Certaines Combinaisons Linéaires de Deux Formes de Pfister et le Problème d'Isotropie

Ahmed Laghribi

Received: May 30, 2001
Revised: September 28, 2001

Communicated by Ulf Rehmann

Abstract. In this paper we treat the isotropy problem of certain linear combinations of two Pfister forms over the function field of a projective quadric. More precisely, we discuss the connection between this problem and some conjectures on a field that appears in the generic splitting tower of a quadratic form associated to a given linear combination. The case of some linear combinations of low dimension will be detailed.

2000 Mathematics Subject Classification: 11E04, 11E81.
Keywords and Phrases: Forme quadratique, Forme de Pfister, Quadrique projective, Déploiement générique d'une forme quadratique, Cohomologie galoisienne.

1. Introduction

Soit F un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Dans ce papier on s'intéresse au problème suivant:

Problème 1.1. *Pour φ une F-forme quadratique anisotrope de dimension ≥ 2, quelles sont les F-formes quadratiques ψ pour lesquelles φ devient isotrope sur $F(\psi)$ le corps des fonctions de la quadrique projective d'équation $\psi = 0$?*

Une n-forme de Pfister est une forme de type $\langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n\rangle$ avec $a_1, \cdots, a_n \in F^*$, qu'on note $\langle\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\rangle$. Une 0-forme de Pfister est une forme de dimension 1. Fixons quelques notations:

Notations 1.2. *Pour $n, m \geq 0$ deux entiers, on note:*

1. $P_n(F)$ *l'ensemble des n-formes de Pfister et* $GP_n(F) = F^*P_n(F)$.
2. $(P_n(F))' = \{\pi' \mid \langle 1\rangle \perp \pi' \in P_n(F)\}$ *et* $(GP_n(F))' = F^*(P_n(F))'$.
3. $L_{n,m}(F) = \{\pi \perp \tau \mid \pi \in GP_n(F),\ \tau \in GP_m(F)\}$.
4. $(L_{n,m}(F))' = \{\pi \perp \tau \mid \pi \in (GP_n(F))',\ \tau \in (GP_m(F))'\}$.

Une forme quadratique ψ est dite une *sous-forme* de φ et on note $\psi \subset \varphi$ s'il existe une forme quadratique ξ telle que $\varphi \cong \psi \perp \xi$ où $\cong$ et $\perp$ désignent respectivement l'isométrie et la somme orthogonale des formes quadratiques.

Le but de ce papier est d'étudier le problème précédent lorsque $\varphi \in L_{n,m}(F)$ ou $(L_{n,m}(F))'$. En général, il est très difficile de faire cela de façon complète. En ce qui concerne les formes de $L_{n,m}(F)$, notre stratégie consiste à associer à une forme $\varphi \in L_{n,m}(F)$ un corps F_ϵ qui apparaît dans la tour de déploiement générique d'une forme liée à φ. Le corps F_ϵ est indépendant de l'écriture de φ et que la forme φ_{F_ϵ} devient une sous-forme d'une forme de $GP_{n+1}(F_\epsilon)$ (propositions 2.2, 2.7). On conjecture que φ_{F_ϵ} est anisotrope et on fait le lien avec d'autres conjectures (propositions 2.12, 2.16). On va discuter de manière générale ces conjectures et ce en répondant au problème 1.1 dès que ces conjectures sont vérifiées (théorème 2.19). Entre autre, on étudie de manière réelle l'isotropie d'une forme de $L_{n,1}(F)$ et d'une forme de $L_{n,m}(F)$ qui est divisible par une $(m-1)$-forme de Pfister, et cette étude est plus détaillée lorsque $n = 3$ et $m = 2$. Pour ce qui est de l'isotropie d'une forme de $(L_{n,m}(F))'$, l'étude se ramène souvent à celle d'une forme de $L_{n,m}(F)$ qui la contient (proposition 3.2). Mais, en général, l'isotropie des formes de $(L_{n,m}(F))'$ reste plus compliquée que celle des formes de $L_{n,m}(F)$. On se limite à étudier l'isotropie de certaines formes de $(L_{n,m}(F))'$ avec $n \geq 3$ et $m = 1, 2$.

Rappelons que dans la proposition 2.16 et les théorèmes 2.19, 4.1 on suppose dans certains cas que F est de caractéristique 0. Cela est dû au fait qu'on se base sur des résultats d'Orlov-Vishik-Voevodsky [31] qui sont établis en cette caractéristique. Plus précisément, par [38] et [31, Theorem 2.1] on déduit qu'on a le résultat suivant:

(R1) *Pour $m \geq n \geq 1$ et $\pi \in GP_nF$, on a* $\operatorname{Ker}(H^mF \longrightarrow H^mF(\pi)) = e^n(\pi) \cdot H^{m-n}F$

où e^n est le n-ième invariant d'Arason et H^nF est le n-ième groupe de cohomologie galoisienne à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ (voir la section 4 pour plus de détails sur l'invariant e^n). Aussi par [38] et [31, Theorem 2.10] on a un autre résultat:

(R2) *Pour $h \in H^nF$ non nul, il existe K/F une extension telle que h_K soit un symbole non nul*

où un symbole désigne un élément de H^nF de type $(a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)$ avec (a_i) est la classe de $a_i \in F^*$ dans H^1F et $\cdot$ est le cup-produit. Comme conséquence du résultat (R2) on obtient:

(R3) *Pour φ de dimension $> 2^n$, on a* $\operatorname{Ker}(H^nF \longrightarrow H^nF(\varphi)) = \{0\}$.

Aussi on mentionne un autre résultat important [18, fin de la page 166], [30]:

(R4) *Pour $n \geq 0$, e^n induit un isomorphisme entre $I^nF/I^{n+1}F$ et H^nF.*

Lorsque la caractéristique n'est pas nécessairement 0, les résultats (R1), (R3) et (R4) sont vrais comme suit:

1. Le résultat (R1) est vrai pour $m \leq 4$: Arason [1] pour $m = 2, 3$; Kahn-Rost-Sujatha [17, Corollary 2] pour $m = 4$ et $n = 3$; Kahn-Sujatha [19, Theorem 2] pour $m = 4$ et $n = 2$.
2. Le résultat (R3) est vrai pour $n \leq 4$: Arason [1] pour $n \leq 3$; Kahn-Rost-Sujatha [17, Corollary 2] pour $n = 4$.
3. Le résultat (R4) est vrai pour $n \leq 4$: Evident pour $n = 0$; Par la théorie de Kummer pour $n = 1$; Merkur'ev [28] pour $n = 2$; Merkur'ev-Suslin/Rost [29], [33] pour $n = 3$; Rost (non publié) et Szyjewski [37] pour $n = 4$.

On dit qu'une forme φ est *voisine* s'il existe une n-forme de Pfister π telle que $\dim \varphi > 2^{n-1}$ et $a\pi \cong \varphi \perp \xi$ pour certains $a \in F^*$ et ξ une forme quadratique. Dans ce cas, les formes π et ξ sont uniques, et pour toute extension de corps K/F on a que φ_K est isotrope si et seulement si π_K l'est aussi. La forme ξ est appelée la forme *complémentaire* de φ.

Si φ est voisine de $\pi \in P_nF$, en particulier si $\varphi \in L_{n,0}(F)$, alors par le théorème de la sous-forme (théorème 1.4) on répond au problème 1.1 de façon complète:

$$\begin{aligned} \varphi_{F(\psi)} \text{ est isotrope} \quad &\Leftrightarrow \quad \pi_{F(\psi)} \text{ est isotrope} \\ &\Leftrightarrow \quad a\psi \subset \pi \text{ pour un certain } a \in F^* \end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi pour la suite de ce papier et dans le cas des formes de $L_{n,m}(F)$, on va considérer uniquement celles de $L_{n,m}(F)$ avec $m \geq 1$.

L'isotropie d'une forme de $L_{1,1}(F)$ a été étudiée par Leep [27] et Shapiro [35]; l'isotropie d'une forme de $L_{2,1}(F)$ a été étudiée par Hoffmann [7] et Izhboldin-Karpenko [13]; l'isotropie d'une forme de $L_{2,2}(F)$ a été étudiée par l'auteur [22], [23].

Plus généralement, le problème précédent a été aussi étudié par Hoffmann pour une forme de dimension 5 [6]; par Leep [27] et Merkur'ev [26] pour une forme d'Albert (c'est-à-dire une forme de dimension 6 et de discriminant à signe -1); par l'auteur [24] et Izhboldin-Karpenko [12] pour des formes de dimension 6 qui ne sont pas nécessairement dans $L_{2,1}(F)$; par l'auteur pour une forme de dimension 8 et de discriminant à signe 1 mais qui n'est pas nécessairement dans $L_{2,2}(F)$, et pour certaines formes de dimension 7.

Si K/F est une extension de corps, alors on notera $W(K/F)$ le noyau de l'homomorphisme $W(F) \longrightarrow W(K)$ induit par l'inclusion $F \subset K$. Pour deux formes φ_1 et φ_2, on note $\varphi_1 \sim \varphi_2$ si $\varphi_1 \perp -\varphi_2$ est hyperbolique. On dit que φ_1 et φ_2 sont semblables si $\varphi_1 \cong a\varphi_2$ pour un certain scalaire $a \in F^*$. La partie anisotrope φ_{an} d'une forme quadratique φ est l'unique forme quadratique anisotrope telle que $\varphi \sim \varphi_{\text{an}}$. On dit que φ est divisible par ψ si on a $\varphi \cong \psi \otimes \rho$ pour une certaine forme quadratique ρ.

On désigne par $C(\varphi)$ (resp. $C_0(\varphi)$) l'algèbre de Clifford de φ (resp. l'algèbre de Clifford paire de φ). L'invariant de Clifford de φ est désigné par $c(\varphi)$. On note $D_F(\varphi) = \{a \in F^* | \exists x \in V, \varphi(x) = a\}$ où V est l'espace vectoriel sous-jacent à

φ, et $G_F(\varphi) = \{a \in F^* | a\varphi \cong \varphi\}$. On rappelle que $D_F(\pi) = G_F(\pi)$ pour toute forme de Pfister π et on dit que dans ce cas que π est *multiplicative.*

Pour A une F-algèbre simple centrale de dimension finie, on désigne par ind A l'indice de Schur de A.

Les deux théorèmes suivants seront utilisés de manière fréquente. On y fera référence respectivement par les noms *"Hauptsatz"* et *"le théorème de la sous-forme".*

THÉORÈME 1.3. *(Arason-Pfister) Si $\varphi \in I^n F$ anisotrope, alors* $\dim \varphi \geq 2^n$.

THÉORÈME 1.4. *(Cassels-Pfister) Soient φ et ψ deux formes quadratiques anisotropes telles que $1 \in D_F(\psi)$ et que $\varphi_{F(\psi)}$ soit hyperbolique. Alors, pour tout $\alpha \in D_F(\varphi)$ on a $\alpha\psi \subset \varphi$. En particulier,* $\dim \varphi \geq \dim \psi$.

2. LES FORMES QUADRATIQUES DE $L_{n,m}(F)$

Le long de cette section on va fixer les notations suivantes:

$$(*) \qquad \begin{cases} \pi \in P_n(F),\, \tau \in P_m(F) & \textit{avec } n \geq m \geq 1 \\ \varphi = a\pi \perp b\tau \in L_{n,m}(F) & \textit{avec } a, b \in F^* \\ \eta = \pi \perp -\tau & \\ \pi_0 = \pi \perp ab\pi \in P_{n+1}(F). & \end{cases}$$

Faisons remarquer qu'avec la multiplicativité d'une forme de Pfister, on déduit que si φ est anisotrope alors π_0 est aussi anisotrope.

2.1. QUELQUES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES. Par la théorie générique de Knebusch [20], [21], on associe à une forme quadratique φ non nulle une suite de formes quadratiques et d'extensions de F, appelée *la tour de déploiement générique* de φ, de la manière suivante:

$$F_0 = F, \qquad \varphi_0 = \varphi_{\mathrm{an}}$$

et pour $n \geq 1$, on définit par récurrence

$$F_n = F_{n-1}(\varphi_{n-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_n = ((\varphi_{n-1})_{F_n})_{\mathrm{an}}.$$

La hauteur de φ, notée $\mathrm{h}(\varphi)$, est le plus petit entier h tel que $\dim \varphi_h \leq 1$. Pour $j \in \{0, \cdots, h\}$, on note $i_j(\varphi)$ l'indice de Witt de φ_{F_j}. On a $0 \leq i_0(\varphi) < \cdots < i_h(\varphi)$. On appelle $(i_0(\varphi), \cdots, i_h(\varphi))$ *la suite des indices* de déploiement de φ (splitting patterns [10]), et $(\varphi_0, \cdots, \varphi_h)$ (resp. $(F_0, \cdots, F_h)$) *la suite des noyaux* (resp. *la suite des extensions*) de la tour de déploiement générique de φ. Si $\dim \varphi$ est paire, alors φ_{h-1} est semblable à une forme de Pfister $\rho \in P_d F_{h-1}$ qu'on appelle *la forme dominante* de φ (Knebusch [20, Theorem 5.8] et Wadsworth [39]). L'entier d s'appelle le degré de φ, qu'on note $\deg(\varphi)$. Lorsque $\dim \varphi$ est impaire, on dit que φ est de degré 0. Le corps F_h s'appelle *le corps de déploiement générique* de φ.

On commence par rappeler un résultat.

Proposition 2.1. *(Elman-Lam* [3, 4.5]*; Kahn* [15, Remarque, Page 61]*) Soient $\pi \in P_nF$, $\tau \in P_mF$ anisotropes et $a, b \in F^*$. Soit i le plus grand entier tel que π et τ soient divisibles par une i-forme de Pfister. Alors, $i_W(a\pi \perp b\tau) = 0$ ou 2^i. De plus, si $i_W(a\pi \perp b\tau) = 2^i$ alors il existe $\rho \in P_iF$, $\mu \in P_{n-i}F$ et $\nu \in P_{m-i}F$ telles que $\pi \cong \rho \otimes \mu$ et $\tau \cong \rho \otimes \nu$.*

La proposition suivante est liée au déploiement générique de η.

Proposition 2.2. *On garde les mêmes notations que dans $(*)$. Soient $(F_i)_{0\leq i\leq \mathrm{h}(\eta)}$ (resp. $(i_j(\eta))_{0\leq j\leq \mathrm{h}(\eta)}$) la suite des extensions de la tour de déploiement générique de η (resp. la suite des indices de déploiement de η). Alors:*
(1) Il existe $\epsilon \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\eta)\}$ tel que $i_\epsilon(\eta) = 2^m$.
(2) Pour $\epsilon \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\eta)\}$ comme dans l'assertion (1), on a:
(i) $a\varphi_{F_\epsilon} \subset (\pi_0)_{F_\epsilon}$,
(ii) Si $i_W(\eta) = 2^{m-1}$, alors $\epsilon = 1$ c'est-à-dire $F_\epsilon = F(\eta_{an})$,
(iii) Si $i_W(\eta) = 2^m$, alors $\epsilon = 0$ c'est-à-dire $F_\epsilon = F$.
(iv) Si $n > m$, alors l'extension $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure.

Démonstration. (1) Voir [11, Theorem 2.8].

(2)(i) Puisque $i_\epsilon(\eta) = 2^m$, on déduit que $\tau_{F_\epsilon} \subset \pi_{F_\epsilon}$. Ainsi, $a\varphi_{F_\epsilon} \subset (\pi_0)_{F_\epsilon}$.
(ii) Il existe $\rho \in P_{m-1}F$, $\mu = \mu' \perp \langle 1\rangle \in P_{n-m+1}F$ et $d \in F^*$ tels que $\pi \cong \rho\otimes\mu$ et $\tau \cong \rho \otimes \langle 1, -d\rangle$. On a $\eta_{\mathrm{an}} = \rho \otimes (\mu' \perp \langle d\rangle)$. Comme $i_W(\eta_{F(\eta_{\mathrm{an}})})$ est une puissance de 2 (proposition 2.1) strictement supérieure à 2^{m-1}, on a $i_1(\eta) = 2^m$. Ainsi, $\epsilon = 1$ c'est-à-dire $F_\epsilon = F(\eta_{\mathrm{an}})$.
(iii) Evident.
(iv) On a $\eta_{F(\pi)} \sim (-\tau)_{F(\pi)}$. Par le théorème de la sous-forme, $\tau_{F(\pi)}$ est anisotrope, et donc $(\eta_{F(\pi)})_{\mathrm{an}} \cong (-\tau)_{F(\pi)}$. Ainsi, $i_W(\eta_{F(\pi)}) = 2^{n-1} \geq 2^m = i_\epsilon(\eta)$. D'après [20, Remark 5.5] on a que $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure.

Remarque 2.3. *Avec les notations de la proposition 2.2 et lorsque $n = m$, le corps F_ϵ n'est autre que le corps de déploiement générique de η c'est-à-dire $\epsilon = \mathrm{h}(\eta)$.*

Définition 2.4. *(*[21, Definition 7.7]*) Toute forme de dimension ≤ 1 est dite excellente. Une forme φ de dimension ≥ 2 est dite excellente si elle est voisine et sa forme complémentaire est excellente.*

La condition $i_W(\eta) = 2^m$ peut être vue autrement:

Proposition 2.5. *On garde les mêmes notations que dans $(*)$ et on suppose que φ est anisotrope. On a équivalence entre:*
(1) φ est une voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister,
(2) φ est divisible par une m-forme de Pfister,
(3) φ est excellente.
(4) $\tau \subset \pi$.

Démonstration. Les implications (3) $\Longrightarrow$ (1) et (4) $\Longrightarrow$ (2) sont évidentes.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Puisque $a\pi \perp \langle b\rangle$ est une voisine de π_0 contenue dans φ, on déduit que φ est une voisine de π_0. Par multiplicativité $a\varphi \subset \pi_0$. Ainsi, $\tau \subset \pi$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit $\rho \in P_m(F)$ divisant φ. Alors, $a\pi_{F(\rho)} \sim -b\tau_{F(\rho)}$ puisque $\varphi_{F(\rho)} \sim 0$. Si $n > m$ on obtient $\pi_{F(\rho)} \sim \tau_{F(\rho)} \sim 0$. Ainsi, $\rho \cong \tau$ et $\pi_{F(\tau)} \sim 0$. Soit $\lambda \in P_{n-m}(F)$ tel que $\pi \cong \tau \otimes \lambda$. On a $\varphi \cong \tau \otimes (a\lambda \perp \langle b\rangle)$ qui est bien une forme excellente. Si $n = m$ on obtient que $\varphi \in GP_{n+1}(F)$ qui est aussi excellente.

Définition 2.6. *(1) Deux corps K et L contenant F sont dits F-équivalents (au sens de Knebusch) s'il existe une F-place de l'un vers l'autre et inversement.*
(2) Deux suites croissantes de corps $(F_0 = F, \dots, F_r)$ et $(G_0 = F, \dots, G_s)$ sont dites F-équivalentes si:
(i) $r = s$,
(ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$ les corps F_i et G_i sont F-équivalents.

La proposition suivante sera démontrée au début de la section 5.

Proposition 2.7. *On garde les mêmes notations que dans $(*)$. Soient $\zeta \in P_nF$, $\sigma \in P_mF$ et $c, d \in F^*$ de sorte que*

$$\varphi \cong c\zeta \perp d\sigma$$

soit une autre écriture de φ. Soient $\delta = \zeta \perp -\sigma$ et $(F_i, \eta_i)_{0\le i\le \mathrm{h}(\eta)}$ (resp. $(G_i, \delta_i)_{0\le i\le \mathrm{h}(\delta)}$) la tour de déploiement générique de η (resp. la tour de déploiement générique de δ). Soit $\epsilon \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\eta)\}$ (resp. $\nu \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\delta)\}$) tel que $i_W(\eta_{F_\epsilon}) = 2^m$ (resp. $i_W(\delta_{G_\nu}) = 2^m$).
(1) Si $n > m$, alors les suites $(F_0, \dots, F_\epsilon)$ et $(G_0, \dots, G_\nu)$ sont F-équivalentes. En particulier, $\epsilon = \nu$ et les corps F_ϵ et G_ν sont F-équivalents.
(2) Si $n = m$, alors les corps F_ϵ et G_ν sont aussi F-équivalents.
Ainsi, à F-équivalence près, le corps F_ϵ ne dépend pas de l'écriture de φ.

Définition 2.8. *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans la proposition 2.2, on appelle F_ϵ le corps de voisinage de φ.*

2.2. Isotropie des formes quadratiques de $L_{n,m}(F)$. Soient φ comme dans $(*)$ et F_ϵ son corps de voisinage. Comme on va le voir l'isotropie de φ est liée à la question de savoir si φ_{F_ϵ} reste anisotrope lorsque φ est anisotrope. Sur cette question on pose la conjecture suivante:

Conjecture 2.9. *On garde les mêmes notations que dans $(*)$ et on suppose que φ est anisotrope. Soit F_ϵ le corps de voisinage de φ. Alors, $(\pi_0)_{F_\epsilon}$ est anisotrope. En particulier, $\pi_0 \notin W(F_\epsilon/F)$.*

De manière équivalente, la conjecture dit que φ_{F_ϵ} est anisotrope du fait que $a\varphi_{F_\epsilon} \subset (\pi_0)_{F_\epsilon}$ et $2\dim\varphi > \dim\pi_0$.

Plus généralement sur l'ensemble $P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$ on pose la conjecture suivante:

Conjecture 2.10. *Avec les mêmes hypothèses que dans la conjecture 2.9 et pour $\rho \in P_{n+1}(F)$, on a:*

$$\rho \in W(F_\epsilon/F) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \cong \pi \perp r\pi \text{ avec } r \in D_F(-\tau) & \textit{si } n > m \\ \rho \perp -(\eta \perp \alpha\eta) \in I^{n+2}F \text{ pour } \alpha \in F^* & \textit{si } n = m. \end{cases}$$

Dans la proposition qui suit on mentionne quelques inclusions qui sont toujours vraies dans la conjecture 2.10.

Proposition 2.11. *Avec les mêmes notations que dans* $(*)$*, on a:*
(1) $\{\pi \perp r\pi \mid r \in D_F(-\tau)\} \subset P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$.
(2) Si $n > m$*, alors* $P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F) \subset \{\pi \perp r\pi \mid r \in F^*\}$.
(3) Si $n = m$*, alors*
$\{\rho \in P_{n+1}F \mid \rho \perp -(\eta \perp \alpha\eta) \in I^{n+2}F,\ \alpha \in F^*\} \subset P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$.

Démonstration. (1) Si $r \in D_F(-\tau)$, alors on a:

$$\begin{aligned} \eta \perp r\eta &\sim \pi \perp -\tau \perp -r\tau \perp r\pi \\ &\sim \pi \perp -\tau \perp \tau \perp r\pi \\ &\sim \pi \perp r\pi \in I^{n+1}F. \end{aligned}$$

Puisque $\dim(\eta_{F_\epsilon})_{\mathrm{an}} = 2^n - 2^m$, on a $\dim((\eta \perp r\eta)_{F_\epsilon})_{\mathrm{an}} \leq 2^{n+1} - 2^{m+1}$. Par le Hauptsatz , on déduit que $\pi \perp r\pi \in W(F_\epsilon/F)$.
(2) Si $\rho \in P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$, alors $\rho_{F_\epsilon(\pi)} \sim 0$. Par la proposition 2.2(iv) on a que $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure, et donc $\rho_{F(\pi)} \sim 0$. D'où le résultat.
(3) C'est une conséquence du Hauptsatz et du fait que $\eta_{F_\epsilon} \sim 0$ (remarque 2.3).

Proposition 2.12. *La conjecture 2.10 implique la conjecture 2.9.*

Voici quelques cas où la conjecture 2.10 est vérifiée:

Proposition 2.13. *La conjecture 2.10 est vraie si* $i_W(\eta) \in \{2^m, 2^{m-1}\}$.

Comme un corollaire immédiat on a:

Corollaire 2.14. *La conjecture 2.10 est vraie pour* $\varphi \in L_{n,1}(F)$.

En caractéristique 0 lorsque $n \geq 4$ et avec le résultat (R4) la conjecture 2.9 dit de manière équivalente que $e^{n+1}(\pi_0) \notin H^{n+1}(F_\epsilon/F)$. Plus généralement, on pose une conjecture sur le noyau $H^{n+1}(F_\epsilon/F)$:

Conjecture 2.15. *Avec les mêmes hypothèses que dans la conjecture 2.9, on a:*

$$H^{n+1}(F_\epsilon/F) = \begin{cases} \{e^n(\pi) \cdot (r) \mid r \in D_F(\tau)\} & \textit{si } n > m \\ e^n(\eta) \cdot H^1F & \textit{si } n = m. \end{cases}$$

Entre les conjectures 2.10 et 2.15 on a les liens suivants:

Proposition 2.16. *On suppose que F est de caractéristique* 0 *lorsque* $n \geq 4$*. On a:*
(1) Si $n > m$*, alors les conjectures 2.10 et 2.15 sont équivalentes.*
(2) Si $n = m$*, alors la conjecture 2.15 implique la conjecture 2.10.*

Théorème 2.17. *La conjecture 2.15 est vraie dans les cas suivants:*
(1) $n = m \leq 2$.
(2) $i_W(\eta) \in \{2^{m-1}, 2^m\}$ *en supposant que* F *est de caractéristique* 0 *lorsque* $(n > m$ *et* $n \geq 4)$ *ou* $(n = m \geq 4$ *et* $i_W(\eta) = 2^{m-1})$.

Démonstration. (1) La conjecture a été prouvée dans [1] lorsque $(n = m = 1)$ et $(n = m = 2$ avec $i_W(\eta) = 2)$; et dans [32] lorsque $n = m = 2$ avec $i_W(\eta) = 1$ (en fait dans ce dernier cas la conjecture se déduit de [32] comme cela est fait dans [22, Corollaire 6]).
(2) (i) Si $n > m$ et $i_W(\eta) \in \{2^m, 2^{m-1}\}$, alors la conjecture est une conséquence de la proposition 2.16(1) et la proposition 2.13.
(ii) Si $n = m$ et $i_W(\eta) = 2^m$, alors la conjecture est évidente car $\eta \sim 0$ et donc $F_\epsilon = F$.
(iii) Si $n = m$ et $i_W(\eta) = 2^{m-1}$, alors $\eta_{\mathrm{an}} \in GP_nF$ et par la proposition 2.2 $F_\epsilon = F(\eta_{\mathrm{an}})$. La conjecture est une conséquence du résultat (R1).

On combine les propositions 2.13, 2.16 et le théorème 2.17 pour obtenir:

Corollaire 2.18. *La conjecture 2.10 est vraie dans les cas suivants:*
(1) $n = m \leq 2$;
(2) $i_W(\eta) \in \{2^{m-1}, 2^m\}$ *en supposant que* F *est de caractéristique* 0 *lorsque* $(n > m$ *et* $n \geq 4)$ *ou* $(n = m \geq 4$ *et* $i_W(\eta) = 2^{m-1})$.

Maintenant on énonce nos principaux résultats sur l'isotropie d'une forme quadratique de $L_{n,m}(F)$. Dans le théorème suivant et lorsque $n = m \geq 4$ on suppose que F est de caractéristique 0.

Théorème 2.19. *Soit* φ *comme dans* $(*)$ *et qu'on suppose anisotrope et soit* ψ *une forme quadratique de dimension* $\geq 2^{n+1}$. *On suppose que la conjecture 2.10 est vraie pour* φ *lorsque* $n > m$, *et que la conjecture 2.15 est vraie pour* φ *lorsque* $n = m$. *On a:*
(1) Si $\dim \psi > 2^{n+1}$, *alors* $\varphi_{F(\psi)}$ *est anisotrope.*
(2) Si $n > m$ *et* $\dim \psi = 2^{n+1}$, *alors on a équivalence entre:*
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope,*
(ii) ψ *est voisine d'une* $(n+1)$*-forme de Pfister dont* φ *contient une voisine.*
(3) Si $n = m$, $\dim \psi = 2^{n+1}$ *avec* F *de caractéristique* 0 *lorsque* $n \geq 4$, *alors on a équivalence entre:*
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope,*
(ii) ψ *est voisine d'une* $(n+1)$*-forme de Pfister dont* φ *contient une voisine, ou* $\varphi \perp \alpha\psi \in I^{n+2}F$ *pour un certain* $\alpha \in F^*$.

Le corollaire suivant se déduit du théorème 2.19 et du corollaire 2.14.

Corollaire 2.20. *Soient* $n \geq 2$ *un entier et* $\varphi \in L_{n,1}(F)$ *anisotrope. Soit* ψ *une forme quadratique de dimension* 2^{n+1}. *Alors, on a équivalence entre:*
(1) $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope;*
(2) ψ *est voisine d'une* $(n+1)$*-forme de Pfister dont* φ *contient une voisine.*

Comme dans le corollaire 2.20 et lorsque $n = 3$, on obtient:

Corollaire 2.21. *Soit $\varphi \in L_{3,1}(F)$ anisotrope et ψ une forme quadratique telle que $11 \leq \dim \psi \leq 16$. On suppose que φ n'est pas voisine et $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$ lorsque $\dim \psi = 11$. Alors, on a équivalence entre:*
(1) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope;
(2) ψ est voisine d'une 4-forme de Pfister dont φ contient une voisine.

On introduit les notations suivantes:

Notations 2.22. *Soient $n \geq m \geq 1$ deux entiers. A un entier l tel que $m \geq l \geq 0$, on associe les ensembles suivants:*

1. *$L_{n,m,l}(F)$ est l'ensembles des formes $\alpha\pi \perp \beta\tau$ anisotropes avec $\alpha, \beta \in F^*$, $\pi \in P_nF$, $\tau \in P_mF$ et $i_W(\pi \perp -\tau) = 2^l$.*
2. *$(L_{n,m,l}(F))'$ est l'ensemble des formes $\alpha\pi' \perp \beta\tau'$ anisotropes avec $\alpha, \beta \in F^*$, $\pi = \langle 1 \rangle \perp \pi' \in P_nF$, $\tau = \langle 1 \rangle \perp \tau' \in P_mF$ et $i_W(\pi \perp -\tau) = 2^l$.*

Pour le cas des formes de $L_{n,m,m-1}(F)$, on combine la proposition 2.13 et les théorèmes 2.17, 2.19 pour obtenir:

Corollaire 2.23. *Soit $\varphi \in L_{n,m,m-1}(F)$ anisotrope et soit ψ une forme quadratique de dimension 2^{n+1}. Alors on a:*
(1) Si $n > m$, alors on a équivalence entre:
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope,
(ii) ψ est voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister dont φ contient une voisine.
(2) Si $n = m$ et F est de caractéristique 0 lorsque $n \geq 4$, alors on a équivalence entre:
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope,
(ii) ψ est voisine d'une $(n+1)$-forme de Pfister dont φ contient une voisine, ou $\varphi \perp \alpha\psi \in I^{n+2}F$ pour un certain $\alpha \in F^*$.

Pour le cas des formes de $L_{3,2,1}(F)$ on obtient:

Théorème 2.24. *On garde les mêmes notations que dans $(*)$. On suppose que $\varphi \in L_{3,2,1}(F)$ est anisotrope mais non voisine. Soit ψ une forme quadratique telle que $11 \leq \dim \psi \leq 16$.*
(1) Si $\dim \psi \geq 13$, alors on a équivalence entre:
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope,
(ii) ψ est voisine d'une 4-forme de Pfister dont φ contient une voisine.
(2) Si $\dim \psi = 12$, alors on a équivalence entre:
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope,
(ii) ψ est voisine d'une 4-forme de Pfister dont φ contient une voisine ou il existe $c \in F^*$, $r \in D_F(\tau)$ tels que $ab\pi \perp -\psi \perp c\eta \perp r\pi \in I^5F$.
(3) Si $\dim \psi = 11$ et $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$, alors on a équivalence entre:
(i) $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope,
(ii) $\varphi_{F(\psi')}$ est isotrope où $\psi' = \psi \perp \langle -d_\pm \psi \rangle$.

3. Les formes quadratiques de $(L_{n,m}(F))'$

Voici certains cas où l'isotropie d'une forme $\varphi \in (L_{n,m}(F))'$ a été étudiée:

1. Si $m = 1$, alors $\varphi_{F(\sqrt{u})} \in GP_nF(\sqrt{u})$ pour un certain $u \in F^*$. Dans ce cas, l'isotropie de φ a été étudiée par Hoffmann [9].
2. Si $n = m = 2$, alors l'isotropie de φ a été étudiée par Hoffmann [7], l'auteur [24] et Izhboldin-Karpenko [12], [13].

LEMME 3.1. *([8, Lemma 3]) Soient φ et ψ des formes quadratiques telles que $\psi \subset \varphi$ et $\dim \psi \geq \dim \varphi - i_W(\varphi) + 1$. Alors, ψ est isotrope.*

La proposition suivante précise que dans certains cas l'isotropie d'une forme de $(L_{n,m}(F))'$ se ramène à celle d'une forme de $L_{n,m}(F)$ qui la contient.

PROPOSITION 3.2. *Soient $\varphi' \in (L_{n,m,l}(F))'$ et $\varphi \in L_{n,m,l}(F)$ qui contient φ' comme une sous-forme. Si $l \geq 2$, alors pour toute extension de corps K/F on a φ_K isotrope si et seulement si φ'_K isotrope.*

Démonstration. Puisque $\varphi \in L_{n,m,l}(F)$, alors φ est divisible par une l-forme de Pfister. Ainsi, $i_W(\varphi_{F(\varphi)}) \geq 2^l$. Puisque $\dim \varphi = 2^n + 2^m$, $\dim \varphi' = 2^n + 2^m - 2$ et $l \geq 2$, on vérifie bien que $\dim \varphi' \geq \dim \varphi - i_W(\varphi_{F(\varphi)}) + 1$. Par le lemme 3.1 on a $\varphi'_{F(\varphi)}$ isotrope. Puisque $\varphi_{F(\varphi')}$ est isotrope, le résultat se déduit de [20, Theorem 3.3].

Pour la suite de cette section, on va se limiter à étudier l'isotropie des formes de $(L_{n,2,1}(F))'$ avec $n \geq 3$.

Soient $\pi = \pi' \perp \langle 1 \rangle \in P_nF$ (avec $n \geq 3$), $\tau = \tau' \perp \langle 1 \rangle \in P_2F$ et $b \in F^*$. On suppose $i_W(\pi \perp -\tau) = 2$. Par la proposition 2.1, il existe $d, d' \in F^*$ et $\pi_1 = \langle 1 \rangle \perp \pi'_1 \in P_{n-1}F$ tels que $\pi \cong \langle\langle d \rangle\rangle \otimes \pi_1$ et $\tau \cong \langle\langle d, d' \rangle\rangle$.

On fixe les notations suivantes:

$$(**) \qquad \begin{cases} \varphi = \pi' \perp b\tau' \\ \eta = -bd' \langle 1, -d \rangle \otimes \pi'_1 \perp \langle 1, bd \rangle \\ \pi_0 = \pi \perp -bd'\pi. \end{cases}$$

On suppose que φ est anisotrope.

LEMME 3.3. *Avec les mêmes notations et hypothèses que dans $(**)$, on a:*
(1) $\eta_{F(\pi)}$ est isotrope.
(2) La forme π_0 est anisotrope.
(3) Si φ n'est pas voisine, alors η est anisotrope.

Démonstration. Soit $\xi = -bd' \langle 1, -d \rangle \otimes \pi'_1$.
(1) On a $\xi \subset \eta$ et $-bd'\xi \subset \pi$. Puisque $n \geq 3$, on a $\dim \xi > 2^{n-1}$ et donc $\xi_{F(\pi)}$ est isotrope. Ainsi, $\eta_{F(\pi)}$ est aussi isotrope.
(2) La forme φ est anisotrope et $\pi' \perp -bd' \langle 1, -d \rangle$ est une sous-forme de π_0 et φ, de dimension $> 2^n$. Ainsi, π_0 est anisotrope.
(3) Supposons que φ ne soit pas une voisine et que η soit isotrope. Clairement, on a

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi' \perp -bd' \langle 1, -d \rangle \perp \xi \perp \langle 1 \rangle \\ \varphi = \pi' \perp -bd' \langle 1, -d \rangle \perp \langle -bd \rangle \end{cases} \tag{2}$$

La forme $\xi \perp \langle 1\rangle$ est anisotrope car c'est une sous-forme de π_0. Puisque η est isotrope, on obtient $\langle -bd\rangle \subset \xi \perp \langle 1\rangle$, et par (2) on voit bien que $\varphi \subset \pi_0$. Comme $\dim\varphi > 2^n$ on déduit que φ est une voisine de π_0, une contradiction.

Définition 3.4. *On garde les mêmes notations et hypothses que dans* $(**)$. *On définit* $S(\varphi)$ *comme étant l'ensemble des scalaires* $\alpha \in F^*$ *pour lesquels les deux formes* $\tau \perp \alpha\pi$ *et* $d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{an}$ *sont isotropes.*

Proposition 3.5. *Avec les mêmes notations et hypothses que dans* $(**)$, *on a:*
(1) L'ensemble $S(\varphi)$ *est non vide.*
(2) Si $\alpha \in S(\varphi)$, *alors* $\dim(d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{an})_{an} \leq 2^n$.
(3) On a $P_{n+1}F \cap W(F(\eta)/F) = \{\pi \perp \alpha\pi \mid \alpha \in S(\varphi)\}$.

Concernant l'isotropie de φ (φ comme dans $(**)$), on a le théorème suivant:

Théorème 3.6. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans* $(**)$. *Soit* ψ *une forme quadratique de dimension* 2^{n+1}. *Alors, on a équivalence entre:*
(1) $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope;*
(2) Il existe $s \in S(\varphi)$ *telle que* ψ *soit semblable à* $\pi \perp sbd'\pi$.

Lorsque $n = 3$, on obtient:

Théorème 3.7. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans* $(**)$. *On suppose que* $n = 3$. *Soit* ψ *une forme quadratique telle que* $11 \leq \dim\psi \leq 16$ *et* $\operatorname{ind} C_0(\psi) = 2$ *lorsque* $\dim\psi = 11$. *On a équivalence entre:*
(1) $\varphi_{F(\psi)}$ *est isotrope;*
(2) ψ *est voisine d'une* 4*-forme de Pfister* ρ *telle que* $\varphi_{F(\rho)}$ *soit isotrope.*

4. Quelques résultats cohomologiques

D'après Arason [1] il existe une application $\tilde{e}^n$ de P_nF vers H^nF, définie par $\tilde{e}^n(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle) = (a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)$. L'application $\tilde{e}^n$ se prolonge en un homomorphisme e^n de $I^nF/I^{n+1}F$ vers H^nF pour $n = 0, 1, 2$. On a $e^0(\varphi) = \dim\varphi \in H^0F \simeq \mathbb{Z}/2$, $e^1(\varphi) = d_\pm\varphi \in H^1F \simeq F^*/F^{*2}$, $e^2(\varphi) = c(\varphi) \in H^2F \simeq \mathrm{Br}_2(F)$ où $\mathrm{Br}_2(F)$ est la 2-torsion du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(F)$ de F. e^0, e^1 sont des isomorphismes. Lorsque $n = 3, 4$ l'application $\tilde{e}^n$ se prolonge en un homomorphisme de $I^nF/I^{n+1}F$ vers H^nF (Arason [1] pour $n = 3$ et Jacob-Rost [14] pour $n = 4$).

Dans le théorème suivant, on calcule le noyau $H^i(F_\epsilon/F)$ lorsque $i \leq n$:

Théorème 4.1. *On garde les mêmes notations que dans* $(*)$. *On suppose que* φ *est anisotrope et que* F *est de caractéristique* 0 *lorsque* $n \geq 5$. *Soit* F_ϵ *le corps de voisinage de* φ. *Alors* $\mid H^i(F_\epsilon/F) \mid \leq 2$ *pour* $i \leq n$. *Plus précisément:*

$$H^i(F_\epsilon/F) = \begin{cases} \{0\} & si \;\; n > i \\ \{0, e^n(\eta)\} & si \;\; n = i = m. \end{cases}$$

Si $n = i > m$, *alors* $H^i(F_\epsilon/F) \subset \{0, e^n(\pi)\}$ *et ce noyau est nul si la conjecture 2.9 est vraie.*

Pour la preuve de ce théorème on commence par un lemme préliminaire.

LEMME 4.2. *Soit* η *comme dans* $(*)$ *qu'on suppose non nulle, et soit* $(F_i, \eta_i)_{0\le i\le \mathrm{h}(\eta)}$ *sa tour de déploiement générique. On supposons que* $n = m$ *et que* F *est de caractéristique* 0 *lorsque* $n \geq 5$. *Alors:*
(1) $\deg(\eta) = n$.
(2) Si $\mathrm{h}(\eta) \geq 2$, *alors:*
(i) Pour tout $i \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\eta) - 2\}$ *la forme* $(\eta_i)_{F_i(\tau)}$ *est isotrope.*
(ii) Pour tout $(i, j) \in \{0, \cdots, \mathrm{h}(\eta) - 1\} \times \{0, \cdots, n\}$, *on a*

$$\mathrm{Ker}(H^j F \longrightarrow H^j F_i) = \{0\}.$$

Démonstration. Puisque $\eta \not\sim 0$, on a $h := \mathrm{h}(\eta) \geq 1$.
(1) On a $\eta \in I^n F$ et $\dim \eta_{\mathrm{an}} < 2^{n+1}$ ce qui implique $\deg(\eta) = n$.
(2) (i) Puisque $\deg(\eta) = n$, on obtient $\dim \eta_i > 2^n$ pour tout $i \in \{0, \cdots, h - 2\}$. De la relation $\eta_{F(\tau)} \sim \pi_{F(\tau)}$ on déduit $(\eta_i)_{F_i(\tau)} \sim \pi_{F_i(\tau)}$. Par raison de dimension la forme $(\eta_i)_{F_i(\tau)}$ est isotrope pour $i \in \{0, \cdots, h - 2\}$.
(ii) Soient $(i, j) \in \{0, \cdots, h - 1\} \times \{0, \cdots, n\}$ et $x \in \mathrm{Ker}(H^j F \longrightarrow H^j F_i)$. Le résultat est évident pour $i = 0$. Supposons $i \geq 1$. Par (i) l'extension $F_i(\tau)/F(\tau)$ est transcendante pure. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(H^j F \longrightarrow H^j F(\tau))$. Si $j < n$ on déduit par (R3) que $x = 0$. Si $j = n$ on déduit par (R1) que $x \in \{0, e^n(\tau)\}$. Si $x = e^n(\tau)$, alors par (R4) et le Hauptsatz $\tau_{F_i} \sim 0$. Par récurrence il suffit de considérer le cas τ_{F_1} hyperbolique. Ceci implique par le théorème de la sous-forme que $\tau \sim 0$ puisque $\mathrm{h}(\eta) \geq 2$ et donc $\dim \eta > 2^n$, une contradiction. Ainsi, $x = 0$.
Démonstration du théorème 4.1. Si $\eta \sim 0$, alors $F_\epsilon = F$ et le théorème est évident. Pour la suite, on suppose que $\eta \not\sim 0$ et donc $\mathrm{h}(\eta) \geq 1$. Soit $(\eta_0 = \eta_{\mathrm{an}}, \ldots, \eta_{\mathrm{h}(\eta)})$ la suite des noyaux de la tour de déploiement générique de η. Lorsque $n = m$, on a $\deg(\eta) = n$ par le lemme 4.2(1) et $\epsilon = \mathrm{h}(\eta)$ par la remarque 2.3. Soit $x \in H^i(F_\epsilon/F)$.

(1) Supposons $n > i$.

(i) Si $n > m$, alors $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure. Ainsi, $x \in H^i(F(\pi)/F)$. Puisque $\dim \pi = 2^n > 2^i$, on déduit par (R3) que $x = 0$.

(ii) Si $n = m$. On a $\eta_{\epsilon-1} \in GP_n(F_{\epsilon-1})$. Puisque $F_\epsilon = F_{\epsilon-1}(\eta_{\epsilon-1})$ et $x_{F_{\epsilon-1}} \in H^i(F_\epsilon/F_{\epsilon-1})$, on obtient par (R3) que $x \in H^i(F_{\epsilon-1}/F)$. Si $\epsilon = 1$, alors $x = 0$, sinon on déduit par le lemme 4.2(2) que $x = 0$.

(2) Supposons $n = i = m$. Puisque $x_{F_{\epsilon-1}} \in H^n(F_\epsilon/F_{\epsilon-1})$ et $\eta_{\epsilon-1} \in GP_n F_{\epsilon-1}$, on déduit par (R1) que $x_{F_{\epsilon-1}} \in \{0, e^n(\eta)_{F_{\epsilon-1}}\}$ (car $e^n(\eta)_{F_{\epsilon-1}} = e^n(\eta_{\epsilon-1})$). Soit $y \in H^n F$ une classe définie comme suit:

$$y = \begin{cases} x & \text{si } x_{F_{\epsilon-1}} = 0 \\ x + e^n(\eta) & \text{si } x_{F_{\epsilon-1}} = e^n(\eta)_{F_{\epsilon-1}}. \end{cases}$$

On a $y \in H^n(F_{\epsilon-1}/F)$. Si $\epsilon = 1$, alors $y = 0$, sinon le lemme 4.2(2) implique que $y = 0$.

(3) Supposons $n = i > m$. Comme dans le cas (1)(i) $x \in H^n(F(\pi)/F) = \{0, e^n(\pi)\}$. Si de plus la conjecture 2.9 est vraie alors π_{F_ϵ} est anisotrope et donc par le Hauptsatz $\pi_{F_\epsilon} \notin I^{n+1}F$. Par (R4) on a $e^n(\pi)_{F_\epsilon} \neq 0$ et donc $x = 0$.

Proposition 4.3. *On garde les mêmes notations que dans* $(*)$. *On suppose que* $n = m$ *et que* F *est de caractéristique* 0 *lorsque* $n \geq 5$. *Soit* ψ *une forme quadratique telle que* $\psi_{F_\epsilon} \in I^{n+1}F_\epsilon$. *Alors,* $\psi \in I^nF$.

Démonstration. Par hypothèse $e^i(\psi_{F_\epsilon}) = 0$ pour $i \leq n$. On affirme que si $\varphi \in I^jF$ pour un certain $j \in \{1, \cdots, n-1\}$, alors $\psi \in I^{j+1}F$. En effet, puisque $e^j(\psi)_{F_\epsilon} = 0$ on obtient par le théorème 4.1 que $e^j(\psi) = 0$ et par (R4) $\psi \in I^{j+1}F$. Comme $\psi \in IF$, on déduit par itération que $\psi \in I^nF$.

5. Démonstrations

5.1. Démonstration de la proposition 2.7.

Lemme 5.1. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans la proposition 2.7. Pour* K/F *une extension, on a:*
(1) Si $n > m$: $\varphi_K \sim 0 \Longleftrightarrow \pi_K \sim \tau_K \sim 0$ $(\Longleftrightarrow \zeta_K \sim \sigma_K \sim 0)$.
(2) Si $n = m$: φ_K *est voisine* $\Longleftrightarrow \pi_K \cong \tau_K$ $(\Longleftrightarrow \zeta_K \cong \sigma_K)$.

Démonstration. (1) C'est une simple conséquence de l'hypothèse $n > m$ et du fait qu'une forme de Pfister isotrope est hyperbolique.
(2) Dans ce cas $\dim \varphi = 2^{n+1}$. Il est clair que $\pi_K \cong \tau_K$ implique que $\varphi_K \in GP_{n+1}K$. Réciproquement, si $\varphi_K \in GP_{n+1}K$ alors $\varphi_{K(\pi)} \sim 0$ et donc $\tau_{K(\pi)} \sim 0$. On conclut par le théorème de la sous-forme et la multiplicativité d'une forme de Pfister.
Démonstration de la proposition. (1) Supposons $n > m$. Pour $i \in \{0, \cdots, \epsilon\}$ (resp. $j \in \{0, \cdots, \nu\}$) soit r_i (resp. s_j) tel que $2^{r_i} = i_W(\eta_{F_i})$ (resp. $2^{s_j} = i_W(\delta_{G_j})$). Puisque $2^{r_i} = i_W(\eta_{F_i})$, on obtient par la proposition 2.1 que les formes π_{F_i} et τ_{F_i} sont divisibles par une forme de $P_{r_i}F_i$. Par le lemme 5.1, on déduit que pour $i \in \{0, \cdots, \epsilon\}$ on a $i_W(\eta_{F_i}) = i_W(\delta_{F_i})$, et donc 2^{r_i} appartient à la suite des indices de déploiement de δ. De même pour $j \in \{0, \cdots, \nu\}$ l'entier 2^{s_j} appartient à la suite des indices de déploiement de η. Remarquons aussi que $2^{r_i}, 2^{s_j} \leq 2^m$ pour tout $(i, j) \in \{0, \cdots, \epsilon\} \times \{0, \cdots, \nu\}$. Ainsi, on déduit qu'on a nécessairement $\nu = \epsilon$ et par [21, Remark 5.5] on a que F_i est F-équivalent à G_i pour tout $i \in \{0, \cdots, \epsilon\}$.
(2) Supposons $n = m$. Par le lemme 5.1 on a $\zeta_{F_\epsilon} \cong \sigma_{F_\epsilon}$ et $\pi_{G_\nu} \cong \tau_{G_\nu}$. Ainsi, $i_W(\eta_{G_\nu}) = i_W(\delta_{F_\epsilon}) = 2^m$. Par [21, Remark 5.5] on a que F_ϵ est F-équivalent à G_ν.

5.2. Démonstration de la proposition 2.12. Supposons que φ_{F_ϵ} soit isotrope. Par la proposition 2.2(i) $(\pi_0)_{F_\epsilon} \sim 0$.
(i) Supposons $n > m$. Par la conjecture 2.10, on a $\pi_0 \cong \pi \perp r\pi$ pour un certain $r \in D_F(-\tau)$. Par simplification, on a $a\pi \cong br\pi$. Ainsi, $\varphi \cong br\pi \perp b\tau \cong br\pi \perp -br\tau$. Une contradiction car φ est anisotrope.

(ii) Supposons $n = m$. Par la conjecture 2.10 il existe $\alpha \in F^*$ tel que $\pi_0 \perp -(\eta \perp \alpha\eta) \in I^{n+2}F$. Ainsi, $ab\pi \perp \tau \perp -\alpha\eta \in I^{n+2}F$. Par le Hauptsatz $ab\pi \perp \tau = b\varphi$ est isotrope, une contradiction.

5.3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.13. (1) Si $i_W(\pi \perp -\tau) = 2^m$, alors par la proposition 2.2(iii) $F_\epsilon = F$ et la proposition est évidente.
(2) Si $i_W(\pi \perp -\tau) = 2^{m-1}$. Soient $\rho \in P_{m-1}F$, $\mu = \langle 1\rangle \perp \mu' \in P_{n-m+1}F$ et $d \in F^*$ tels que $\pi \cong \rho \otimes \mu$ et $\tau \cong \rho \otimes \langle\langle d\rangle\rangle$. On a $\eta_{\mathrm{an}} = \rho \otimes (\mu' \perp \langle d\rangle)$ et $F_\epsilon = F(\eta_{\mathrm{an}})$. Soit $\delta \in P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$.
(i) Si $n > m$, alors par la proposition 2.2(iv) $\delta_{F(\pi)} \sim 0$. Ainsi, $\delta \cong \pi \perp \alpha\pi$ pour un certain $\alpha \in F^*$. Par le théorème de la sous-forme, on a $\pi \perp \alpha\pi \cong s\rho \otimes (\mu' \perp \langle d\rangle) \perp \xi$ pour $s \in F^*$ et ξ une forme de dimension 2^n. Soit $e \in D_F(\rho \otimes \mu') \subset D_F(\pi)$. Puisque $e, es \in D_F(\pi \perp \alpha\pi)$, on peut supposer, par multiplicativité, que $s = 1$. Par simplification on a $\tau \perp \alpha\pi \sim \xi$. Par comparaison des dimensions, on a $\tau \perp \alpha\pi$ isotrope. Ainsi, il existe $r \in D_F(-\tau) \cap D_F(\alpha\pi)$. On a alors $\delta \cong \pi \perp r\pi$ avec $r \in D_F(-\tau)$.
(ii) Si $n = m$, alors $\eta_{\mathrm{an}} \in GP_mF$. Ainsi, il existe $x, y \in F^*$ tels que $\delta \cong \langle x, y\rangle \otimes \eta_{\mathrm{an}}$. On a bien $\delta \perp -(\eta \perp xy\eta) \in I^{n+2}F$.

5.4. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.16. (1) Supposons $n > m$:
(i) Supposons que la conjecture 2.10 soit vraie. Soit $x \in H^{n+1}(F_\epsilon/F)$. Puisque $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure, on déduit que $x \in H^{n+1}(F(\pi)/F)$. Par (R1) il existe $\alpha \in F^*$ tel que $x = e^{n+1}(\pi \perp \alpha\pi)$. Puisque $x_{F_\epsilon} = 0$, on a $e^{n+1}((\pi \perp \alpha\pi)_{F_\epsilon}) = 0$. Par (R4) on a $(\pi \perp \alpha\pi)_{F_\epsilon} \in I^{n+2}F_\epsilon$. Par le Hauptsatz, on a $\pi \perp \alpha\pi \in W(F_\epsilon/F)$. D'après la conjecture 2.10, on déduit que $\pi \perp \alpha\pi \cong \pi \perp -r\pi$ avec $r \in D_F(\tau)$. Ainsi, $x = e^n(\pi)(r)$ avec $r \in D_F(\tau)$.
(ii) Supposons que la conjecture 2.15 soit vraie. Soit $\rho \in P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$. Alors, $e^{n+1}(\rho) \in H^{n+1}(F_\epsilon/F)$. Par la conjecture 2.15 on a $e^{n+1}(\rho) = e^n(\pi)(r)$ avec $r \in D_F(\tau)$. Par (R4) on a $\rho \perp -(\pi \perp -r\pi) \in I^{n+2}F$. Puisque $\dim(\rho \perp -(\pi \perp -r\pi))_{\mathrm{an}} < 2^{n+2}$, le résultat se déduit par le Hauptsatz.
(2) Supposons $n = m$:
Supposons que la conjecture 2.15 soit vraie. Soit $\delta \in P_{n+1}F \cap W(F_\epsilon/F)$. Alors, $e^{n+1}(\delta) \in H^{n+1}(F_\epsilon/F)$. Par la conjecture 2.15 il existe $s \in F^*$ tel que $e^{n+1}(\delta) = e^n(\eta)(-s)$. Par (R4) on obtient $\delta \perp -(\eta \perp s\eta) \in I^{n+2}F$.

5.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.19. (1) C'est une conséquence de [8, Theorem 1].

Puisque la conjecture 2.10 implique la conjecture 2.9, on déduit qu'on a par hypothèse $(\pi_0)_{F_\epsilon}$ anisotrope.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Si $\psi \in P_{n+1}F$ et φ contient une voisine de ψ, alors on sait que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope. Si $\varphi \perp \alpha\psi \in I^{n+2}F$, alors par le Hauptsatz on a $(\varphi \perp \alpha\psi)_{F(\psi)} \sim 0$ et donc $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope.
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit ψ de dimension 2^{n+1} tel que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. En particulier, $(\pi_0)_{F_\epsilon(\psi)}$ est isotrope et donc hyperbolique. On peut supposer que $1 \in D_F(\psi)$.

Ainsi,

$$\psi_{F_\epsilon} \cong (\pi_0)_{F_\epsilon} \tag{3}$$

• Si $n > m$: Par la proposition 2.2(iv) et l'équation (3) $\psi \in W(F(\pi)/F)$. Ainsi, $\psi \cong \pi \perp \alpha\pi$ pour un certain $\alpha \in F^*$. Par l'équation (3), on a $\alpha\pi \perp -ab\pi \in W(F_\epsilon/F)$. Par la conjecture 2.10, $\pi \perp -ab\alpha\pi \cong \pi \perp r\pi$ pour un certain $r \in D_F(-\tau)$. Par la simplification de Witt, on a $ab\alpha\pi \cong -r\pi$. Ainsi, $\varphi \cong -br(\alpha\pi \perp \tau)$. Puisque $\psi \cong \pi \perp \alpha\pi$, on voit que $-br(\alpha\pi \perp \langle 1\rangle)$ est une voisine de ψ contenue dans φ. Donc l'assertion (2) est prouvée.
• Si $n = m$: Puisque $\psi_{F_\epsilon} \in I^{n+1}F_\epsilon$ on déduit par la proposition 4.3 que $\psi \in I^nF$. Ainsi, $e^n(\psi) \in H^n(F_\epsilon/F)$. Par le théorème 4.1, on a $e^n(\psi) \in \{0, e^n(\eta)\}$.
(i) Si $e^n(\psi) = e^n(\eta)$, alors $\psi \perp -\eta \in I^{n+1}F$ par (R4). On a $e^{n+1}(\psi \perp -\eta)_{F_\epsilon} = e^{n+1}(\psi_{F_\epsilon})$ (car $\eta_{F_\epsilon} \sim 0$). Par l'équation (3) on a $e^{n+1}(\psi \perp -\eta)_{F_\epsilon} = e^{n+1}(\pi_0)_{F_\epsilon}$. Par la conjecture 2.15 on a $e^{n+1}(\psi \perp -\eta) + e^{n+1}(\pi_0) = e^{n+1}(\eta \perp r\eta)$ pour un certain $r \in F^*$. Par (R4) on a $\psi \perp -\eta \perp \pi_0 \perp \eta \perp r\eta \in I^{n+2}F$. Après simplification et puisque $\pi_0 \perp r\pi_0 \in I^{n+2}F$, on obtient $\psi \perp -rb\varphi \in I^{n+2}F$.
(ii) Si $e^n(\psi) = 0$, alors $\psi \in I^{n+1}F$ et donc $\psi \in P_{n+1}F$. Par l'équation (3) $e^{n+1}(\psi \perp -\pi_0) \in H^{n+1}(F_\epsilon/F)$. Par la conjecture 2.15 il existe $s \in F^*$ tel que $e^{n+1}(\psi \perp -\pi_0) = e^{n+1}(\eta \perp s\eta)$. Par (R4) on a $\psi \perp -\pi_0 \perp \eta \perp s\eta \in I^{n+2}F$. Après simplification, on a $\psi \perp -b\varphi \perp s\eta \in I^{n+2}F$. Puisque η est isotrope, on a $\dim(-b\varphi \perp s\eta)_{\text{an}} < 2^{n+2}$. Par le Hauptsatz on a $(-b\varphi \perp s\eta)_{F(\psi)} \sim 0$. Par conséquent, $-b\varphi \perp s\eta \sim u\psi$ pour un certain $u \in F^*$. On a $\dim \eta_{\text{an}} < 2^{n+1}$. Ainsi, $i_W(-b\varphi \perp -u\psi) > 2^n$, et donc les formes $-b\varphi$ et $u\psi$ contiennent en commun une sous-forme μ de dimension $> 2^n$ c'est-à-dire φ contient une voisine de ψ. Donc l'assertion (3) est prouvée.

5.6. Démonstration du corollaire 2.21. Dans ce cas, φ_{F_ϵ} est une voisine anisotrope de $(\pi_0)_{F_\epsilon}$.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Evident.
(1) $\Longrightarrow$ (2) Puisque φ n'est pas voisine, on a $i_W(\eta) = 1$ et donc η_{an} est de dimension 8. Par la proposition 2.2(ii) on a $F_\epsilon = F(\eta_{\text{an}})$. Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope et $1 \in D_F(\psi)$. Alors, ψ_{F_ϵ} est une sous-forme de $(\pi_0)_{F_\epsilon}$. On écrit $(\pi_0)_{F_\epsilon} \cong \psi_{F_\epsilon} \perp \xi'$ avec ξ' est une F_ϵ-forme quadratique.
(i) Si $\dim \psi \geq 13$, alors $\dim \xi' \leq 3$. D'après [16, Theorem 2] il existe δ_1 une F-forme telle que $\xi' \cong (\delta_1)_{F_\epsilon}$. On pose $\psi_1 = \psi \perp \delta_1$. On a $(\pi_0)_{F_\epsilon} \cong (\psi_1)_{F_\epsilon}$. D'après les propositions 2.13 et 2.12, on obtient $\varphi_{F(\psi_1)}$ isotrope.
(ii) Si $\dim \psi = 12$, alors $\dim \xi' = 4$. On a $\eta_{\text{an}} \notin I^2F$. D'après [16, Theorem 6] il existe δ_2 une F-forme telle que $\xi' \cong (\delta_2)_{F_\epsilon}$. On pose $\psi_2 = \psi \perp \delta_2$. Comme dans le cas (i) $\varphi_{F(\psi_2)}$ est isotrope.
(iii) Si $\dim \psi = 11$ et $\operatorname{ind} C_0(\psi) \leq 2$. Comme $c(\psi)_{F_\epsilon} = c(\xi')$ et $\dim \xi' = 5$, on déduit que $\xi' \cong \langle d'\rangle \perp \tau$ pour $\tau \in GP_2F_\epsilon$ et $d' = d_\pm \xi' = -d_\pm \psi$ [21, Page 10]. D'après [16, Theorem 6] il existe $\delta_3 \in GP_2F$ telle que $\tau \cong (\delta_3)_{F_\epsilon}$. On pose $\psi_3 = \psi \perp \langle d'\rangle \perp \delta_3$. Comme dans le cas (i) $\varphi_{F(\psi_3)}$ est isotrope.

Dans chacun des trois cas précédents, on obtient par le théorème 2.19 que $\psi_i \in GP_{n+1}F$ et φ contient une voisine de ψ_i pour $i = 1, 2, 3$. Par conséquent, ψ est voisine d'une 4-forme de Pfister dont φ contient une voisine.

5.7. Démonstration du théorème 2.24. On suppose $1 \in D_F(\psi)$. Puisque $i_W(\eta) = 2$, on a $\dim \eta_{\mathrm{an}} = 8$, et par la proposition 2.2(ii) $F_\epsilon = F(\eta_{\mathrm{an}})$. Dans ce cas la conjecture 2.10 est vraie (proposition 2.13). Ainsi, φ_{F_ϵ} est une voisine anisotrope de $(\pi_0)_{F_\epsilon}$. Posons $d = d_\pm \psi$.
Supposons que $\varphi_{F(\psi)}$ soit isotrope. Alors, $(\pi_0)_{F_\epsilon(\psi)} \sim 0$, et par conséquent

$$(\pi_0)_{F_\epsilon} \cong \psi_{F_\epsilon} \perp \xi \tag{4}$$

pour ξ une F_ϵ-forme quadratique.
(1) On suppose que $\dim \psi \geq 13$. Dans ce cas on reprend la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du corollaire 2.21 pour montrer qu'il existe $\psi' \in GP_4F$ tel que $\psi \subset \psi'$ et φ contient une voisine de ψ'.
(2) On suppose que $\dim \psi = 12$. On a $c(d\psi)_{F_\epsilon} = c(\xi)$ et $c(\eta_{\mathrm{an}}) = c(\tau)$.
(i) Si $d \neq 1$, alors d'aprés [16, Théorème 2], il existe ξ' une F-forme de dimension 4 telle que $\xi = (\xi')_{F_\epsilon}$. Puisque $(\pi_0)_{F_\epsilon} \cong (\psi \perp \xi')_{F_\epsilon}$, on déduit par la proposition 2.13 que π_0 est isotrope sur $F(\psi \perp \xi')$. Par le théorème 2.19 on a $\psi \perp \xi' \in GP_4F$ et φ contient une voisine de $\psi \perp \xi'$.
(ii) Si $d = 1$ et $c(\psi) \neq c(\tau)$. Alors, $c(\psi)_{F_\epsilon} \neq c(\tau)_{F_\epsilon}$ car $H^2(F_\epsilon/F) = \{0\}$ (théorème 4.1). Ainsi, $c(\xi) \neq c(\tau)_{F_\epsilon}$. De nouveau par [16, Théorème 2] il existe ξ'' une F-forme de dimension 4 telle que $\xi \cong \xi''_{F_\epsilon}$. Comme dans le cas (i) on a $\psi \perp \xi'' \in GP_4F$ et φ contient une voisine de $\psi \perp \xi''$.
(iii) Si $d = 1$ et $c(\psi) = c(\tau)$, alors ξ est semblable à τ. Ainsi, $(\pi_0)_{F_\epsilon(\tau)} \sim 0$ et donc $\psi_{F_\epsilon(\tau)} \sim 0$. Comme $F_\epsilon(\pi)/F(\pi)$ est transcendante pure, on obtient $\psi_{F(\pi)(\tau)} \sim 0$.
• Si $\psi_{F(\tau)} \sim 0$, alors ψ est divisible par τ et donc voisine d'une 4-forme de Pfister ρ. Par conséquent, $\varphi_{F(\rho)}$ est isotrope et par le théorème 2.19 φ contient une voisine de ρ.
• Si $\psi_{F(\tau)} \not\sim 0$. Alors $\psi_{F(\tau)} \sim \lambda\pi$ pour un certain $\lambda \in F(\tau)^*$. Par l'excellence de $F(\tau)/F$ ([2], [34]) il existe π_1 une F-forme quadratique de dimension 8 telle que $\psi_{F(\tau)} \sim (\pi_1)_{F(\tau)}$. Puisque $c(\pi_1)_{F(\tau)} = 0$, on peut supposer que $\pi_1 \in GP_3F$ [4, 2.10]. Puisque $\psi \perp -\pi_1 \perp \tau \in I^3F$, on obtient que $e^3(\psi \perp -\pi_1 \perp \tau) \in H^3(F(\tau)/F) = c(\tau) \cdot H^1F$ [1]. Ainsi, il existe $c \in F^*$ tel que $e^3(\psi \perp -\pi_1 \perp \tau) = c(\tau) \cdot (c) = e^3(\tau \perp -c\tau)$. Par conséquent,

$$\psi \perp -\pi_1 \perp c\tau \in I^4F \tag{5}$$

Soit $\alpha \in D_F(\pi_1)$. Puisque $\lambda\pi \cong (\pi_1)_{F(\tau)}$, on a $\pi_{F(\tau)} \cong (\alpha\pi_1)_{F(\tau)}$. Ainsi, $(\pi \perp -\alpha\pi_1)_{F(\tau)} \sim 0$. Comme $\dim(\pi \perp -\alpha\pi_1)_{\mathrm{an}} \leq 14$ et $c(\pi \perp -\alpha\pi_1) = 0$, on obtient

$$\pi \perp -\alpha\pi_1 \sim \rho' \otimes \tau \tag{6}$$

pour ρ' une forme quadratique de dimension paire ≤ 2. Des équations (5) et (6) et modulo I^4F, on obtient

$$\psi \perp -\pi \perp (\rho' \perp \langle c \rangle) \otimes \tau \in I^4F \tag{7}$$

Soit $e \in F^*$ tel que $(\rho' \perp \langle c\rangle) \otimes \tau \perp e\tau \in I^4F$. De l'équation (7) on a $\psi \perp -\pi \perp -e\tau \in I^4F$. Avec l'équation (4) on a

$$(ab\pi)_{F_\epsilon} \perp -\xi \perp (-e\tau)_{F_\epsilon} \in I^4F_\epsilon \tag{8}$$

En particulier, $(ab\pi)_{F_\epsilon} \perp -\xi \perp (-e\tau)_{F_\epsilon} \in GP_4F_\epsilon$. Ainsi, $\pi_{F_\epsilon} \cong \tau_{F_\epsilon} \perp e\xi$. Par conséquent, $(e\eta)_{F_\epsilon} \sim \xi$ et par l'équation (4) $(\pi_0)_{F_\epsilon} \sim (\psi \perp e\eta)_{F_\epsilon}$. Comme $\mu := \pi_0 \perp -\psi \perp -e\eta \in I^3F$ (car d'invariant de Clifford trivial), on a $e^3(\mu)_{F_\epsilon} = 0$. Puisque η_{an} n'est pas voisine, on a $H^3(F_\epsilon/F) = \{0\}$ [1]. Par conséquent $\mu \in I^4F$ et donc $e^4(\mu) \in H^4(F_\epsilon/F)$. D'après les propositions 2.13 et 2.16, il existe $r \in D_F(\tau)$ tel que $e^4(\mu) = e^3(\pi)\cdot(r)$. Par (R4) $ab\pi \perp -\psi \perp -e\eta \perp r\pi \in I^5F$. D'où le résultat.
Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in F^*$, $y \in D_F(\tau)$ tels que $ab\pi \perp -\psi \perp x\eta \perp y\pi \in I^5F$. Alors, $\pi_0 \perp -\psi \perp x\eta \perp -(\pi \perp -y\pi) \in I^5F$. Par la proposition 2.11(1) on a $\pi \perp -y\pi \in W(F_\epsilon/F)$. Ainsi, $(\pi_0 \perp -\psi \perp x\eta)_{F_\epsilon} \in I^5F_\epsilon$. Puisque $\dim(\eta_{F_\epsilon})_{\mathrm{an}} = 4$, on obtient $\nu := (\pi_0 \perp -\psi)_{F_\epsilon} \perp ((x\eta)_{F_\epsilon})_{\mathrm{an}} \in GP_5F_\epsilon$. Par le Hauptsatz, $\nu_{F_\epsilon(\psi)} \sim 0$ c'est-à-dire $(\pi_0)_{F_\epsilon(\psi)} \sim \psi_{F_\epsilon(\psi)} \perp -((x\eta)_{F_\epsilon(\psi)})_{\mathrm{an}}$. Ainsi, $(\pi_0)_{F_\epsilon(\psi)}$ est isotrope. On applique successivement les propositions 2.13 et 2.12 pour déduire que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope.
(3) On suppose que $\dim\psi = 11$:
Puisque $\operatorname{ind} C_0(\psi) \le 2$, on a aussi $\operatorname{ind} C_0(\xi) \le 2$ et donc $\xi = \langle d\rangle \perp \xi'$ pour une certaine $\xi' \in GP_2F_\epsilon$ [21, Page 10] (c'est-à-dire ξ est voisine). Par conséquent, $(\pi_0)_{F_\epsilon(\delta)} \sim 0$ où $\delta = \psi \perp \langle d\rangle$. On applique successivement les propositions 2.13 et 2.12 pour déduire que $\varphi_{F(\delta)}$ est isotrope.

5.8. Démonstration de la proposition 3.5.

Lemme 5.2. *On garde les mêmes notations que dans* $(**)$. *Soit* $\eta_1 = \langle 1, -d\rangle \otimes \pi_1' \perp \langle -dd'\rangle$ *et* $\eta' = \eta_1 \perp \langle d'\rangle$. *Alors, on a:*
(1) $W(F(\eta)/F) \subset W(F(\eta_1)/F)$.
(2) $c(\eta') = c(\tau)$, $\eta' \in I^2F$ *et les corps* $F(\eta_1)$ *et* $F(\eta')$ *sont* F*-équivalents. En particulier,* $W(F(\eta)/F) \subset W(F(\eta')/F)$.
(3) La forme η_1 *n'est pas une voisine.*

Démonstration. (1) Puisque $\eta_1 \subset -bd'\eta$, on a que $\eta_{F(\eta_1)}$ est isotrope et donc il existe une F-place de $F(\eta)$ vers $F(\eta_1)$ [20, Theorem 3.3]. Par conséquent, $W(F(\eta)/F) \subset W(F(\eta_1)/F)$.
(2) On vérifie facilement que $c(\eta') = c(\tau)$. Il est clair que $\eta' = \langle 1, -d\rangle \otimes (\pi_1' \perp \langle d'\rangle)$. Ainsi, $\eta' \in I^2F$ et $i_W(\eta'_{F(\eta')}) \ge 2$. Par le lemme 3.1 η_1 est isotrope sur $F(\eta')$. Puisque η' est isotrope sur $F(\eta_1)$, les corps $F(\eta')$ et $F(\eta_1)$ sont F-équivalents et donc $W(F(\eta_1)/F) = W(F(\eta')/F)$. Par l'assertion (1) on obtient $W(F(\eta)/F) \subset W(F(\eta')/F)$.
(3) Si η_1 était voisine, on aurait $\eta' \in GP_nF$ (car $\dim\eta' = 2^n$) et donc $c(\eta') = c(\tau) = 0$, une contradiction.
Le théorème suivant jouera un rôle important dans la démonstration.

Théorème 5.3. *(Fitzgerald* [5, Proposition 1.4]*)*
Soient φ une forme quadratique voisine d'une n-forme de Pfister ρ et $\varphi' = \varphi \perp \langle y\rangle$ pour $y \in F^*$. Supposons que φ' ne soit pas voisine de ρ. Soit $\varphi'' \in W(F(\varphi')/F)$. Alors, $\varphi'' \cong \pi_1 \perp \cdots \perp \pi_s$ pour un certain entier $s \geq 1$ et $\pi_i \in GP_{n+1}F \cap W(F(\varphi')/F)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$.

Démonstration de la proposition. (1) On a $-1 \in S(\varphi)$. En effet, il est clair que $\tau \perp -\pi$ est isotrope. Puisque $i_W(\tau \perp -\pi) = 2$, on déduit que $(\tau \perp -\pi)_{\mathrm{an}} = \langle\langle d\rangle\rangle \otimes (-\pi_1' \perp \langle -d'\rangle)$ et donc $-d' \in D_F((\tau \perp -\pi)_{\mathrm{an}})$. Ainsi, $d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp -\pi)_{\mathrm{an}}$ est isotrope.
(2) Puisque $\tau \perp \alpha\pi$ est isotrope, alors $(\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}}$ est semblable à $(\tau \perp -\pi)_{\mathrm{an}}$ qui est de dimension 2^n. Puisque $d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}}$ est isotrope, le résultat s'en déduit.
(3) Soit $\rho \in P_{n+1}F \cap W(F(\eta)/F)$ anisotrope. Puisque η est isotrope sur $F(\pi)$ (lemme 3.3), on déduit que $\rho_{F(\pi)} \sim 0$. Alors,

$$\rho \cong \pi \perp \alpha\pi$$

pour $\alpha \in F^*$. Par le théorème de la sous-forme on a

$$\rho \cong -bd'\eta \perp \xi$$

pour ξ une forme de dimension 2^n. La simplification de Witt dans la relation $\rho \cong \pi \perp \alpha\pi \cong -bd'\eta \perp \xi$ implique

$$\langle 1, -d\rangle \perp \alpha\pi \cong \langle -bd', -dd'\rangle \perp \xi \tag{9}$$

Par le lemme 5.2(2) on a $\rho_{F(\eta')} \sim 0$, et par le théorème de la sous-forme on a $\rho \cong \eta' \perp \xi'$ pour ξ' une forme quadratique de dimension 2^n (η' comme dans le lemme 5.2). La simplification de Witt dans la relation $\rho \cong -bd'\eta \perp \xi \cong \eta' \perp \xi'$ implique

$$\xi \sim d'\langle 1, b\rangle \perp \xi' \tag{10}$$

Des équations (9) et (10) on obtient

$$\tau \perp \alpha\pi \sim \xi'.$$

On substitue dans l'équation (10) pour obtenir $\xi \sim d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}}$. Par comparaison des dimensions on a $d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}}$ isotrope. D'où le résultat.
Réciproquement, soit $\alpha \in S(\varphi)$ et $\rho = \pi \perp \alpha\pi \in P_{n+1}F$. On vérifie facilement les relations

$$-bd'\eta \sim \langle 1, -d\rangle \otimes \pi_1' \perp \langle -bd', -dd'\rangle \tag{11}$$

$$\pi \perp -\tau \sim \langle 1, -d\rangle \otimes \pi_1' \perp d'\langle 1, -d\rangle \tag{12}$$

Des relations (11) et (12) on a

$$-bd'\eta \sim (\pi \perp -\tau)_{\mathrm{an}} \perp -d'\langle 1, b\rangle \tag{13}$$

Puisque $\rho \sim (\pi \perp -\tau)_{\mathrm{an}} \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}}$, on a par l'équation (13) que

$$\rho \sim -bd'\eta \perp (d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}})_{\mathrm{an}}.$$

Puisque $\dim \eta = 2^n$ et $\dim(d'\langle 1, b\rangle \perp (\tau \perp \alpha\pi)_{\mathrm{an}})_{\mathrm{an}} \leq 2^n$, on déduit que $\rho_{F(\eta)}$ est isotrope.

5.9. Démonstration du théorème 3.6.

Proposition 5.4. *La forme $\varphi_{F(\eta)}$ est une voisine anisotrope de $(\pi_0)_{F(\eta)}$.*

Démonstration. Comme dans la démonstration de l'assertion (3) du lemme 3.3 on a $\varphi_{F(\eta)} \subset (\pi_0)_{F(\eta)}$. Si $(\pi_0)_{F(\eta)}$ est isotrope, alors on obtient par le théorème de la sous-forme

$$\pi \perp -bd'\pi \cong x\eta \perp \xi$$

pour ξ une forme quadratique de dimension 2^n et $x \in F^*$. Soit $\beta \in D_F(\pi_1')$. Alors, $-bd'\beta \in D_F(\eta) \cap D_F(\pi \perp -bd'\pi)$. Comme $-xbd'\beta \in D_F(x\eta) \subset D_F(\pi \perp -bd'\pi)$, on peut supposer, par multiplicativité, que $x = 1$. Par simplification, on obtient que $\varphi \sim \xi$. Une contradiction, car φ est anisotrope.

Démonstration du théorème. On suppose que $1 \in D_F(\psi)$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Puisque $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope, on déduit que $\varphi_{F(\eta)(\psi)}$ est isotrope et donc $(\pi_0)_{F(\eta)(\psi)} \sim 0$. Comme $(\pi_0)_{F(\eta)}$ est anisotrope (proposition 5.4), on a par le théorème de la sous-forme $(\pi_0)_{F(\eta)} \cong \psi_{F(\eta)}$. Ainsi, $\pi_0 \perp -\psi \in W(F(\eta)/F)$. On a $\dim(\pi_0 \perp -\psi)_{\mathrm{an}} \leq 2^{n+2} - 2 < 2^{n+2}$. Soit η_1 comme dans le lemme 5.2. Puisque $W(F(\eta)/F) \subset W(F(\eta_1)/F)$ et η_1 n'est pas voisine (lemme 5.2), il existe par le théorème 5.3 une forme $\rho \in GP_{n+1}F \cap W(F(\eta_1)/F$ telle que

$$(\pi_0 \perp -\psi)_{\mathrm{an}} \sim \rho \tag{14}$$

Comme $\pi_0, \rho \in P_{n+1}F$, on a $\psi \in I^{n+1}F$ et donc $\psi \in P_{n+1}F$. On a aussi $\rho_{F(\eta)} \sim 0$ (car $(\pi_0 \perp -\psi)_{F(\eta)} \sim 0$). Par la proposition 3.5, il existe $s \in S(\varphi)$, $u \in F^*$ tels que $\rho \cong u(\pi \perp s\pi)$. De l'équation (14) on a $\pi_0 \perp -\rho$ isotrope. Soit $v \in D_F(\pi_0) \cap D_F(\rho)$. Alors, $\pi_0 \perp -\rho \sim v(\pi_0 \perp -(\pi \perp s\pi)) \sim \psi$. Ainsi, $\psi \cong -vs(\pi \perp sbd'\pi)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit $s \in S(\varphi)$ tel que ψ soit semblable à $\rho := \pi \perp sbd'\pi$. On a $\pi_0 \perp -\rho \sim -bd'(\pi \perp s\pi)$. D'après la proposition 3.5, on déduit que $(\pi_0 \perp -\rho)_{F(\eta)} \sim 0$. Ainsi, $(\pi_0)_{F(\eta)} \cong \rho_{F(\eta)}$. Par la proposition 5.4, on déduit que $\varphi_{F(\rho)}$ est isotrope et donc $\varphi_{F(\psi)}$ l'est aussi.

5.10. Démonstration du théorème 3.7. Par la proposition 5.4, on a que $\varphi_{F(\psi)}$ est isotrope si et seulement si $\psi_{F(\eta)}$ est semblable à une sous-forme de $(\pi_0)_{F(\eta)}$. La forme $\eta \notin I^2F$ car sinon par un simple calcul on aurait φ isotrope. Puisque η est de dimension 8 on peut utiliser les mêmes techniques de descente que dans la démonstration du corollaire 2.21, et on finit la preuve en utilisant le théorème 3.6.

Bibliographie

[1] *J. Kr. Arason*, Cohomologische Invarianten quadratischer Formen, J. Alg. 36 (1975), 448–491.

[2] *J. Kr. Arason*, Excellence of $F(\varphi)/F$ for 2-fold Pfister forms, Appendice de [4].

[3] *R. Elman, T. Y. Lam*, Pfister forms and K-theory of fields, J. Alg. 23 (1972), 181–213.

[4] *R. Elman, T. Y. Lam, A. Wadsworth*, Amenable fields and Pfister extensions, Conf. Quadratic forms (1976) (G. Orzech, ed.). Queen's papers on Pure and Appl. Math. 46. Queen's Univ. Kingston, Ont., 445–492 (1977).

[5] *R. W. Fitzgerald*, Witt kernels of function fields extensions, Pacific J. Math. 109 (1983), 89–106.

[6] *D. W. Hoffmann*, Isotropy of 5-dimensional quadratic forms over the function field of a quadric, Proceedings of 1992 Santa Barbara Summer Research Institute (eds. B. Jacob, A. Rosenberg). Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 217–225.

[7] *D. W. Hoffmann*, On 6-dimensional quadratic forms isotropic over the function field of a quadric, Comm. Alg. 22 (1994), 1999–2014.

[8] *D. W. Hoffmann*, Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric, Math. Z. 220 (1995), 461–476.

[9] *D. W. Hoffmann*, Twisted Pfister forms, Doc. Math. J. DMV 1 (1996), 67–102.

[10] *J. Hurrelbrink, U. Rehmann*, Splitting patterns of excellent quadratic forms, J. reine angew. Math. 444 (1993), 183–192.

[11] *J. Hurrelbrink, U. Rehmann*, Splitting patterns and linear combinations of two Pfister forms, J. reine angew. Math. 495 (1998), 163–174.

[12] *O. T. Izhboldin, N. A. Karpenko*, Isotropy of virtual Albert forms over function fields of quadrics, Math. Nachr. 206 (1999), 111-122.

[13] *O. T. Izhboldin, N. A. Karpenko*, Isotropy of 6-dimensional quadratic forms over function fields of quadrics, J. Algebra 209 (1998), 65-93.

[14] *W. Jacob, M. Rost*, Degree four cohomological invariants for quadratic forms, Invent. Math. 96 (1989), 551–570.

[15] *B. Kahn*, Les formes quadratiques de hauteur et de degré 2, Indag. Mathem. 7 (1), 47–66 (1996).

[16] *B. Kahn*, A descent problem for quadratic forms, Duke Math. J. 80.1, 139–159 (1995).

[17] *B. Kahn, M. Rost et R. Sujatha,* Unramified cohomology of quadrics, I, Amer. J. Math. 120 (1998), 841–891.

[18] *B. Kahn, R. Sujatha,* Motivic cohomology and unramified cohomology of quadrics, J. Eur. Math. Soc. 2 (2000), 145–177.

[19] *B. Kahn, R. Sujatha,* Unramified cohomology of quadrics, II, Duke Math. J. 106.3 (2001), 449–484.

[20] *M. Knebusch*, Generic splitting of quadratic forms I, Proc. London. Math. Soc. 33 (1976) 65–93.

[21] *M. Knebusch*, Generic splitting of quadratic forms II, Proc. London. Math. Soc. 34 (1977) 1–31.

[22] *A. Laghribi*, Isotropie de certaines formes quadratiques de dimensions 7 et 8 sur le corps des fonctions d'une quadrique, Duke Math. J. 85.2 (1996), 397–410.

[23] *A. Laghribi*, Formes quadratiques en 8 variables dont l'algèbre de Clifford est d'indice 8, K-Theory J. 12.4 (1997), 371–383.

[24] *A. Laghribi*, Formes quadratiques de dimension 6, Math. Nach. 204 (1999), 125–135.

[25] *T. Y. Lam*, The algebraic theory of quadratic forms, (2^e édition) Benjamin, New York, 1980.

[26] *T. Y. Lam*, Fields of u-invariant 6 after A. S. Merkurjev, Israel Math. Conf. Proc. Vol. 1: Ring Theory 1989 (in honor of S. A. Amitsur), (L. Rowen, ed.), Weismann Science Press, Jerusalem, 1989, pp. 12–31.

[27] *D. Leep*, Function fields results, notes manuscrites prises par T. Y. Lam, 1989.

[28] *A. S. Merkurjev*, L'homomorphisme de résidu normique de degré 2 (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 261 (1981), 542–547. Traduction anglaise : Soviet Math. Doklady 24 (1981), 546–551.

[29] *A. S. Merkurjev, A. A. Suslin*, L'homomorphisme de résidu normique de degré 3 (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR 54 (1990), 339–356. Traduction anglaise: Math. USSR Izv. 36 (1991), 349–367.

[30] F. Morel, *Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques,* C. R. Acad. Sci. Paris 328 (1999), 963–968.

[31] *D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky:* An exact sequence for Milnor's K-theory with applications to quadratic forms, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/454/.

[32] *E. Peyre*, Products of Severi–Brauer varieties and Galois cohomology, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara, 1992. Volume 58.2, 369–401.

[33] *M. Rost*, Hilbert's theorem 90 for K_3^M for degree-two extensions, prépublication, Regensburg, 1986.

[34] *M. Rost*, On quadratic forms isotropic over the function field of a conic, Math. Ann. 288 (1990), 511–513.

[35] *D. Shapiro*, Similarities, quadratic forms, and Clifford algebras, PhD Thesis, California University, Berkeley, 1974.

[36] *W. Scharlau*, Quadratic and Hermitian forms, Springer, Berlin, 1985.

[37] *M. Szyjewski*, The fifth invariant of quadratic forms, (in Russian), Algebra i Analiz. 2 (1990), 213–234. English translation: St. Petersburg Math. J. 2 (1991), 179–198.

[38] *V. Voevodsky*, The Milnor conjecture, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/.

[39] *A. R. Wadsworth,* Noetherian pairs and function fields of quadratic forms, PhD Thesis, Chicago University, 1972.

Ahmed Laghribi
Faculté Jean Perrin
Rue Jean Souvraz - SP18
62307 Lens Cedex
France
laghribi@agel.ucl.ac.be