Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 1(2003), pp. 49–53

Integral de Cauchy: Alternativa a la Integral de Riemann

Cauchy integral: An alternative to the Riemann integral

Nelson Viloria (nelson@ula.ve)
Universidad de Los Andes. Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas.
Mérida, Edo. Mérida, Venezuela.

Reinaldo Cadenas (rcadena@ula.ve)
Universidad de Los Andes. Facultad de Humanidades y Educación
Departamento de Medición y Evaluación.
Mérida, Edo. Mérida, Venezuela.

Resumen

La teoría de funciones regladas puede sustituir la enseñanza de la integral de Riemann en las carreras de Matemáticas. Presentamos la integral de Cauchy como una elegante alternativa a la integral de Riemann. Partiendo de la formalización de la teoría de integración de funciones escalonadas (indudablemente intuitiva), transferimos las propiedades fundamentales a la clase de las funciones regladas (que sólo tienen discontinuidades de primera especie). Limitamos el proceso de integración a una categoría de funciones suficientemente próxima a la de las funciones continuas y lo suficientemente amplia para contener los tipos de funciones requeridas, desde un punto de vista pragmático.
Palabras y frases claves: Funciones regladas, funciones escalonadas, integral de Cauchy, integral de Riemann, lema de Cauchy, convergencia uniforme.

Abstract

The teaching of Riemann integral in careers of mathematics may be substituted by regulated functions theory. We present the Cauchy integral as an elegant alternative to the Riemann integral. Beginning with

Recibido 2001/02/14. Aceptado 2003/05/16.
MSC (2000): 26A39, 26A42.

the formalization of the theory of step functions integration (undoubtedly intuitive), we transfer the fundamental properties to the class of regulated functions (those which only have first kind discontinuities). We limit the integration process to a category of functions close enough to that of continuous functions but wide enough to contain the kind of functions needed from a pragmatic viewpoint.
Key words and phrases: Regulated functions, step functions, Cauchy integral, Riemann integral, Cauchy lemma, uniform convergence.

1 Introducción

La clase de funciones Riemann integrables es algo difusa (cuando no se considera la Teoría de la Medida), en este sentido utilizaremos una categoría de funciones completamente caracterizada: *el espacio de las funciones Regladas* ($G[a,b]$) *con la norma de la convergencia uniforme.* En [1], Berberian estudia esta clase de funciones desde la óptica francesa (Bourbaki-Dieudonné). Nosotros definiremos la integral de Cauchy para una función reglada como el límite de una sucesión, de integrales de funciones escalonadas, que converge uniformemente a dicha función. A partir de esto, mostraremos todas las propiedades "usuales"de una integral, haciendo más natural la Teoría de Integración, ya que se parte de conocimientos simples e intuitivos de la integral de una función escalonada. Las propiedades de la integral de Cauchy se "transfieren"de las propiedades de las funciones escalonadas.

2 Funciones Regladas

Definición 1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama *reglada* si para cada $x \in I$ existen

$$f(x-) = \lim_{t \longrightarrow x^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad f(x+) = \lim_{t \longrightarrow x^+} f(t).$$

De la definición se sigue que toda función continua es reglada. Toda función reglada es acotada y además el conjunto

$$G[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ reglada}\}$$

es un espacio de Banach. Además si f es de variación acotada, entonces f es reglada.

Aplicando el criterio de Cauchy (ver [5]) se prueba el siguiente resultado que nos permite caracterizar las funciones regladas usando funciones escalonadas:

Lema 1. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es reglada si y sólo si existe una sucesión de funciones $(\phi_n) \subset E[a,b]$ tal que*

$$\phi_n \rightrightarrows f \quad en \quad [a,b]$$

(es decir, (ϕ_n) converge uniformemente a f en $[a,b]$), donde

$$E[a,b] = \{\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \ \phi \ \textit{es una función escalonada}\}.$$

Por otro lado, como una consecuencia del resultado anterior obtenemos que si f es una función reglada, entonces el conjunto de puntos donde f es discontinua es numerable.

3 Integral de las Funciones Regladas

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función reglada tal que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, donde $(\phi_n) \subset E[a,b]$. Entonces,

(a) La sucesión $\left(\int_a^b \phi_n(t)dt\right)$ es de Cauchy.

(b) Supongamos que $(\varphi_n) \subset E[a,b]$ y que $\phi_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene

$$|\phi_n(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$

A partir de esto podemos definir, sin ambigüedad, la integral de una función reglada.

Definición 2. Se define la *integral* de la función reglada f sobre $[a,b]$ mediante

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)\,dt$$

donde $(\phi_n) \subset E[a,b]$ y satisface $\phi_n \rightrightarrows f$ sobre $[a,b]$. En este caso decimos que f es *integrable* y su integral la denotamos por $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Es evidente que toda función continua es integrable. Las propiedades usuales de aditividad, homogeneidad, comparación y aditividad con respecto al intervalo de integración se deducen de la definición y de las propiedades análogas que cumple la integral de una función escalonada.

4 Teoremas Fundamentales del Cálculo

La siguiente caracterización de Hönig [3] nos permitirá deducir los teoremas fundamentales del Cálculo.

Lema 2. *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $f \in G[a,b]$ *y* $g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds$ *para cada* $t \in [a,b]$.

(b) *Para cada* $t \in [a,b]$ *existe* $g'_+(t) = f(t+)$ *y, para cada* $t \in (a,b]$, *existe* $g'_-(t) = f(t-)$.

(c) $f \in G[a,b]$ *y* g *es una primitiva de* f *(es decir,* g *es continua y, fuera de un conjunto numerable de* $[a,b]$, *existe* $g'(t) = f(t)$*).*

Teorema 1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo).
Sea $f \in G[a,b]$ *y sea* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Si f *es continua en* $x = c \in [a,b]$, *entonces* g *es derivable en* c *y*

$$g'(c) = f(c).$$

Sea $f \in G[a,b]$ *y sea* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Si f *es continua en* $x = c \in [a,b]$, *entonces* g *es derivable en* c *y*

$$g'(c) = f(c).$$

Prueba La continuidad de f en c garantiza que $f(c+) = f(c-) = f(c)$ y así, por la implicación (a) $\Rightarrow$ (b) de la caracterización de Hönig, se sigue que

$$g'(c) = g'_+(c) = g'(c) = f(c).$$

Teorema 2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo).
Sea $f \in G[a,b]$ *y* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que* $g'(x) = f(x)$ *para cada* $x \in [a,b]$. *Entonces,*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

PRUEBA

Como $f \in G[a,b]$, g es continua en $[a,b]$ y $g'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces por la caracterización de Hönig, g es una primitiva de f y así,

$$g(t) = g(a) + \int_a^t f(s)ds,$$

para cada $t \in [a,b]$. En particular,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(s)ds.$$

Los resultados correspondientes a la Integración en términos elementales: Integración por partes, por sustitución, y los Teoremas de los Valores Intermedios se prueban usando los Teoremas Fundamentales del Cálculo, como se hace usualmente.

Referencias

[1] Berberian, S. *Regulated Functions: Bourbaki's Alternative to the Riemann Integral*, The American Mathematical Monthly, **86** (1979) 208–211.

[2] Chambadal, L., Ovaert, J. *Fonctions d'une Variable Réelle*, Dunod Université. Gauthier-Villars, 1972.

[3] Chaim, S. *Functional Analysis*, Soc. Brasileira de Matemática. UNICAMP, 1974.

[4] Chaim, S. *The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to Linear Differential Equations with generalized boundary conditions*, Notas de Matemática e Estadística da Universidade de São Paulo, N° 1, 1973.

[5] Dieudonné, J. *Fundamentos de Análisis Moderno*, Editorial Reverté S. A., España, 1966.