Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1(2002), pp. 13–28

El Problema de Pick y el Teorema de Cole-Lewis-Wermer

The Pick Problem and The Cole-Lewis-Wermer Theorem

Gladys Cedeño (gmcedeno@cantv.net)
Departamento de Formación General
y Ciencias Básicas
Universidad Simón Bolívar
Apartado Postal 89000, Baruta 1086, Edo. Miranda.

Resumen

Reformulando el concepto de medida dominante, y con dos hipótesis adicionales, se extiende el teorema de Cole-Lewis-Wermer a subespacios vectoriales $B \subset C(X)$ que separan puntos de X y contienen a las funciones constantes.
Palabras y frases clave: Espacio vectorial uniforme, estado, medida dominante, medida dominante de un subespacio.

Abstract

Reformulating the concept of dominant measure and adding two hypothesis, the Cole-Lewis-Wermer theorem is extended to vector subspaces $B \subset C(X)$ that separate points in X and contain the constant functions.
Key words and phrases: Uniform vectorial space, state, dominant measure, dominant measure of a subspace.

1 Introducción

Si A es un álgebra uniforme y $M_1, ..., M_n$ son puntos distintos del espacio de Gelfand de A, o sea, son funcionales lineales no nulos tales que $M_j(f \cdot g) = M_j(f) M_j(g)$ para todo $f, g \in A$ y $j = 1, ..., n$; e

$$I := \{f \in A : M_j(f) = 0 \text{ para } j = 1, ..., n\}$$

Recibido 2001/04/21. Revisado 2002/05/29. Aceptado 2002/05/30.
MSC (2000): Primary 43A99; Secondary 47B35, 32A50.

entonces, I es un ideal cerrado en A de codimensión finita n, y el espacio cociente A/I es un álgebra de Banach con la norma definida por:

$$\|[f]\| := \inf \{\|g\|_\infty : g \in [f]\}$$

donde

$$[f] := \{g \in A : g - f \in I\}.$$

Para toda n-upla de números complejos $(w_1, ..., w_n) = w$ existe la clase $[f_w]$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $\ M_j (g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$.

El problema de Cole-Lewis-Wermer (C-L-W) [3], consiste en dar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\|[f_w]\| \leq 1.$$

En [3] y [4] se destacan dos ideas fundamentales. Por una parte, está el concepto de conjunto hiperconvexo de $\mathbb{C}^n$, introducido por estos autores, relacionado con una generalización de la desigualdad de Von Neumann. La otra idea es la de las medidas dominantes, relacionado con representaciones isomorfas del álgebra cociente A/I por álgebras de operadores en un espacio de Hilbert.

En este artículo presentamos una versión del problema anteriormente señalado, reemplazando el álgebra uniforme A, por un espacio vectorial uniforme B, y el espacio de Gelfand de A, por el espacio de los estados de B (ver definiciones más abajo).

Señalemos que, para el problema de Cole-Lewis-Wermer no tiene sentido plantearse un problema de clasificación o unicidad de las soluciones, ya que de existir solución, entonces ésta es la clase, $[f_w]$ y por lo tanto es única. Sin embargo, como veremos más adelante, el problema de Cole-Lewis-Wermer es equivalente al problema de Pick en H^∞_μ, para toda medida dominante μ, y este último problema puede tener infinitas soluciones. Aquí tratamos un problema sencillo de unicidad.

2 Notación y resultados básicos

Sea X un espacio compacto Hausdorff, $C(X)$ el espacio de las funciones continuas a valores en $\mathbb{C}$.

Definición 2.1. Se llamará *espacio vectorial uniforme* sobre X, a todo subespacio vectorial cerrado B de $C(X)$ tal que:

a) B separa puntos de X,

b) B contiene a las funciones constantes,

c) $\|f\|_B = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

En lo que sigue, B es un espacio vectorial uniforme sobre X, fijo, B^* su espacio dual.

Definición 2.2. Un elemento $F \in B^*$ se dice que es un *estado* de B si, y sólo si, $F(1) = \mathbf{1} = \|F\|$.

El espacio de los estados de B lo denotamos por $\sum'(B)$ o sea,

$$\sum{}'(B) := \{F \in B^* : F \text{ es un estado de } B\}.$$

Evidentemente, $\sum'(B) \subset B^*$. A $\sum'(B)$ se le da la topología *débil*$-^*$ y es cerrado en esta topología.

Es fácil demostrar:

1. Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum'(B)$ linealmente independientes y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ existe $f \in B$ tal que $M_j(f) = w_j$ para $j = 1, ..., n$.

2. Si I es un subespacio de B, entonces I tiene codimensión finita n si, y sólo si, existen $M_1, ..., M_n \in B^*$ linealmente independientes tales que
$$I = \{f \in B : M_j(f) = 0 \text{ para } j = 1, ..., n\}.$$

3. Si I es un subespacio de B, entonces el espacio cociente $B/I := \{[f] : f \in B\}$ donde $[f] := \{g \in B : g - f \in I\} = f + I$, es un espacio vectorial con las operaciones entre clases dadas por $[f] + [g] = [f+g]$, $c[f] = [cf]$ para todo $f, g \in B$, $c \in \mathbb{C}$. Además, toda norma $\|\cdot\|$ en B induce una seminorma $p(\cdot)$ en el espacio cociente B/I dada por

$$p([f]) := \inf\{\|g\| : g \in [f]\} = \inf\{\|g - f\| : g \in I\}$$

y esta seminorma es una norma si, y sólo si, I es cerrado en B respecto de la norma $\|\cdot\|$. La norma en B/I se denota por $\|[f]\|$ para $[f] \in B/I$.

Definición 2.3. Sea I un subespacio cerrado de B de codimensión finita n. Se llamará n-upla definidora del subespacio I a toda n-upla $M_1, ..., M_n \in B^*$ tal que $I = \{f \in B : M_j(f) = 0 \text{ para } j = 1, ..., n\}$ y $\|M_j\| = 1$ para $j = 1, ..., n$. I se llamará subespacio asociado a la n-upla $(M_1, ..., M_n)$ y B/I espacio cociente asociado al subespacio I o a la n-upla.

Por lo señalado anteriormente sabemos que, fijados $M_1, ..., M_n \in \sum' (B) \subset B^*$ linealmente independientes, y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ existe $f \in B$ tal que $M_j (f) = w_j$ para $j = 1, ..., n$. De manera que si I *y* B/I son los asociados a la n-upla $(M_1, ..., M_n)$ entonces, existe la clase $[f_w] \in B/I$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $M_j (g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$. Esto nos indica que podemos plantear el problema de Cole-Lewis-Wermer en el contexto de los espacios vectoriales uniformes en los siguientes términos:

"Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum' (B)$ linealmente independientes, y $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ y dada $[f_w] \in B/I$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $M_j (g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$. Dar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\|[f_w]\| \leq 1."$$

3 Respuesta al problema de Cole-Lewis-Wermer

Fijemos un subespacio cerrado $I \subset B$ de codimensión finita n y sea B/I el espacio cociente asociado.

Toda medida de probabilidad, μ, en X determina, para cada p, $(1 \leq p < \infty)$ un espacio de Lebesgue $L^p (\mu) = L^p (X, \mu)$ con la norma $\|f\|_{p,\mu} = \|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p}$. Definimos H^2_μ como la clausura de B en $L^2 (\mu)$, I_μ como la clausura de I en H^2_μ y

$$E_\mu := H^2_\mu \ominus I_\mu = (I)^\perp \qquad \text{(F)}$$

Denotaremos con P_{I_μ} y P_{E_μ} a las proyecciones ortogonales de H^2_μ sobre I_μ y E_μ respectivamente, y con P_+ y P_- a las proyecciones ortogonales de $L^2 (\mu)$ sobre H^2_μ y $\left(H^2_\mu\right)^\perp$. De modo que para toda $f \in H^2_\mu$ $f = P_{I_\mu} f + P_{E_\mu} f$ y para toda $g \in L^2 (\mu)$ $g = P_+ g + P_- g = g_+ + g_-$.

Proposición 3.1. *Si E_μ está definido como en (F), entonces* $\dim E_\mu \leq n$.

La dimensión puede ser igual a cero.(La demostración puede verse en [1]*).*

Teorema 3.1. *Sea $[f] \in B/I$. Si $\|[f]\| = 1$ entonces, existe una medida de probabilidad, λ, tal que $|(P_{E_\lambda} f)(x)| = 1$ c.t.p. $- \lambda$.*

Demostración. Como $1 = \|[f]\| = dist\,(f, I)$, existe un único funcional lineal complejo $l_\circ$ en $I + \{cf\}_{c \in \mathbb{C}}$ tal que:

$$\|l_\circ\| = 1 \quad l_\circ (f) = 1 \quad l_\circ (y) = 0 \quad \text{para todo } y \in I. \tag{3.1}$$

Por el teorema de Hahn-Banach $l_\circ$ se extiende a un funcional continuo $\widetilde{l_\circ}$ en $C(X)$ preservando la norma, y por el teorema de representación de Riesz, existe una medida compleja ν en X, tal que:

$$\widetilde{l_\circ}(g) = \nu(g) = \int_X g(t)\, d\nu(t), \quad g \in C(X) \tag{3.2}$$

$$\|\nu\| = \|l_\circ\| = 1 \tag{3.3}$$

$$l_\circ(g) = \widetilde{l_\circ}(g) = \int_X g(t)\, d\nu(t), \quad g \in B. \tag{3.4}$$

Por (3.1) y (3.2) resulta que $\nu(I) = 0$ pues,

$$\nu(y) = \int_X y(t)\, d\nu(t) = \widetilde{l_\circ}(y) = l_\circ(y) = 0, \quad y \in I \tag{3.5}$$

y $\nu(f) = 1$ pues,

$$\nu(f) = \int_X f(t)\, d\nu(t) = \widetilde{l_\circ}(f) = l_\circ(f) = 1. \tag{3.6}$$

Sea $\lambda = |\nu|$, la variación total de ν, entonces, $\lambda(1) = |\nu|(1) = \|\nu\| = 1 = \|\lambda\|$, por lo tanto, λ es una medida de probabilidad, además ν es absolutamente continua respecto de λ y por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible φ tal que

$$d\nu = \varphi d\lambda \quad |\varphi(x)| = 1 \quad c.t.p. - \lambda \Rightarrow \varphi \in L^\infty(\lambda). \tag{3.7}$$

Usando la definición de $\|[f]\|$ obtenemos una sucesión $\{y_m\}_{m\geq 1} \subset I$ tal que $1 = \|[f]\| \leq \|f - y_m\|_\infty < 1 + \frac{1}{m} \leq 2$. Por lo tanto, la sucesión $\{f - y_m\}_{m\geq 1}$ es uniformemente acotada, como $\{f - y_m\}_{m\geq 1} \subset B \subset L^\infty(\lambda) \cong \left(L^1(\lambda)\right)^*$ y por el teorema de Bourbaki-Alaoglu, las bolas cerradas son compactas, entonces, existe una subsucesión $\{f - y_{m_k}\}_{k\geq 1}$ y una función $g \in L^\infty(\lambda)$ tal que $(f - y_{m_k}) \longrightarrow g$ *débil*$-^*$ si $k \longrightarrow \infty$, o sea,

$$\int_X h(f - y_{m_k})\, d\lambda \longrightarrow \int_X hgd\lambda \; si \; k \longrightarrow \infty \text{ para toda } h \in L^1(\lambda) \tag{3.8}$$

como $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - y_{m_k}\| = 1$ resulta,

$$\|g\|_\infty = 1. \tag{3.9}$$

Por ser $L^2(\lambda) \subset L^1(\lambda)$ entonces(3.8) vale para toda $h \in L^2(\lambda)$ y por (3.9) debe ser $|g(x)| = 1\, c.t.p. - \lambda$. Combinando (3.6) ,(3.7) y (3.8) resulta,

$$1 = \int_X f d\nu = \int_X (f - y_{m_k})\, d\nu = \int_X (f - y_{m_k})\, \varphi d\lambda \longrightarrow \int_X g\varphi d\lambda \text{ si } k \to \infty$$

o sea,

$$\int_X g(t)\,\varphi(t)\, d\lambda(t) = 1 \tag{3.10}$$

por lo tanto,

$$|g(x)| = 1 \text{ y } \quad \varphi(x) = \overline{g(x)} \qquad c.t.p. - \lambda. \tag{3.11}$$

Combinando (3.5) , (3.7) y (3.11) resulta,

$$0 = \nu(y) = \int_X y d\nu = \int_X y\varphi d\lambda = \int_X y\overline{g} d\lambda = \langle y, g\rangle_{L^2(\lambda)} \text{ para todo } \; y \in I$$

o sea,

$$g \in (I)^{\perp} = E_\lambda. \tag{3.12}$$

Como g es límite débil en $L^2(\lambda)$ de la sucesión $\{f - y_{m_k}\}_{k\geq 1} \subset B \subset H^2_\lambda$, entonces, $g \in H^2_\lambda$ y $f - g$ es límite débil de la sucesión $\{y_{m_k}\} \subset I$, por lo tanto, $f - g \in I_\lambda$, luego, $f = (f - g) + g$ con $f - g \in I_\lambda$ y $g \in E_\lambda$, en consecuencia, $P_{E_\lambda} f = g$ y $|(P_{E_\lambda} f)(x)| = 1$ *c.t.p.* $- \lambda$. □

Observemos que por ser $B \subset C(X)$, para toda $f,\ g \in B,\ \ f \cdot g \in C(X)$ pero no necesariamente $f \cdot g \in B$, por consiguiente imponemos a I la siguiente: **Hipótesis 1** El subespacio cerrado I es tal que $y \cdot f \in I$ para toda $y \in I,\ f \in B$.

Lema 3.1. *Sea μ una medida de probabilidad en X, fija. Para cada $f \in B$ sea $S^\mu_f : E_\mu \longrightarrow E_\mu$ definido por $S^\mu_f e := P_{E_\mu} P_+ f e$ para todo $e \in E_\mu$, entonces,*

a) Para cada $f \in B$ $S^\mu_f \in L(E_\mu)$ y $\left\| S^\mu_f \right\| \leq \|f\|_\infty$.

b) Si $f \in I$ entonces, $S^\mu_f = 0$.

c) Para toda $f,\ g \in B,\ c \in \mathbb{C}$

$$S^\mu_{cf+g} = cS^\mu_f + S^\mu_g$$

Si $f(x) = 1$ para todo $x \in X$, entonces $S^\mu_f = 1_{E_\mu}$

donde 1_{E_μ} es el operador identidad en E_μ.

Demostración. b) Si $f \in I$ entonces, para todo $e \in E_\mu$ $\;fe \in I_\mu$. Por lo tanto, $S^\mu_f e = P_{E_\mu} P_+ e f = P_{E_\mu} e f = 0$ para todo $e \in E_\mu$. □

Se deduce del lema anterior que, si $f \in B$ es fijo, entonces $S^{\mu}_{f+y} = S^{\mu}_{f}$ para todo $y \in I$. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2. *Sea μ una medida de probabilidad en X. Para cada $[f] \in B/I$ sea $S^{\mu}_{[f]} : E_\mu \longrightarrow E_\mu$ definido por $S^{\mu}_{[f]}e = S^{\mu}_{f}e$ para $e \in E_\mu$. Entonces,*

a) Para cada $[f] \in B/I$ $S^{\mu}_{[f]} \in L(E_\mu)$ y $\left\| S^{\mu}_{[f]} \right\| \leq \| [f] \|$.

b) La aplicación $[f] \longrightarrow S^{\mu}_{[f]}$ es un homomorfismo continuo del espacio cociente B/I en el espacio de operadores $L(E_\mu)$.

Lema 3.2. *a) Si μ es una medida de probabilidad en X, entonces*

$$f = 1 \in E_\mu \text{ si, y sólo si, } \mu(y) = 0 \text{ para todo } y \in I.$$

b) Si $\mu = \lambda$, la medida de probabilidad del teorema 3.1, entonces $1 \in E_\mu$.

Demostración. a) $E_\mu = H^2_\mu \ominus I_\mu = (I)^{\perp}$, luego

$$1 \in E_\mu \Leftrightarrow \forall y \in I \quad 0 = \langle y, 1 \rangle = \int_X y\overline{1}d\mu = \int_X yd\mu = \mu(y).$$

b) Es suficiente demostrar que $\lambda(y) = 0$ para todo $y \in I$. En las condiciones del teorema 3.1 se tiene: $\nu(y) = 0$ para todo $y \in I$, $d\nu = \varphi d\lambda$, $\varphi(x) = \overline{g(x)}$, $|g(x)| = 1$ *c.t.p.* $-\lambda$ y $g = \lim_{k\to\infty}(f - y_{n_k})$ (*débil*$-^*$). Sea $y \in I$, entonces $y\varphi \in L^1(\lambda)$, y por la convergencia *débil*$-^*$ resulta,
$\lambda(y) = \int_X yd\lambda = \int_X yg\overline{g}d\lambda = \int_X yg\varphi d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_X y(f - y_{n_k})\varphi d\lambda =$
$\lim_{k\to\infty}\int_X y(f - y_{n_k})d\nu = \lim_{k\to\infty}\nu(y(f - y_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} l_\circ(y(f - y_{n_k})) = 0.$ $\square$

Lema 3.3. *Sea $[f] \in B/I$, entonces $\|[f]\| = 1$ si, y sólo si,*

$$\sup_{\mu}\left\{\left\|S^{\mu}_{[f]}\right\| : \mu \text{ es probabilidad}\right\} = \sup_{\mu}\left\{\left\|S^{\mu}_{[f]}\right\| : \mu \text{ es probabilidad y } \mu(I) = 0\right\} = 1.$$

Demostración. Si $\|[f]\| = 1$ entonces,

$$\sup\left\{\left\|S^{\mu}_{[f]}\right\| : \mu \text{ es probabilidad y } \mu(I) = 0\right\} \leq \sup\left\{\left\|S^{\mu}_{[f]}\right\| : \mu \text{ es probabilidad}\right\} \leq \|[f]\| = 1.$$

Si $\mu = \lambda$ la probabilidad del teorema 3.1 entonces, $\lambda(y) = 0$ *y*

$$\left\| S_{[f]}^{\lambda} 1 \right\|_2 = \|P_{E_\lambda} f\|_2 = \left(\int_X |(P_{E_\lambda} f)(x)|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

luego, $\left\| S_{[f]}^{\lambda} \right\| \geq 1$ por lo tanto,
$\sup \left\{ \left\| S_{[f]}^{\mu} \right\| : \mu \text{ es probabilidad y } \mu(I) = 0 \right\} \geq 1$.

Recíprocamente, supongamos que $\sup \left\{ \left\| S_{[f]}^{\mu} \right\| : \mu \text{ es probabilidad} \right\} = \sup \left\{ \left\| S_{[f]}^{\mu} \right\| : \mu \text{ es probabilidad y } \mu(I) = 0 \right\} = 1$ y que $\|[f]\| \neq 1$. Si $\|[f]\| < 1$ sería $\left\| S_{[f]}^{\mu} \right\| > \|[f]\|$ para alguna probabilidad μ, en contradicción con la proposición 3.2. Si $\|[f]\| = 1 + b$ con $b > 0$. Poniendo $f_1 = \frac{1}{1+b} f$ resulta que $\|[f_1]\| = 1$ y por la implicación anteriormente demostrada será

$$1 = \sup \left\{ \left\| S_{[f_1]}^{\mu} \right\| : \mu \text{ es probabilidad} \right\} =$$
$$\frac{1}{1+b} \sup \left\{ \left\| S_{[f]}^{\mu} \right\| : \mu \text{ es probabilidad} \right\} = \frac{1}{1+b} < 1,$$

contradicción. Por lo tanto, debe ser $\|[f]\| = 1$. □

Definición 3.1. Se dice que la medida de probabilidad μ es *dominante* de la n-upla definidora $(M_1, \ldots, M_n)$ del subespacio I, o dominante, si existe una constante $c > 0$ (independiente de los M_j) tal que

$$|M_j(f)| \leq c \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \text{ para toda } f \in B, \ j = 1, \ldots, n.$$

Definición 3.2. Diremos que la medida de probabilidad μ es dominante del subespacio I si

$$B \cap I_\mu = I$$

o sea si el subespacio I es cerrado en B respecto de la norma de $L^2(\mu)$.

La definición (3.1) fue dada por Cole-Wermer en [4] y la definición (3.2) es dada en [1].

Proposición 3.3. *La medida μ es dominante de la n-upla $(M_1, \ldots, M_n)$ definidora del subespacio I si y sólo si es dominante del subespacio I.*

Demostración. Sea μ una medida dominante y $f \in B \cap I_\mu$, entonces existe una sucesión $\{y_m\}_{m \geq 1} \subset I$ tal que $\lim\limits_{m \to \infty} \|f - y_m\|_2 = 0$. Existe una constante $c > 0$ tal que para todo $j = 1, ..., n$ y $m = 1, ...$ se verifica

$$|M_j(f)| = |M_j(f - y_m)| \leq c \|f - y_m\|_2 \longrightarrow 0 \text{ si } m \longrightarrow \infty$$

luego, $|M_j(f)| = 0$ para $j = 1, ..., n$ y por lo tanto $f \in I$.

Si la medida μ es dominante del subespacio I, entonces

$$\|[f]\|_\mu := \inf \{\|g\|_2 : g \in [f]\}$$

es una norma en el espacio de dimensión finita B/I y por lo tanto existe una constante $c > 0$ tal que $\|[f]\| \leq c\,\|[f]\|_\mu$ para toda $f \in B$. Como para toda $f \in B$ $[f] = f + I$ y $M_j(I) = 0$ para $j = 1, ..., n$ se tiene:

$|M_j(f)| = |M_j([f])| \leq \|[f]\| \leq c\,\|[f]\|_\mu \leq c\,\|f\|_2$. □

Observación 3.1

a) Existen medidas dominantes de la n-upla definidora $(M_1, ..., M_n)$ del subespacio I.

b) Si además, $M_j(1) = 1$ para $j = 1, ..., n$ entonces, existen medidas dominantes μ, tales que $\mu(y) = 0$ para toda $y \in I$.

Proposición 3.4. *Sea μ una medida de probabilidad tal que $\mu(I) = 0$. Entonces, la medida μ es dominante del subespacio I si, y sólo si, la aplicación*

$$\begin{aligned} S^\mu : B/I &\longrightarrow L(E_\mu) \\ [f] &\longmapsto S^\mu_{[f]} \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración. Supongamos que la medida μ es dominante del subespacio I. Si $f \in B$ y $S^\mu_{[f]} = 0$ entonces, para todo $e \in E_\mu$ $P_{E_\mu} P_+ fe = 0$. Como $\mu(I) = 0$ entonces $1 \in E_\mu$ y $S^\mu_{[f]} 1 = P_{E_\mu} P_+ f1 = P_{E_\mu} f = 0$ por lo tanto, $f \in I_\mu$ o sea, $f \in B \cap I_\mu = I$, luego $[f] = I$ y S^μ es un isomorfismo lineal.

Recíprocamente, si S^μ es un isomorfismo y $B \cap I_\mu \not\subset I$, existe $f \in B \cap I_\mu$ y $f \notin I$ entonces, $[f] \neq I$ por lo tanto $S^\mu_{[f]} \neq 0$, luego, existe $e \in E_\mu$ tal que $P_{E\mu} P_+ fe \neq 0$ o sea, $P_+ fe \notin I_\mu$ como $f \in B \cap I_\mu$ existe $\{y_m\}_{m \geq 1} \subset I$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - y_m\|_2 = 0$, por ser $e \in E_\mu$ existe $\{g_n\}_{n \geq 1} \subset B$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|e - g_n\|_2 = 0$. Se tiene entonces, $y_m g_n \in I$ para $m, n = 1, 2, ...$ Fijando $n = 1, 2, ...$ se tiene

$$\lim_{m\to\infty} \|fg_n - y_m g_n\|_2 \leq \lim_{m\to\infty} \|g_n\|_\infty \|f - y_m\|_2 = 0$$

luego, $fg_n \in I_\mu$ para todo $n = 1, 2, ...$ y como

$$\lim_{n\to\infty} \|fe - fg_n\|_2 \leq \lim_{n\to\infty} \|f\|_\infty \|e - g_n\|_2 = 0$$

resulta $P_+fe = fe \in I_\mu$ y esto es una contradicción. $\square$

Corolario 3.1. *Si μ es una medida dominante tal que $\mu(I) = 0$, entonces,* $\dim E_\mu \geq 1$.

Teorema 3.2. *Sea $[f] \in B/I$, entonces $\|[f]\| = 1$ si, y sólo si,*

$$\sup\left\{\left\|S^\mu_{[f]}\right\| : \mu \text{ es dominante}\right\} = \sup\left\{\left\|S^\mu_{[f]}\right\| : \mu \text{ es dominante } y\ \mu(I) = 0\right\} = 1.$$

Demostración. Supongamos que $\|[f]\| = 1$, entonces

$$\sup\left\{\left\|S^\mu_{[f]}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\} \leq \sup\left\{\left\|S^\mu_{[f]}\right\| : \mu \text{ es dominante }\right\} \leq \|[f]\| = 1.$$

Sean λ la medida de probabilidad del teorema 3.1 y $0 < \varepsilon < 1$. Consideremos una n-upla definidora del subespacio I, $(M_1, ..., M_n)$ tal que $M_j(1) = 1$ para $j = 1, ..., n$ entonces, existe una medida dominante ν, tal que $\nu(I) = 0$. Sea $\mu_\varepsilon = \varepsilon\nu + (1-\varepsilon)\lambda$ entonces, la medida μ_ε es dominante y $\mu_\varepsilon(I) = 0$ por lo tanto, $1 \in E_{\mu_\varepsilon}$. Se tiene:

a) $\left\|S^{\mu_\varepsilon}_{[f]}1\right\|_2 = \left\|P_{E_{\mu_\varepsilon}}P_+f1\right\|_2 = \left\|P_{E_\mu}f\right\|_2 = dist\left(f, (E_{\mu_\varepsilon})^\perp\right) = dist\,(f, I_{\mu_\varepsilon}) = dist\,(f, I) = \inf\{\|f-y\|_2 : y \in I\}$

(todas las distancias tomadas respecto de la norma del espacio $L^2(\mu_\varepsilon)$).

b) $\left\|S^\lambda_{[f]}1\right\|_2 = \|P_{E_\lambda}f\|_2 = dist\,(f, I) = \inf\{\|f-y\|_2 : y \in I\}$

(todas las distancias tomadas respecto de la norma del espacio $L^2(\lambda)$).

Como para todo $y \in I$ se verifica la desigualdad:

$$\|f-y\|_{L^2(\mu_\varepsilon)} > \sqrt{1-\varepsilon}\,\|f-y\|_{L^2(\lambda)}$$

resulta,

$$\inf\left\{\|f-y\|_{L^2(\mu_\varepsilon)} : y \in I\right\} > (1-\varepsilon)\inf\left\{\|f-y\|_{L^2(\lambda)} : y \in I\right\}.$$

Por a) y b) se tiene

$$\left\|S^{\mu_\varepsilon}_{[f]}1\right\|_2 > (1-\varepsilon)\left\|S^\lambda_{[f]}1\right\|_2$$

como $S_{[f]}^{\lambda}1 = P_{E_\lambda} f$ y por el teorema 3.1 es $\|P_{E_\lambda} f\|_2 = 1$ resulta, $\left\|S_{[f]}^{\mu_\varepsilon} 1\right\|_2 > 1 - \varepsilon$ por lo tanto, $\left\|S_{[f]}^{\mu_\varepsilon}\right\| > 1 - \varepsilon$. □

Observemos que en el problema de Cole-Lewis-Wermer la n-upla fijada, $(M_1, ..., M_n)$, es la definidora del subespacio I y como para $j = 1, ..., n$ los M_j son estados linealmente independientes, entonces se cumple que:

"Dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ existe la clase $[f_w] \in B/I$ tal que para toda $f \in [f_w]$ $M_j(f) = w_j$ para $j = 1, ..., n$".

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum'(B)$ linealmente independientes y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ y la clase $[f_w] \in B/I$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $M_j(g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$.*

$$\|[f_w]\| \leq 1$$

si y sólo si,

$$\sup\left\{\left\|S_{[f_w]}^{\mu}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\} \leq 1.$$

Demostración. Para toda medida μ, se cumple que $\left\|S_{[f_w]}^{\mu}\right\| \leq \|[f_w]\| \leq 1$. Recíprocamente, supongamos que $\sup\left\{\left\|S_{[f_w]}^{\mu}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\} \leq 1$ y $\|[f_w]\| = 1 + a$ con $a > 0$. Definiendo $f_1 = \frac{1}{1+a} f_w$ entonces $\|[f_1]\| = 1$ y por el teorema 3.2 se tiene

$$\begin{aligned} 1 = \sup\left\{\left\|S_{[f_1]}^{\mu}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\} = \\ \tfrac{1}{1+a} \sup\left\{\left\|S_{[f_w]}^{\mu}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Luego, $\sup\left\{\left\|S_{[f_w]}^{\mu}\right\| : \mu \text{ es dominante y } \mu(I) = 0\right\} = 1 + a > 1$ y esto es una contradicción. □

Para cada medida dominante μ, tal que $\mu(I) = 0$, los estados $M_1, ..., M_n$ tienen extensiones continuas, $\widetilde{M_1}, ..., \widetilde{M_n}$ a H_μ^2, y por el teorema de representación de Riesz, existen $\eta_1(\mu), ..., \eta_n(\mu) \in H_\mu^2$ tales que para toda $h \in H_\mu^2$

$$\widetilde{M_j}(h) = \langle h, \eta_j(\mu)\rangle = \int_X h(t)\overline{\eta_j(\mu)(t)} d\mu(t) \text{ para } j = 1, ..., n. \tag{3.13}$$

Como $\mu(I) = 0$ entonces, $\eta_j(\mu) \in (I)^{\perp} = E_\mu$ para $j = 1, ..., n$ y son linealmente independientes, por lo tanto $\dim(E_\mu) = n$. De manera que las matrices asociadas a los operadores $S^{\mu}_{[f]}$ tienen orden n. Para expresar la condición $\left\| S^{\mu}_{[f]} \right\| \leq 1$ en términos de matrices positivas definidas, necesitamos una base de vectores propios de estos operadores, y para ello imponemos las siguientes hipótesis adicionales:

Hipótesis 2

a) Todas la medidas dominantes satisfacen:

$$\text{Para todo } f \in B \text{ y } e \in E_\mu \qquad fe \in H^2_\mu.$$

b) Las extensiones $\widetilde{M_1}, ..., \widetilde{M_n}$ de los estados $M_1, ..., M_n$ a H^2_μ verifican:

$$\text{Para todo } f \in B \text{ y } e \in E_\mu \qquad \widetilde{M_j}(fe) = M_j(f)\,\widetilde{M_j}(e) \qquad \text{para } \ j = 1, ..., n.$$

Con estas hipótesis adicionales se tiene:

Proposición 3.5. *Para toda medida dominante μ, tal que $\mu(I) = 0$ los vectores $\eta_1(\mu), ..., \eta_n(\mu)$ verifican:*

a) $\left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* \eta_j(\mu) = \overline{M_j(f)}\eta_j(\mu)$ para $j = 1, ..., n$.

b) $\left\| \left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* \right\| \leq 1$ si, y sólo si, la matriz

$$\left(\left(1 - \overline{M_i(f)}M_j(f)\right)\langle \eta_i(\mu), \eta_j(\mu)\rangle\right)^n_{i,j=1}$$

es positiva semidefinida.

Demostración. a) Sea μ una medida dominante fija, y sean $f \in B,\ e \in E_\mu$ y $\eta_j = \eta_j(\mu)$ para $j = 1, ..., n$ entonces,

$$\overline{\left\langle \left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* \eta_j, e\right\rangle} = \overline{\left\langle \eta_j, S^{\mu}_{[f]}e\right\rangle} = \langle \eta_j, P_{E_\mu}P_+ fe\rangle = \langle \eta_j, fe\rangle = \overline{\langle fe, \eta_j\rangle} =$$
$$\overline{\widetilde{M_j}(fe)} = \overline{M_j(f)\,\widetilde{M_j}(e)} = \overline{M_j(f)\,\langle e, \eta_j\rangle} = \overline{M_j(f)}\,\langle \eta_j, e\rangle = \left\langle \overline{M_j(f)}\eta_j, e\right\rangle.$$

Luego, para todo $e \in E_\mu$ $\left\langle \left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* \eta_j, e\right\rangle = \left\langle \overline{M_j(f)}\eta_j, e\right\rangle$ por lo tanto, $\left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* \eta_j = \overline{M_j(f)}\eta_j$ para $j = 1, ..., n$.

b) Para todo $e \in E_\mu$ $\qquad e = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\eta_j \qquad \left(S^{\mu}_{[f]}\right)^* e = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\overline{M_j(f)}\eta_j$

$$\left\| \left(S_{[f]}^{\mu} \right)^{*} \right\| \leq 1 \Leftrightarrow \forall e \in E_{\mu} \ \left\| \left(S_{[f]}^{\mu} \right)^{*} e \right\|_{2}^{2} \leq \|e\|_{2}^{2} \Leftrightarrow$$

$$\forall e \in E_{\mu} \ \|e\|_{2}^{2} - \left\| \left(S_{[f]}^{\mu} \right)^{*} e \right\|_{2}^{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \eta_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{M_i(f)} \eta_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{M_j(f)} \eta_j \right\rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j,i=1}^{n} c_i \overline{c_j} \langle \eta_i, \eta_j \rangle - \sum_{j,i=1}^{n} c_i \overline{c_j} \overline{M_i(f)} M_j(f) \langle \eta_i, \eta_j \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j,i=1}^{n} c_i \overline{c_j} \left(1 - \overline{M_i(f)} M_j(f) \right) \langle \eta_i, \eta_j \rangle \geq 0 \Leftrightarrow$$

la matriz $\left(\left(1 - \overline{M_i(f)} M_j(f) \right) \langle \eta_i, \eta_j \rangle \right)_{i,j=1}^{n}$ es positiva semidefinida. □

Con las hipótesis 2, completamos la respuesta al problema de Cole-Lewis-Wermer para el espacio vectorial B, en el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum'(B)$ linealmente independientes y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ y la clase $[f_w] \in B/I$ tal que*

$$\text{Para toda } g \in [f_w] \qquad M_j(g) = w_j \qquad \text{para } j = 1, ..., n.$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\|[f_w]\| \leq 1$.

b) Para toda medida dominante μ, tal que $\mu(I) = 0$ $\quad \left\| S_{[f_w]}^{\mu} \right\| \leq 1$.

c) Para toda medida dominante μ, tal que $\mu(I) = 0$ la matriz

$$\left(\left(1 - \overline{M_i(f_w)} M_j(f_w) \right) \langle \eta_i(\mu), \eta_j(\mu) \rangle \right)_{i,j=1}^{n}$$

es positiva semidefinida.

El teorema 3.4 da la respuesta al problema de Cole-Lewis-Wermer para espacios vectoriales uniformes, B, que satisfacen las hipótesis 1 y 2. Cambiando B por un álgebra uniforme A, y fijando $M_1, ..., M_n$ en el espacio de Gelfand de A, entonces el subespacio cerrado I es un ideal y los funcionales $M_1, ..., M_n$ son multiplicativos, o sea, se satisfacen las hipótesis requeridas para establecer el teorema 3.4 y por lo tanto, todos los resultados son válidos para el álgebra uniforme A.

Definiendo para cada medida dominante μ, (fija)

$$H_\mu^\infty := H_\mu^2 \cap L^\infty(\mu)$$

se tiene que, si $F \in H_\mu^\infty$ *y* $e \in E_\mu$ entonces, $Fe \in H_\mu^2$. En consecuencia, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.6. *Sea μ una medida dominante, fija. Para cada $F \in H_\mu^\infty$ sea $S_F^\mu : E_\mu \longrightarrow E_\mu$ definido por $S_F^\mu e := P_{E_\mu} Fe$ para $e \in E_\mu$. Entonces,*

a) Para cada $F \in H_\mu^\infty$ $S_F^\mu \in L(E_\mu)$ y $\|S_F^\mu\| \leq \|F\|_\infty$.

b) Si $F \in H_\mu^\infty$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset B$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - F\|_2 = 0$ entonces, para todo $e \in E_\mu \cap B$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| S_{f_n}^\mu e - S_F^\mu e \right\|_2 = 0$.

Por ser $H_\mu^\infty \subset H_\mu^2$ la igualdad (3.13) es cierta para toda $F \in H_\mu^\infty$ y nos planteamos el siguiente problema:

"Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum'(B)$ linealmente independientes y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$, dar condiciones necesarias y suficientes para que, para toda medida dominante μ tal que $\mu(I) = 0$, exista $F \in H_\mu^\infty$ que verifique

$$\|F\|_\infty \leq 1 \text{ y}$$
$$\widetilde{M_j}(F) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n."$$

Proposición 3.7. *Fijados $M_1, ..., M_n \in \sum'(B)$ linealmente independientes y dados $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$, para toda medida dominante μ tal que $\mu(I) = 0$, existe $F \in H_\mu^\infty$ tal que*

$$\|F\|_\infty \leq 1 \quad y \quad \widetilde{M_j}(F) = w_j \quad \text{para} \quad j = 1, ..., n$$

si y sólo si existe $[f_w] \in B/I$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $M_j(g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$ y

$$\|[f_w]\| \leq 1.$$

4 Problema de Unicidad

Si $\|[f_w]\| \leq 1$, el teorema 3.1 establece la existencia de una medida compleja, ν, que determina una medida de probabilidad, λ, y ésta origina una función, g, que es límite *débil*$-^*$ de la sucesión $\{f_w - y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ con $f_w - g \in I_\lambda$ y $\|g\|_\infty \leq 1$, o sea, $g \in H_\lambda^\infty$. Así que, definiendo $\widetilde{M_j}(g) = M_j(f_w)$ para $j = 1, ..., n$ resulta, $\widetilde{M_j}(g) = w_j$ para $j = 1, ..., n$ y la función g será solución del problema en H_λ^∞.

Entonces, nos planteamos el problema de la unicidad de la medida compleja, ν, que origina a la medida de probabilidad, λ, y a la función, g, del teorema 3.1.

La medida compleja, ν, proviene de una extensión Hahn-Banach del funcional, $l_\circ$, definido en el subespacio $L_\circ = I + \{cf\}_{c\in\mathbb{C}} \subset C(X)$. En consecuencia, podemos aplicar el criterio general de unicidad para las extensiones de funcionales señalada en [2].

Consideramos que $C(X)$ satisface el segundo axioma de numerabilidad. Así pues, $C(X)$ es separable, por lo tanto, existe $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C(X)$ tal que $C(X) = L_\circ + \overline{Lin\{f_1, f_2, ...\}}$ donde $Lin\{f_1, f_2, ...\}$ es la cápsula lineal generada por $f_1, f_2, ...$

De la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$, tomamos $f_1, ..., f_{n-1}$ tales que

$$B = L_\circ + Lin_{\mathbb{R}}\{f_1, ..., f_{n-1}\}$$

(Acá consideramos la cápsula lineal real). Como para todo $h \in L_\circ$

$$h = y + (a+ib)f \quad \text{con} \quad y \in I, \quad (a+ib) \in \mathbb{C} \text{ entonces,}$$
$$l_\circ(h) = a + ib$$

y el funcional lineal real, l_1, asociado a $l_\circ$ está definido por

$$l_1(h) = \mathrm{Re} l_\circ(h) = a \quad \text{para} \quad h \in L_\circ \quad \text{y} \quad a \in \mathbb{R}$$

la seminorma, p, es

$$p(h) = \|h\|_\infty \quad \text{para} \quad h \in L_\circ$$
$$\widetilde{p}(f) = \inf\{a + \|h - f\|_\infty : h \in L_\circ, a \in \mathbb{R}\} \text{ para } f \in C(X).$$

El criterio establece que hay unicidad de la extensión si, y sólo si,

$$\widetilde{p}(f_n) = -\widetilde{p}(-f_n) \quad \text{para } n = 1, 2, ...$$

Pero, como siempre es cierta la desigualdad $\widetilde{p}(f_n) \geq -\widetilde{p}(-f_n)$, entonces la condición se reduce a que sea cierta la desigualdad contraria y esta última la podemos escribir:

$$\widetilde{p}(f_n) + \widetilde{p}(-f_n) \leq 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, ...$$

Resumiendo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.1. *Hay unicidad de la medida, ν, de la demostración del teorema 3.1 si, y sólo si, para todo $n \geq 1$*

$$\inf\{a + b + \|f_n - h_1\|_\infty + \|f_n - h_2\|_\infty : h_1, h_2 \in L_\circ,\ a, b \in \mathbb{R}\} \leq 0.$$

Referencias

[1] Cedeño, G., *Tesis de Maestría*, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1995.

[2] Cedeño, G., Cotlar, M., *Condición de Unicidad para el Problema de Pick,* Divulgaciones Matemáticas, **8** (2) (2000), 99-112.

[3] Cole, B., Lewis, K., Wermer, J., *Pick Conditions on a Uniform Algebra and Von Neumann Inequalities,* Jour. of Funct. Anal., **107** (2) (1992), 234-244.

[4] Cole, B., Wermer, J., *Pick Interpolation, Von Neumann Inequalities and Hyperconvex Sets,* (Preprint).