Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 2(2003), pp. 137–147

# Espacios $\alpha$-$sg$-$T_i$, $i = 0, 1, 2, 3$

*Spaces $\alpha$-$sg$-$T_i$, $i = 0, 1, 2, 3$*

Ennis Rosas (erosas@cumana.sucre.udo.edu.ve)
Carlos Carpintero
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre
Jorge Vielma
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela

**Resumen**

En un espacio topológico $(X, \tau)$, sobre el cual se tiene un operador monótono $\alpha : P(X) \to P(X)$ asociado a la topología $\tau$, decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es $\alpha$-semi cerrado generalizado (abreviado $\alpha$-$sg$-cerrado) si para todo subconjunto $\alpha$-semi abierto $U$ tal que $A \subseteq U$ se tiene que $\alpha$-$sCl(A) \subseteq U$, donde $\alpha$-$sCl(A)$ denota la $\alpha$-semi clausura de $A$. El complemento de un conjunto $\alpha$-$sg$-cerrado se denomina $\alpha$-semi abierto generalizado ( abreviado $\alpha$-$sg$-abierto). En este trabajo usamos los conjuntos $\alpha$-$sg$-abiertos para introducir algunas propiedades de separación $\alpha$-semi generalizados $\alpha$-$sg$-$T_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ y estudiamos además las características de los espacios $\alpha$-$sg$-$T_i$ obtenidos.
**Palabras y frases clave:** $\alpha$ Semi Kernel, $\alpha$ Semi clausura generalizada, $\alpha$ Semi interior generalizado, $\alpha$ sg-regular.

**Abstract**

Let $(X,\tau)$ be a topological space and $\alpha$ be a monotone operator associated with $\tau$. A subset $A$ of $X$ is said to be a generalized $\alpha$ semi closed (denoted by $\alpha$-sg-closed) if for each generalized $\alpha$ semi open set $U$ of $X$ such that $A \subseteq U$, then $\alpha - sCl(A) \subset U$, where $\alpha - sCl(A)$ denote the $\alpha$-semi closure of $A$. The complement of a $\alpha$-sg-closed set is called generalized $\alpha$-semi open set (denoted by $\alpha$-sg-open). In this work, we use the notions of $\alpha$-sg-open sets in order to introduce some

Recibido 2001/12/12. Revisado: 2003/07/14. Aceptado: 2003/07/25.
MSC (2000): Primary 54A05, 54A10, 54D10.

properties of separation $\alpha$ semi generalized $\alpha - sg - T_i$ for i=0, 1, 2, 3, and study some characterizations of the spaces $\alpha - sg - T_i$.
**Key words and phrases:** $\alpha$ Semi Kernel, generalized $\alpha$ Semi closure, generalized $\alpha$ Semi interior, $\alpha$ sg-regular.

# 1 Introducción

En [1] y [2] se introducen, respectivamente, en el contexto de un espacio topológico $(X, \tau)$ las nociones de conjuntos semiabierto ($A \subseteq X$ es semiabierto si y sólo si $A \subseteq Cl[Int(A)]$) y conjunto semicerrado ($A \subseteq X$ es semicerrado si y sólo si $X \setminus A$ es semiabierto). Usando tales conjuntos y de manera natural en [4] se definen y estudian nuevos axiomas de separación, denominados axiomas de semi separación. En [6] se presentan nociones más generales que las citadas anteriormente tales como la de operador asociado a una topología $\tau$ sobre un conjunto $X$ ( $\alpha : P(X) \to P(X)$ un operador asociado a $\tau$ si y sólo si $\forall U \in \tau; U \subseteq \alpha(U)$), conjunto $\alpha$-semiabierto ($A \subseteq X$ es $\alpha$-semiabierto si y sólo si existe $U \in \tau; U \subseteq\ A \subseteq \alpha(U)$ ), conjunto $\alpha$-semicerrado ($A \subseteq X$ es $\alpha$-semicerrado si y sólo si $X \setminus A$ es $\alpha$-semiabierto), y la $\alpha$-semiclausura de un conjunto(resp.$\alpha$-semiinterior) como la intersección (resp.unión) de todos los superconjuntos (resp.subconjuntos ) $\alpha$-semicerrados (resp.$\alpha$-semi abiertos) de dicho conjunto, en caso que $\alpha$ sea un operador monótono (i.e. $\alpha(A) \subseteq \alpha(B)$ si $A \subseteq B \subseteq X$), entre otras. En [7] se definen espacios $\alpha$-semi $T_i$ para $i = 0, 1/2, 1, 2$; haciendo uso de un operador $\alpha$ y los conjuntos $\alpha$- semiabiertos, obteniéndose así una clase de espacios que engloban a los mencionados en [4], además la noción de conjunto $\alpha$-semicerrado generalizado, abreviado $\alpha$-sg-cerrado ($A \subseteq X$ es $sg$-cerrado si y sólo si $\alpha$-sCl$(A) \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y $U$ es $\alpha$-semiabierto en $X$, donde $\alpha$-sCl$(A)$ denota la $\alpha$-semiclausura de $A$) generaliza las nociones de $g$-cerrado dadas en [3] y [5], respectivamente. En [8] G.B. Navalagi introduce axiomas de separación por conjuntos semiabiertos generalizados, abreviado $sg$-abiertos, definidos como complemento de conjuntos $sg$-cerrados los cuales son casos particulares de los conjuntos $\alpha$-sg-cerrados si el operador considerado es $\alpha =$ operador clausura. En este trabajo se generalizan los axiomas de separación semigeneralizados tratados en [8] para el caso de un operador cualquiera y se obtienen resultados más amplios que los obtenidos en [7] y [8].

## 2 Preliminares

En esta sección estudiaremos ciertas nociones básicas que se emplearán a lo largo de todo este trabajo.Comenzaremos con la siguiente proposición.

**Lema 2.1.** *Sean* $(X, \tau)$ *un espacio topológico y* $\alpha$ *un operador monótono asociado a* $\tau$ *. Entonces:*

$$\begin{array}{ll}
(a) & \alpha - sInt(A) \subseteq \alpha - sInt(B) \quad si \quad A \subseteq B; \\
(b) & \alpha - sCl(A) \subseteq \alpha - sCl(B) \quad si \quad A \subseteq B; \\
(c) & A \quad es \quad \alpha - abierto \quad \Leftrightarrow \quad A = \alpha - sInt(A); \\
(d) & B \quad es \quad \alpha - cerrado \quad \Leftrightarrow \quad B = \alpha - sCl(B); \\
(e) & x \in \alpha - sInt(A) \quad si\ y\ sólo\ si\ existe\ un\ subconjunto\ G \\
 & \qquad \alpha - abierto\ tal\ que \quad x \in G \subseteq A; \\
(f) & x \in \alpha - sCl(B) \quad si\ y\ sólo\ si\ para\ todo\ subconjunto\ G \\
 & \qquad \alpha - abierto\ tal\ que \quad x \in G, \quad G \cap B \neq \emptyset; \\
(g) & X \backslash (\alpha - sCl(A)) = \alpha - sInt(X \backslash A) \quad y \\
 & X \backslash (\alpha - sInt(A)) = \alpha - sCl(X \backslash A).
\end{array}$$

**Demostración**

Sigue directamente de las definiciones de $\alpha$-semiclausura y $\alpha$-semiinterior.

**Definición 2.1.** *Sean* $(X, \tau)$ *un espacio topológico y* $\alpha, \beta$ *operadores asociados a* $\tau$*. Denotemos* $\alpha \prec \beta$ *si* $\alpha(U) \subseteq \beta(U)$ *para todo abierto* $U \in \tau$*.*

Observe que la definición anterior determina una relación de orden, inducida por la inclusión, sobre la clase de todos los operadores asociados a una topología $\tau$ sobre $X$.

**Lema 2.2.** *Sean* $(X, \tau)$ *un espacio topológico,* $\alpha, \beta$ *operadores monótonos asociados a* $\tau$ *tales que* $\alpha \prec \beta$*. Entonces*

$$\begin{array}{ll}
(a) & \alpha - SO(X, \tau) \subseteq \beta - SO(X, \tau); \\
(b) & \alpha - SC(X, \tau) \subseteq \beta - SC(X, \tau); \\
(c) & \alpha - sInt(A) \subseteq \beta - sInt(A), \quad para\ todo \quad A \subseteq X; \\
(d) & \beta - sCl(A) \subseteq \alpha - sCl(A) \quad para\ todo \quad A \subseteq X.
\end{array}$$

Observemos que para cualquier operador $\alpha$ asociado a una topología $\tau$ de un espacio topológico $(X, \tau)$ se cumple que $i_X \prec \alpha$, donde $i_X$ denota el operador identidad sobre $X$, pues para cada abierto $U \in \tau$, $\quad i_X(U) = U \subseteq \alpha(U)$, en consecuencia tendremos que $Int(A) \subseteq \alpha - sInt(A)$ y $\alpha - sCl(A) \subseteq Cl(A)$ para todo $A \subseteq X$.

**Lema 2.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$. Entonces para cada $x \in X$ se tiene $\alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})] = \emptyset$ ó $x \in \alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})]$.*

**Demostración**
Supongamos que $\alpha$-sInt$[\alpha - sCl(\{x\})] \neq \emptyset$, según esto existe un $y \in \alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})]$, por el Lema 2.1 parte (e) existe un conjunto $S \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $y \in S \subseteq \alpha - sCl(\{x\})$, ahora $S \in \alpha - SO(X, \tau)$, $y \in S$ y $y \in \alpha - sCl(\{x\})$ implican que, por el Lema 2.1 parte (f), $S \cap \{x\} \neq \emptyset$, así $x \in S \subseteq \alpha - sCl(\{x\})$ lo cual nos dice que $x \in \alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})]$.

Supongamos ahora que $x \notin \alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})]$, entonces $\alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})] = \emptyset$; porque si la $\alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})] \neq \emptyset$, existirían $y \in X$, $S \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $y \in S \subseteq \alpha - sCl(\{x\})$, luego $S \cap \{x\} \notin \emptyset$ y tendríamos que $x \in S \subseteq \alpha - sCl(\{x\})$, así $x \in \alpha - sInt[\alpha - sCl(\{x\})]$, lo cual contradice a los supuesto. $\square$

Recordemos que en un espacio topológico $(X, \tau)$ un subconjunto $A \subseteq X$ se dice nunca denso si $Int[cl(A)] = \emptyset$, y $A$ se dice preabierto si ocurre que $A \subseteq Int[cl(A)]$. Según esto si consideramos $\alpha = i_X$ entonces el lema anterior nos dice que en cualquier espacio $(X, \tau)$ todo subconjunto unitario de $X$ es nunca denso o preabierto.

**Definición 2.2.** **([7])** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice $\alpha - sg-$cerrado si $\alpha - sCl(A) \subseteq U$ para todo $U \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $A \subseteq U$. El complemento de un conjunto $\alpha - sg-$cerrado se dice un conjunto $\alpha - sg-$abierto.*

Observe que si tomamos $\alpha = i_X$, la definición anterior es justamente la definición de conjunto cerrado generalizado ($= g-$cerrado) dada en [3] por Levine. Si tomamos $\alpha =$ operador clausura la definición anterior es la definición de conjunto semicerrado generalizado dada en [5].

En general, todo cerrado es $\alpha$-semicerrado y por lo tanto $\alpha - sg-$cerrado, respectivamente todo abierto es $\alpha$-semiabierto y todo $\alpha$-semiabierto es $\alpha - sg-$abierto. Pero para un operador $\alpha$ cualquiera, en general, no hay relación entre los semiabiertos y los $\alpha$-semiabiertos (resp. semicerrados y $\alpha$- semicerrados). Pero si $\alpha$ es monótono y $cl \prec \alpha$, en virtud del lema 3.2 tendremos que todo semiabierto (resp. semicerrado)es $\alpha$-semiabierto (resp. $\alpha$-semicerrado) y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{abierto} & \Rightarrow & \text{semiabierto} & \Rightarrow & \alpha - \text{semiabierto} & \Rightarrow & \alpha - sg - \text{abierto} \\ \text{cerrado} & \Rightarrow & \text{semicerrado} & \Rightarrow & \alpha - \text{semicerrado} & \Rightarrow & \alpha - sg - \text{cerrado} \end{array}$$

En la siguiente definición se generaliza la noción del Kernel de un conjunto, el cual es la intersección de todos los abiertos que contienen a dicho conjunto.

**Definición 2.3.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\alpha$ un operador asociado a $\tau$. Para cada $A \subseteq X$ definimos el $\alpha$-semi Kernel de $A$, denotado $\alpha - sKer(A)$, como la intersección de todos los conjuntos $\alpha$-semiabiertos que contienen a $A$.*

La noción de $\alpha$-semi Kernel permite caracterizar los conjuntos $\alpha - sg-$cerrados, como se describe en la siguiente proposición.

**Lema 2.4.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$ y $A \subseteq X$. Entonces $A$ es $\alpha - sg-$cerrado si y sólo si $\alpha - sCl(A) \subseteq \alpha - sKer(A)$.*

**Demostración**
**Suficiencia** $(\Rightarrow)$ Supongamos que $A$ es $\alpha - sg-$cerrado. Sea $D = \{S \subseteq X / A \subseteq S \quad \text{y} \quad S \in \alpha - SO(X, \tau)\}$ entonces $\alpha - sKer(A) = \bigcap\limits_{S \in D} S$. Si $S \in D$, entonces $A \subseteq S$ y $S \in \alpha - SO(X, \tau)$, como $A$ es $\alpha - sg-$cerrado, tendremos que $\alpha - sCl(A) \subseteq S$. Esto nos dice que $\alpha - sCl(A) \subseteq S$ para todo $S \in D$ y así $\alpha - sCl(A) \subseteq \bigcap\limits_{S \in D} S = \alpha - sKer(A)$.
**Necesidad** $(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que $\alpha - sCl(A) \subseteq \bigcap\limits_{S \in D} S = \alpha - sKer(A)$. Sea $S \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $A \subseteq S$, según esto $S \in D$ y así $\bigcap\limits_{S \in D} S \subseteq S$, luego $\alpha - sCl(A) \subseteq \alpha - sKer(A) = \bigcap\limits_{S \in D} S \subseteq S$. Por tanto $\alpha - sCl(A) \subseteq S$ y $A$ es $\alpha - sg-$abierto.

**Lema 2.5.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $cl : P(X) \to P(X)$ el operador clausura. Si $\alpha$ es un operador monótono asociado a $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$, entonces:*

*(a) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es $\alpha - sg-$cerrado, para toda colección $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos $\alpha - sg-$cerrados de $X$;*

*(b) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es $\alpha - sg-$abierto, para toda colección $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos $\alpha - sg-$abiertos de $X$.*

**Demostración**
(a) Sea $A = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. Si $A = \emptyset$ entonces $A$ es $\alpha-$ semi cerrado, pues $A$ es

cerrado, luego $\alpha - sCl(A) = A$ y por lo tanto $\alpha - sCl(A) \subseteq U$ para todo $U \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $A \subseteq U$ y en este caso $A$ es $\alpha - sg-$ cerrado.

Si $A \neq \emptyset$, mostraremos que $\alpha - sCl(A) \subseteq \alpha - sKer(A)$. Dado $x \in \alpha - sCl(A)$, puede ocurrir que $\{x\}$ sea nunca denso ó $\{x\}$ sea preabierto.

Caso $\{x\}$ nunca denso:

Si $x \notin A$ existe un índice $j \in I$ tal que $x \notin A_j$, esto es $A_j \subseteq X - \{x\}$. Como $\{x\}$ es nunca denso entonces $Int[cl(\{x\})] = \emptyset$ y luego

$$cl[Int(X - \{x\})] = cl(X - cl(\{x\})) = X - Int[cl(\{x\})] = X \supseteq X - \{x\}$$

así $X - \{x\}$ es semiabierto. De la hipótesis $cl \prec \alpha$ y por el Lema 2.2 parte (a), sigue que $X - \{x\}$ es $\alpha-$semiabierto y en consecuencia $\alpha - sKer(A_j) \subseteq X - \{x\}$. Esto implica que $x \notin \alpha - sKer(A_j)$. De las inclusiones $\alpha - sCl(A) \subseteq \alpha - sCl(A_j) \subseteq \alpha - sKer(A_j)$, concluimos que $x \notin \alpha - sCl(A)$, lo cual contradice a la hipótesis supuesta que $x \in \alpha - sCl(A)$. Esto nos demuestra que es imposible que $x \notin A$, así $x \in A$ y entonces como $A \subseteq \alpha - sKer(A)$ , tendremos que $x \in \alpha - sKer(A)$.

Caso $\{x\}$ preabierto:

Supongamos que $x \notin \alpha - sKer(A)$, en tal caso existe un subconjunto $S \in \alpha - SO(X, \tau)$ tal que $A \subseteq S$ y $x \notin S$. Como $S \subseteq \alpha - SO(X, \tau)$ entonces $X - S \in \alpha - SC(X, \tau)$, además $A \cap (X - S) = \emptyset$, pues $A \cap (X - S) \subseteq S \cap (X - S) = \emptyset$; y $\{x\} \subseteq X - S$ ya que $x \notin S$ implica que $x \in X - S$. Observemos que $\alpha - sCl(\{x\}) \subseteq Cl(\{x\})$. Mostremos que no es posible que $\alpha - sCl(\{x\})$ este contenido propiamente en $Cl(\{x\})$, pues en tal caso existiría un $y \in X$ tal que $y \notin \{x\}$, $y \in \alpha - sCl(\{x\})$ y $y \notin Cl(\{x\})$. Como $y \notin Cl(\{x\})$ existe un abierto $V \in \tau$ para el cual $y \in V$ y $V \cap \{x\} = \emptyset$, pero $\tau \subseteq \alpha - SO(X, \tau)$ lo que implicaría que $V \in \alpha - SO(X, \tau)$, $y \in V$ y $V \cap \{x\} = \emptyset$, según esto $y \notin \alpha - sCl(\{x\})$ lo cual es imposible por las características de $y$. De los anterior concluimos que $\alpha - sCl(\{x\}) = Cl(\{x\})$ y según esto tendremos

$$Int(Cl(\{x\})) \subseteq Cl(\{x\}) = \alpha - sCl(\{x\}) \subseteq \alpha - sCl(X - S) = X - S.$$

Si $F = Int(Cl\{x\})$ entonces: $F \in \alpha - SO(X, \tau)$, pues $F \in \tau \subseteq \alpha - SO(X, \tau)$, $x \in F$ ya que $\{x\}$ es preabierto y además $F \subseteq X - S$. Como $x \in \alpha - sCl(A)$ tendremos que $F \cap A \neq \emptyset$, pero $F \cap A \subseteq (X - S) \cap A = \emptyset$, lo cual es contradictorio pues $F \cap A \neq \emptyset$ y $F \cap A = \emptyset$. La contradicción anterior nos dice que es imposible que $x \notin \alpha - sKer(A)$, así necesariamente $x \in \alpha - sKer(A)$.

(b) Sigue de la parte anterior, la definición de $\alpha-$sg-cerrado y las leyes de De Morgan

$\square$

El siguiente ejemplo muestra la existencia de una gran cantidad de situaciones en las cuales puede aplicarse el lema anterior, de la cual la clausura es un caso particular.

**Ejemplo 2.1.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces:*

*(a) $\alpha(A) = Cl(A) \cup B$, con $B \neq \emptyset$, determina un operador asociado a $\tau$ tal que $Cl \prec \alpha$.*

*(b) $\alpha(A) = Ker[Cl(A)]$, define un operador asociado a $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$.*

*(c) $\alpha(A) = sKer[Cl(A)]$, es un operador tal que $Cl \prec \alpha$.*

*(d) Si $\beta$ es cualquier operador asociado a $\tau$ entonces $\alpha(A) = \beta{-}sKer[Cl(A)]$ también define un operador $\alpha$ tal que $Cl \prec \alpha$. Note que si $\beta = i_X$ se tiene el caso (b), y si $\beta = Cl$ tendremos el caso (c).*

El lema 3.4 hace posible definir de manera natural las nociones de $\alpha - sg$- clausura y $\alpha - sg-$interior, de manera tal que estas tienen propiedades similares a las conocidas usualmente.

**Definición 2.4.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$ . Para cada $A \subseteq X$ se define la $\alpha-$semiclausura generalizada de $A$, denotada $\alpha - sgcl(A)$, como la intersección de todos los superconjuntos $\alpha - sg-$cerrados de $A$. El $\alpha$-semi interior generalizado de $A$, denotado $\alpha - sgInt(A)$, es la unión de todos los subconjuntos $\alpha - sg-$abiertos de $A$.*

Obviamente $\alpha - sgcl(A)$ es $\alpha - sg-$cerrado y $\alpha - sgInt(A)$ es $\alpha - sg-$abierto, además:

$$Int(A) \subseteq \alpha - sInt(A) \subseteq sgInt(A) \subseteq A \subseteq \alpha - sgcl(A) \subseteq \alpha - sCl(A) \subseteq cl(A),$$

para todo $A \subseteq X$.

**Lema 2.6.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$ . Entonces:*

*(a)* $\alpha - sgInt(A) \subseteq \alpha - sgInt(B)$ *si* $A \subseteq B$;
*(b)* $\alpha - sgcl(A) \subseteq \alpha - sgcl(B)$ *si* $A \subseteq B$;
*(c)* $A$ *es* $\alpha - sg -$ *abierto* $\Leftrightarrow$ $A = \alpha - sgInt(A)$;
*(d)* $B$ *es* $\alpha - sg -$ *cerrado* $\Leftrightarrow$ $B = \alpha - sgcl(B)$;
*(e)* $x \in \alpha - sgInt(A)$ *si y sólo si existe un subconjunto* $G$ $\alpha - sg -$ *abierto tal que* $x \in G \subseteq A$;
*(f)* $x \in \alpha - sgcl(B)$ *si y sólo si para todo subconjunto* $G$ $\alpha - sg -$ *abierto tal que* $x \in G$, $G \cap B \neq \emptyset$;
*(g)* $X \backslash (\alpha - sgcl(A)) = \alpha - sgInt(X \backslash A)$ *y* $X \backslash (\alpha - sgInt(A)) = \alpha - sgcl(X \backslash A)$.

**Demostración**

Sigue directamente de las definiciones de $\alpha$-sg-semiclausura y $\alpha$-sg-semiinterior.

## 3 Espacios $\alpha - sg - T_i$

En esta sección introducimos los axiomas de separación $\alpha-$semigeneralizados, damos algunas caracterizaciones de éstos, así como también estudiamos las relaciones que existen entre ellos.

**Definición 3.1.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$. $X$ se dice un espacio $\alpha - sg - T_0$ si para cada par de puntos $x, y \in X,\ x \neq y$, existe un subconjunto $\alpha - sg-$abierto que contiene a uno de ellos, pero no al otro.*

En el teorema siguiente caracterizamos los espacios $\alpha - sg - T_0$

**Teorema 3.1.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$. Entonces $X$ es un espacio $\alpha - sg - T_0$ si y sólo si cualesquiera sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ se tiene que $\alpha - sgcl(\{x\}) \neq \alpha - sgCl(\{y\})$.*

**Demostración**
(Suficiencia) Supongamos que $X$ es un espacio $\alpha - sg - T_0$ entonces para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un conjunto $\alpha - sg-$abierto, $U$, tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$. Según esto, cualquiera sea el caso, tendremos $\alpha - sg - Cl(\{x\}) \neq \alpha - sg - Cl(\{y\})$.
(Necesidad) Supongamos que $x, y \in X,\ x \neq y$, implican

$$\alpha - sg - Cl(\{x\}) \neq \alpha - sg - Cl(\{y\}).$$

Según esta hipótesis dados $x \neq y$, existe un punto $z \in X$ tal que $z \in \alpha - sg - Cl(\{y\})$ y $z \notin \alpha - sg - Cl(\{x\})$. De acuerdo con esto $y \notin \alpha - sg - Cl(\{x\})$, pues en caso contrario se tendría que $y \in \alpha - sg - Cl(\{x\})$, luego $\{y\} \subseteq \alpha - sg - Cl(\{x\})$ y así ocurriría que $\alpha - sg - Cl(\{y\}) \subseteq \alpha - sg - Cl(\{x\})$, lo cual es imposible. $\square$

**Definición 3.2.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$. $X$ se dice un espacio $\alpha - sg - T_1$ si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un par de conjuntos $\alpha - sg-$abiertos, uno de los cuales contiene a $x$ pero no a $y$, y el otro de los conjuntos contiene al punto $y$ pero no al punto $x$.*

Caracterizamos ahora los espacios $\alpha - sg - T_1$

**Teorema 3.2.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(a)* $X$ *es un espacio* $\alpha - sg - T_1$
*(b)* *Cada unitario $\{x\}$, $x \in X$, es* $\alpha - sg -$ *cerrado*
*(c)* *Cada subconjunto de $X$ es la intersección de los superconjuntos* $\alpha - sg -$ *abiertos de este.*

**Demostración**
$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que $X$ es $\alpha - sg - T_1$. Sea $y \in X - \{x\}$, entonces $y \notin \{x\}$, y existen $\alpha - sg-$abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $y \in V$, $x \notin V$. Luego $y \in V \subseteq X - \{x\}$, pues $V \cap \{x\} = \emptyset$. Es decir $X - \{x\}$ es $\alpha - sg-$abierto y por tanto $\{x\}$ es $\alpha - sg-$cerrado.

$(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos que cada $\{x\}, x \in X$, es $\alpha - sg-$cerrado. Sean $A \subseteq X$ y $D(A) = \{S \subseteq X : A \subseteq S \quad \text{y} \quad S \text{ es } \alpha - sg - \text{abierto}\}$. Observemos que para todo $x \notin A$, se tiene que $X - \{x\} \in D(A)$, así $A \subseteq \bigcap_{S \in D(A)} S \subseteq \bigcap_{x \notin A} (X - \{x\})$. Mostraremos ahora que $A = \bigcap_{x \notin A} (X - \{x\})$. Notemos que para $y \notin A$ se tiene que $y \notin \bigcap_{x \notin A} (X - \{x\})$, pues $y \notin X - \{y\}$ y $y \notin A$. Por otro lado $y \in A$ tendremos que $y \neq x$ para todo $x \notin A$. Así $y \in X - \{x\}$ para todo $x \notin A$ y por lo tanto $y \in \bigcap_{x \notin A} (X - \{x\})$. En conclusión $A = \bigcap_{x \notin A} (x - \{x\})$, y así$A = \bigcap_{S \in D(A)} S$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sea $D(x) = \{S : x \in S \quad \text{y} \quad S \ \alpha - sg - \text{abierto}\}$. Conforme a (iii), $\{x\} = \bigcap_{S \in D(x)} S$, así si $y \neq x$ entonces $y \notin \bigcap_{S \in D(x)} S$ y existe un subconjunto $\alpha - sg-$abierto $S$ tal que $x \in S$ y $y \notin S$, de manera análoga $x \notin \bigcap_{S \in D(y)} S'$ y existe un conjunto $\alpha - sg-$abierto $S'$ tal que $y \in S'$ y $x \notin S'$. Esto nos dice que $X$ es $\alpha - sg - T_1$.

Introducimos ahora los espacios $\alpha - sg - T_2$

**Definición 3.3.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a la topología $\tau$. $X$ se dice un espacio $\alpha - sg - T_2$ si para cada par de puntos $x, y \in X$, $\quad x \neq y$, existen conjuntos $U, V$ disjuntos y $\alpha - sg-$abiertos en $X$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.*

De las definiciones anteriores concluimos las relaciones

$$\alpha - sg - T_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha - sg - T_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha - sg - T_0.$$

Además

$$\alpha - \text{semi}T_i \quad \Rightarrow \quad \alpha - sg - T_i, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2,$$

y para cualquier operador monótono $\alpha$ tal que $cl \prec \alpha$, se cumple:

$$\text{semi}T_i \quad \Rightarrow \alpha - \text{semi}T_i \quad \Rightarrow \quad \alpha - sg - T_i, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, 2.$$

Finalment introduciremos los espacios $\alpha - sg - T_3$. En primer término consideremos la siguiente definición.

**Definición 3.4.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$. $X$ se dice un espacio $\alpha - sg-$regular si cualesquiera sean $A$ $\alpha - sg-$cerrado en $X$ y $x \notin A$ existen conjuntos $U, V$ disjuntos y $\alpha - sg-$abiertos en $X$, tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$.*

En la siguiente proposición caracterizamos los espacios $\alpha - sg-$regulares.

**Teorema 3.3.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$ tal que $cl \prec \alpha$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
*(a) $X$ es un espacio $\alpha-sg-$regular. (b) Si $U$ es $\alpha-sg-$abierto y $x \in U$, existe un conjunto $\alpha-sg-$abierto $V$ tal que $x \in V$ y $\alpha-sgcl(V) \subseteq U$. (c) Cada $x \in X$ tiene una base local formada por conjuntos $\alpha - sg-$cerrados.*

**Demostración**

Similar al caso usual de los espacios regulares.

**Definición 3.5.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\alpha$ un operador monótono asociado a $\tau$. $X$ se dice un espacio $\alpha - sg - T_3$ si $X$ es $\alpha - sg-$regular y $\alpha - sg - T_0$.*

Observe que todo espacio $\alpha - sg - T_3$ es un espacio $\alpha - sg - T_2$.

# 4 Invarianza en los Espacios $\alpha - sg - T_i$

En esta sección veremos que algunas de las propiedades de separación $\alpha-$semigeneralizadas permanecen invariantes bajo ciertos tipos de aplicaciones.

En lo sucesivo una tripleta $(X, \tau, \alpha)$ significará que $\alpha : P(X) \to P(X)$ es un operador asociado a la topología $\tau$ del espacio $(X, \tau)$.

**Definición 4.1.** *Sean $(X, \tau, \alpha)$ y $(Y, \sigma, \beta)$, con $\alpha$ y $\beta$ operadores monótonos. Una función $f : X \to Y$ se dice $\alpha\beta - sg-$irresoluta si $f^{-1}(V)$ es $\alpha - sg-$cerrado en $(X, \tau)$ para cada subconjunto $V$ $\beta - sg-$cerrado en $(Y, \sigma)$.*

Observe que la definición anterior generaliza la noción de función irresoluta dada en [1]. En el siguiente teorema veremos la relación existente entre las funciones $\alpha\beta - sg-$irresolutas y algunas de las propiedades separación introducidas en la sección anterior, la prueba descansa en el hecho que dada una función $f : X \to Y$ $\alpha\beta - sg-$irresoluta se tiene que $f^{-1}(B)$ es $\alpha - sg-$abierto en $X$ para cada subconjunto $B$ $\beta$-sg-abierto en $Y$.

**Proposición 4.1.** *Sean $(X, \tau, \alpha)$ y $(Y, \sigma, \beta)$, con $\alpha$ y $\beta$ operadores monótonos y $f : X \to Y$ una función inyectiva y $\alpha\beta - sg-$irresoluta. Si $Y$ es un espacio $\alpha - sg - T_i$ entonces $X$ es un espacio $\alpha - sg - T_i$ para $i = 0, 1, 2y$ 3*

# Referencias


[1] N. Levine, *Semiopen sets and semicontinuity in topological spaces,* Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 36–41.

[2] N. Biswas, *On characterizations of semicontinuos functions,* Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. CL. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 48 (1970), 399–402.

[3] N. Levine, *Generalized closed sets in topology,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 19(2) (1970), 89–96.

[4] S. N. Maheshwari and R. Prasad, *Some new separations axioms,* Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. I., 89 (1975), 395–402.

[5] P. Bhattacharya, B. K. Lahiri, *Semigeneralized closed sets in topology,* Indian J. Math., 29(3)(1987), 375–382.

[6] C. Carpintero, E. Rosas, J. Vielma, *Operadores asociados a una topología $\Gamma$ sobre un conjunto $X$ y nociones conexas,* Divulgaciones matemáticas, Vol 6, $N^0$ 2 (1998), 139–148.

[7] E. Rosas, J. Vielma, C. Carpintero, M. Salas, *Espacios $\alpha-$semi $T_i$, para $i = 0, 1/2, 1, 2,$* Pro-Mathematica. $N^0$ 27 (2000). 37–48.

[8] G. B. Navalagi, *Semi generalized separation axioms in topology,* Preprint (2001).