitäten

$$\int_Q \{\bar{v}(\bar{\psi}_t + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{\psi}) - D(\bar{v}) : D(\bar{\psi})\} d\bar{x}dt = -\int_\Omega \bar{v}_0 \cdot \bar{\psi}_0 d\bar{x}, \tag{1.6}$$

$$\int_Q \varphi(\eta_t + \bar{v} \cdot \nabla\eta) d\bar{x}dt = -\int_\Omega \varphi_0 \eta_0 d\bar{x} \tag{1.7}$$

für beliebige Funktionen $\eta \in C^1(Q),\ \eta(T) = 0,\ \bar{\psi} \in H^1(Q) \cap L_2(0,T;K(\varphi))$, $\bar{\psi}(T) = 0$ *gelten.*

Bemerkung. Wir charakterisieren den Festkörper durch die Bedingung, daß $D(\bar{v})(\bar{x}) = 0$ für $\bar{x} \in S(\varphi)$. Das ist folgendermaßen motiviert. Der Kern des Operators D besteht aus Funktionen, die die Form $\bar{v} = \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{x},\ \bar{a}, \bar{\omega} \in R^3$, haben ([5], S.18). Damit bewegt sich die Flüssigkeit wie ein Festkörper. Deshalb nennen wir solche Funktionen auch *"starre" Funktionen.*
Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz.

Satz 1. *Sei* $\bar{v}_0 \in L_2(\Omega)$. *Wenn* Ω *und* $S(\varphi_0)$ *Kugeln in* R^3 *sind, hat die Aufgabe A mindestens eine verallgemeinerte Lösung.*
Außerdem gelten:
1. Es gibt eine Familie von Abbildungen $A_{s,t} : R^3 \to R^3,\ s,t \in [0,T]$, *so daß* $S(\varphi(t)) = A_{s,t}(S(\varphi(s)))$ *(und* $S(\varphi(t)) = A_{0,t}(S(\varphi_0))$*),* $A_{s,t}(\bar{x})$ *ist "starr" (im Sinne obiger Bemerkung), und* $A_{s,t}$ *Lipschitz-stetig bezüglich s und t ist.*
2. Wenn $h(t) = dist(\partial\Omega, S(\varphi(t)))$ *und* $h(t_0) = 0$ *für* $t_0 \in [0,T]$, *so gilt* $\lim_{t\to t_0} h(t)|t-t_0|^{-1} = 0$.
3. Für fast alle $t \in \{t \in [0,T] \mid h(t) = 0\}$ *weist* $\bar{\omega}(t)$ *in Richtung von* $\bar{n}_M$, *und es gilt* $\bar{v}_M = 0$. *Ferner sind* $M = \partial\Omega \cap \partial S(\varphi(t))$ *ein Punkt,* $\bar{v}_M$ *die Geschwindigkeit des Punktes des Körpers, der mit M übereinstimmt, und* $\bar{n}_M$ *die Normale der Fläche* $\partial S(\varphi(t))$ *(und* $\partial\Omega$*) in M.*

Bemerkung. Die zweite Behauptung des Satzes bedeutet, daß der Festkörper die Wand mit Geschwindigkeit Null erreicht.

2 Der Raum $K(\chi)$.

Hier untersuchen wir Eigenschaften der Funktionen, die zum Raum $K(\chi)$ gehören. Es wird immer angenommen, daß Ω und $S(\chi)$ Kugeln sind, und 0 der Mittelpunkt von Ω ist.
Es sei $\{A_s\}$ eine Familie von Abbildungen $A_s : R^3 \to R^3$, die die Form

$$A_s(\bar{x}) = \bar{a}(s) + B(s) < \bar{x} > \tag{2.1}$$

haben, wobei $\bar{a} : R \to R^3,\ B : R \to R^3 \times R^3$ glatte Funktionen sind, $B(s)$ für jedes s eine lineare orthogonale Abbildung ist, und $\bar{a}(0) = 0,\ B(0) = I$ gilt.

Satz 2. *Es seien* χ *die charakteristische Funktion einer Kugel* $S(\chi) \subset \Omega$ *und* $\chi_s(\bar{x}) = \chi(A_s^{-1}(\bar{x}))$, $s \geq 0$, *d.h.* $S(\chi_s) = A(S(\chi))$. *Wenn* $S(\chi_s) \subset \Omega$ *für jedes* $s \in [0, s_0]$, $s_0 > 0$, *gilt, dann konvergiert* $K(\chi_s) \to K(\chi)$ *für* $s \to 0$ *in* $H_0^1(\Omega)$, *d.h. für jede Funktion* $\bar{\psi} \in K(\chi)$ *gibt es eine Folge von Funktionen* $\bar{\psi}_s \in K(\chi_s)$ *mit* $\bar{\psi}_s \to \bar{\psi}$ *in* $H_0^1(\Omega)$.

Beweis. Weil $S(\chi)$ eine Kugel ist, gibt es viele Abbildungen der Art (2.1), die $S(\chi)$ auf $S(\chi_s)$ abbilden. Wir nehmen ein solches A_s, so daß $|\bar{a}(s)|$ minimal ist. Es sei $\bar{\psi}$ eine Funktion aus $K(\chi)$. Wir müssen eine Folge von Funktionen $\bar{\psi}_s \in K(\chi_s)$ konstruieren, die gegen $\bar{\psi}$ in $H_0^1(\Omega)$ konvergiert. Zuerst konstruieren wir eine Folge von Funktionen $\bar{\zeta}_s = B(s) < \bar{\psi}(B^{-1}(s) < \bar{x} >) >$. Es ist klar, daß $\bar{\zeta}_s \in K(\eta_s)$ ist, und $\bar{\zeta}_s$ gegen $\bar{\psi}$ in $H_0^1(\Omega)$ für $s \to 0$ konvergiert, wobei $\eta_s(\bar{x}) = \chi(B^{-1}(s) < \bar{x} >)$ ist. Jetzt haben wir nur zu beweisen, daß eine Folge von Funktionen $\bar{\xi}_s \in K(\mu_s)$ existiert, wobei $\mu_s(\bar{x}) = \chi(\bar{x} - \bar{a}(s))$, die gegen $\bar{\psi}$ in $H_0^1(\Omega)$ konvergiert. Wir merken an, daß der Vektor $\bar{a}$ in Richtung des Radius von Ω zeigt.
Es sei $\bar{u}$ die "starre" Funktion, die mit $\bar{\psi}$ in $S(\chi)$ übereinstimmt. Wir nehmen $\bar{\xi}_s$ als die Lösung der folgenden Aufgabe:

$$\begin{matrix} \Delta\bar{\xi}_s = \nabla q_s + \Delta\bar{\psi}, \\ \mathrm{div}\bar{\xi}_s = 0, \end{matrix} \qquad \bar{x} \in \Omega \setminus S(\mu_s)$$

$$\bar{\xi}_s(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \bar{x} \in \partial\Omega, \\ \bar{u}(\bar{x}), & \bar{x} \in \partial S(\mu_s). \end{cases}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\bar{\xi}_s$ gegen $\bar{\psi}$ in $H_0^1(\Omega)$ konvergiert. Wenn nämlich $|\bar{a}(s)| \neq 0$, haben wir [6]:

$$\|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(\Omega \setminus S(\mu_s))} \leq C\|\bar{\psi} - \bar{u}\|_{H^{1/2}(\partial S(\mu_s))}. \tag{2.2}$$

Aber mit dem Spursatz ([6], [7]) gilt die Abschätzung

$$\|\bar{\psi} - \bar{u}\|_{H^{1/2}(\partial S(\mu_s))} \leq C\|\bar{\psi} - \bar{u}\|_{H^1(S(\mu_s))} = C\|\bar{\psi} - \bar{u}\|_{H^1(S(\mu_s)\setminus S(\chi))}$$

mit einer von s unabhängingen Konstante C. Somit,

$$\|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(\Omega)} = \|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(\Omega \setminus (S(\mu_s)\cap S(\chi))} \leq$$
$$\leq \|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(\Omega \setminus S(\mu_s))} + \|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(S(\mu_s)\setminus S(\chi))} \leq$$
$$\leq C\|\bar{\psi} - \bar{\xi}_s\|_{H^1(S(\mu_s)\setminus S(\chi))}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert aber für $s \to 0$ gegen Null, weil $|S(\mu_s) \setminus S(\chi)| \to 0$ gilt.
Damit ist der Satz bewiesen.
Jetzt untersuchen wir Eigenschaften der Funktionen aus $K(\chi)$, wenn der Festkörper (die Festkugel) die Wand berührt.

Satz 3. *Es seien* $\bar{\psi} \in K(\chi)$ *und* $\partial S(\chi) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. *Dann gelten*
1. $\bar{\psi}(M) = 0$, *wobei* M *der Punkt des Körpers ist, der mit* $\partial S(\chi) \cap \partial\Omega$ *übereinstimmt.*
2. $\bar{\psi}(\bar{x})$ *ist ortogonal zu* $\bar{n}_M$ *für alle* $\bar{x} \in S(\chi)$, *wobei* $\bar{n}_M$ *die Normale an* $\partial\Omega$ *im Punkt* M *ist.*

Bemerkung. Der erste Punkt des Satzes kann schärfer formuliert werden. Nämlich, es gilt

$$\lim_{\rho\to 0} |R_\rho|^{-1} \int_{R_\rho} |\bar{\psi}(\bar{x})| d\bar{x} = 0,$$

wobei $R_\rho = \{\bar{x} \in S(\chi) \mid \operatorname{dist}(\bar{x}, M) \leq \rho\}$.
Beweis des Satzes 3. Es sei $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ein solches orthogonales Koordinatensystem, so daß $(0,0,0) = M$, und der Vektor $(0,0,1)$ in Richtung von $\bar{n}_M$ zeigt. Nehmen wir an, daß $\partial\Omega$ bzw. $\partial S(\chi)$ durch Funktionen g bzw. f beschrieben werden, d.h.

$$\partial\Omega = \{\bar{\xi} \in R^3 \mid \xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)\},$$

bzw.

$$\partial S(\chi) = \{\bar{\xi} \in R^3 \mid \xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)\}.$$

Es sei $L_\rho = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid f(\xi_1, \xi_2) \leq \rho\}$. Dann gilt:

$$\int_{L_\rho} |\bar{\psi}(\xi_1, \xi_2, \rho)|^2 d\xi_1 d\xi_2 = \int_{L_\rho} |\bar{\psi}(\xi_1, \xi_2, \rho) - \bar{\psi}(\xi_1, \xi_2, 0)|^2 d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int_{L_\rho} \left| \int_0^\rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 \leq C\rho \int_0^\rho \int_{L_\rho} |\nabla \bar{\psi}|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

wobei $\bar{\psi}$ mit Null außerhalb Ω fortgesetzt wird. Es gilt aber $|L_\rho| \geq C\rho$. Daher erhalten wir die Beziehung

$$\lim_{\rho\to 0} |L_\rho|^{-1} \int_{L_\rho} |\bar{\psi}|^2 d\xi_1 d\xi_2 \leq C \lim_{\rho\to 0} \int_0^\rho \int_{L_\rho} |\nabla \bar{\psi}|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 0,$$

und der erste Punkt des Satzes ist bewiesen.
Nun seien $G_\rho^\alpha = \{\bar{\xi} \in R^3 | (\xi_1, \xi_2) \in L_\rho,\ g(\xi_1, \xi_2) \leq \xi_3 \leq f(\xi_1, \xi_2),\ \xi_1 \leq \alpha\xi_2\}$ für $\alpha \in R$, $F_\rho^\alpha = \partial G_\rho^\alpha \cap \partial S(\chi)$, $W_\rho^\alpha = \partial G_\rho^\alpha \cap \partial\Omega$ und $V_\rho^\alpha = \partial G_\rho^\alpha \setminus (F_\rho^\alpha \cup W_\rho^\alpha)$. Weil $\operatorname{div}\bar{\psi} = 0$ ist, haben wir

$$\int_{\partial G_\rho^\alpha} \bar{\psi} \cdot \bar{n} ds = 0,$$

und folglich

$$\int_{F_\rho^\alpha} \bar{\psi} \cdot \bar{n} ds + \int_{V_\rho^\alpha} \bar{\psi} \cdot \bar{n} ds = 0.$$

Aber $\bar{\psi}$ hat die Darstellung

$$\bar{\psi}(\bar{\xi}) = \bar{\omega} \times \bar{\xi}$$

für $\bar{\xi} \in S(\chi)$, wobei $\bar{\omega}$ ein von $\bar{\xi}$ unabhängiger Vektor ist. Deshalb gilt

$$|\bar{\omega} \cdot \int_{F_\rho^\alpha} \bar{\xi} \times \bar{n} ds| \leq \int_{V_\rho^\alpha} |\bar{\psi}| ds. \tag{2.3}$$

Wir merken an, daß $\int_{F_\rho^\alpha} \bar{\xi} \times \bar{n} ds = k(\rho)\bar{\tau}_\alpha$ ist, wobei $\bar{\tau}_\alpha$ ein von ρ unabhängiger Tangentialvektor an die Fläche $\partial\Omega$ im Punkt M ist, und $k(\rho) \geq C\rho^{3/2}$ gilt. Die Integration der Ungleichung (2.3) von 0 bis $\sigma > 0$ bezüglich ρ ergibt

$$\begin{aligned} \sigma^{5/2} |\bar{\omega} \cdot \bar{\tau}_\alpha| &\leq \int_{G_\sigma^\alpha} |\bar{\psi}| d\bar{\xi} \leq |G_\sigma^\alpha|^{1/2} \left(\int_{G_\sigma^\alpha} |\bar{\psi}|^2 d\bar{\xi} \right)^{1/2} = \\ &= |G_\sigma^\alpha|^{1/2} \left(\int_0^\sigma \int_{G_\sigma^\alpha(\xi_3)} |\bar{\psi}|^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei $G_\sigma^\alpha(s)$ die Menge $\{\bar{\xi} \in G_\sigma^\alpha \mid \xi_3 = s\}$ bezeichnet. Aber es ist $|G_\sigma^\alpha| \leq C\sigma^2$, und, weil $\bar{\psi}$ gleich Null auf $\partial\Omega$ ist, gilt die Abschätzung

$$\int_{G_\sigma^\alpha(\xi_3)} |\bar{\psi}|^2 d\xi_1 d\xi_2 \leq C \|\nabla \bar{\psi}\|^2_{L_2(\Omega)} |\xi_3|.$$

So erhalten wir aus (2.4):

$$|\bar{\omega} \cdot \bar{\tau}_\alpha| \leq C\sigma^{1/2}.$$

Weil σ eine beliebige Zahl war, ist $\bar{\omega} \cdot \bar{\tau}_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in R$, und folglich zeigt $\bar{\omega}$ in Richtung von $\bar{n}_M$.
Damit ist der Satz bewiesen.

3 Beweis des Satzes 1.

Die Lösbarkeit der Aufgabe A und die erste Behauptung des Satzes können genau wie in [4] bewiesen werden. Für die Lösung gilt die folgende Abschätzung:

$$\int_\Omega |\bar{v}(\bar{x}, t)|^2 d\bar{x} + \int_0^t \int_\Omega |\nabla \bar{v}(\bar{x}, s)|^2 d\bar{x} ds \leq \int_\Omega |\bar{v}_0(\bar{x})|^2 d\bar{x}. \tag{3.1}$$

Das heißt $\bar{v} \in H_0^1(\Omega)$ für fast alle $t \in [0,T]$, und die Behauptung 3 des Satzes ergibt sich aus dem Satz 3. Es bleibt noch die Behauptung 2 zu beweisen. Wie in [4] (Aussage 3.4) können wir die Abschätzung

$$\left|\frac{dh(t)}{dt}\right| \leq Ch^{1/2}(t)(z(t)+1)$$

herleiten, wobei $z(t) = \|\nabla\bar{v}(t)\|_{L_2(\Omega)}$ ist. Wenn $h(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in [0,T]$ ist, gibt uns die Integration dieser Ungleichung:

$$h^{1/2}(t) \leq C\left|\int_{t_0}^{t}(z(s)+1)ds\right| \leq C|t-t_0|^{1/2}\left(\int_{t_0}^{t}(z(s)+1)^2 ds\right)^{1/2}.$$

Weil die Funktion z zu $L_2(0,T)$ gehört, ist die Behauptung bewiesen.

Literatur

[1] N. V. Yudakov. *On the solvability of the problem on the motion of a solid body in a viscous incompressible fluid.* Dinamika Sploshnoi Sredy, 1974, v.18, s.249-253.

[2] D. Serre. *Chute Libre d'un Solide dans un Fluide Visqueux Incompressible. Existence.* Japan Journal of Applied Mathematics, 1987, v.4, N1, pp.99-110.

[3] R. Hsu, P. Ganatos. *The motion of a rigid body in viscous fluid bounded by a plane wall.* Journal of Fluid Mechanics, 1989, v.207, pp.29-72.

[4] K.-H. Hoffmann, V.N.Starovoitov. *On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case.* Advances in Mathematical Sciences and Applications, 1999, v.9, N 2, pp.633-648.

[5] R. Temam. *Mathematical problems in plasticity.* 1985, BORDAS, Paris.

[6] R. Temam. *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* 1977, North-Holland Pub. Co., Amsterdam - New York - Tokyo.

[7] J. L. Lions, E.Magenes. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Volume I. 1972, Springer, Berlin.

Karl-Heinz Hoffmann
Institut für Angewandte
Mathematik und Statistik,
Technische Universität
München, Deutschland
hoffmann@caesar.de

Victor N. Starovoitov
Lavrentyev Institut für
Hydrodynamik,
Novosibirsk, 630090
Rußland
star@hydro.nsc.ru