Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 2(2007), pp. 227–233

Estimación de una funcional cuadrática de la densidad

Estimation of a quadratic functional of a density

María M. Olivares (molivar@euler.ciens.ucv.ve)
Escuela de Matemática Facultad de Ciencias UCV

Natacha Medina(natachamictil@cantv.net)
Escuela de Matemática Facultad de Ciencias UCV

Harú V. Martínez (martinezh@agr.ucv.ve)
Instituto de Ingeniería Agrícola Fac. de Agronomía UCV

Resumen

Se construyen estimadores de un funcional no lineal de la m-ésima derivada de la densidad de probabilidad, basándonos en la función característica empírica. Usando la condición de Lindeberg para arreglos triangulares obtenemos un Teorema central del Límite para estos estimadores.
Palabras Claves: función faracterística fmpírica, estimadores, funcional cuadrática.

Abstract

In this paper we construct estimators of certain nonlinear functional of the mth derivative of a probability density function, based on the empirical characteristic function. Using the Lindeberg-Feller Theorem for the double array we give a CLT for these estimators.
Key words and phrases: empirical characteristic function, estimators, quadratic functionals.

1 Introducción

La norma L^2 de la densidad y sus derivadas correspondiente a una muestra aleatoria es un funcional muy importante en un gran número de contextos.

Recibido 2006/03/28. Revisado 2006/06/25. Aceptado 2006/07/19.
MSC (2000): Primary 62G07; Secondary 62G30.

Está relacionado por ejemplo con la varianza asintótica del estadístico de rango de Wilconxon, el que corresponde a las tres primeras derivadas de la densidad, aparece en la selección de bandas asintóticamente óptimas para histogramas, polígonos de frecuencia y estimadores kernel de densidades. Muchos autores tales como, Bickel y Ritov[1] ; Wu [6]; Birgé y Massart [2]; Laurent [4]; Martínez y Olivares, [5], entre otros, han estudiado la estimación de este funcional basado en una muestra aleatoria, con diferentes metodologías.

En este trabajo presentamos una nueva demostración del problema de estimación de una densidad y sus derivadas, modificando la técnica utilizada por Martínez y Olivares[5], quienes construyen estimadores a partir de la función característica empírica usando la velocidad de convergencia de los procesos empíricos dada por Csörgö[3]. Nuestra técnica consiste en utilizar el Teorema de Límite Central Generalizado o Condición de Lindeberg para suma de variables aleatorias independientes obteniendo los mismos resultados con la posibilidad de generalizarlos a dimensiones superiores y a contextos no independientes[7].

2 Resultados

Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con función de distribución común F absolutamente continua de densidad f desconocida. Se considera el funcional:

$$\theta_m(f) = \int_{\mathbb{R}} \left[f^{(m)}(x) \right]^2 dx$$

donde $f^{(m)}$ es la derivada de orden m de la densidad f.

La función característica de f es:

$$\varphi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$$

y la función característica empírica:

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{itX_k}$$

donde F_n es la función de distribución empírica de la muestra.

Suponemos que:

$$\theta_m(f) = \int_{\mathbb{R}} \left[f^{(m)}(x) \right]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2m} \left| \varphi_f(t) \right|^2 dt$$

lo cual es cierto si $f^{(m)} \in L^1 \bigcap L^2, m \geq 0$; $f^{(j)} \in L^1$, $j = 1, 2, ..., m-1$.

Consideremos el siguiente estimador:

$$\hat{\theta}_n(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq a_n} t^{2m} |\varphi_n(t)|^2 \, dt$$

donde:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \right)^{\frac{1}{2m+1}}$$

satisface

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{2m+1}}{\sqrt{n}} = 0$$

Sea $\Psi_m, m > 0$, entero, el conjunto de densidades que satisfacen

$$|\varphi_f(t)| = o\left(\tfrac{1}{|t|^{2m+1} \ln |t|} \right) \quad \text{cuando } t \to \infty$$
$$f^{(2m)} \in L^1 \bigcap L^2$$
$$\theta_m(f) = \int_{\mathbb{R}} \left[f^{(m)}(x) \right]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2m} |\varphi_f(t)|^2 \, dt$$

bajo estas hipótesis se obtiene que

$$\sqrt{n} \int_{|t| > a_n} t^{2m} |\varphi_f(t)|^2 \, dt = o(1) \tag{1}$$

para $m = 0$, supondremos que existe $\beta > 1$, tal que

$$|\varphi_f(t)| = O(1 + |t|)^{-\beta}$$

lo que nos asegura que se cumple (1) y definimos Ψ_0 el conjunto de densidades que satisfacen

$$|\varphi_f(t)| = O(1 + |t|)^{-\beta} \quad \text{cuando } t \to \infty$$
$$f \in L^1 \bigcap L^2$$
$$\theta_0(f) = \int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_f(t)|^2 \, dt$$

En el caso $m = 0$ se estima $\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 \, dx$, se tiene la condición $|\varphi_f(t)| = O(1 + |t|)^{-\beta}, \beta > 1$ para la Gaussiana, la Exponencial Bilateral, la Gamma y la Cauchy. Para $m \neq 0$, la condición $|\varphi_f(t)| = o\left(\tfrac{1}{|t|^{2m+1} \ln |t|} \right)$ se tiene para la Gaussiana, Cauchy y para la Gamma sólo para ciertos valores del parámetro. Toda densidad cuya función característica es estable, es decir, $\varphi_f(t) = \exp(-k|t|^{\alpha}), k, \alpha > 0$ y cumple la igualdad $\int_{\mathbb{R}} \left[f^{(m)}(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2m} |\varphi_f(t)|^2 dt$ pertenece a la familia de densidades para las que se definen los estimadores.

Teorema 1. *Sea $m > 0$, un entero, $f \in \Psi_m$ entonces*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(m) - \theta_m(f)\right) \to N\left(0, \sigma_m^2(f)\right) \text{ en distribución}$$

donde $N\left(0, \sigma_m^2(f)\right)$ es la distribución normal centrada de varianza $\sigma_m^2(f)$ dada por

$$\sigma_m^2(f) = 4\left\{\int_{\mathbb{R}} \left|f^{(2m)}(x)\right|^2 dF(x) - \left[\int_{\mathbb{R}} f^{(2m)}(x)\, dF(x)\right]^2\right\}.$$

Teorema 2. *$f \in \Psi_0$ entonces*

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(0) - \int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dx\right) \to N\left(0, \sigma^2(f)\right) \text{ en distribución}$$

donde $N\left(0, \sigma^2(f)\right)$ es la distribución normal centrada de varianza $\sigma^2(f)$ dada por

$$\sigma^2(f) = 4\left\{\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dF(x) - \left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x)\right]^2\right\}.$$

3 Demostraciones

Demostración del teorema 1

Sea $m > 0$, expresamos el estadístico

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(m) - \theta_m(f)\right) = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n)$$

donde

$$I_1(n) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} \left|\varphi_n(t) - \varphi_f(t)\right|^2 dt$$
$$I_2(n) = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} Re\left\{\left(\varphi_n(t) - \varphi_f(t)\right)\left(\overline{\varphi_f(t)}\right)\right\} dt$$
$$I_3(n) = -\frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{|t|>a_n} t^{2m} \left|\varphi_f(t)\right|^2 dt$$

$\mathbb{E}\left(|I_1(n)|\right) \leq \dfrac{a_n^{2m+1}}{\pi\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pues $\mathbb{E}\left(\left|\varphi_n(t) - \varphi_f(t)\right|^2\right) = \dfrac{1-\left|\varphi_f(t)\right|^2}{n} \leq \frac{1}{n}$, concluyendo que $I_1(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ en probabilidad.

Por la hipótesis sobre el decrecimiento de $\varphi_f(t)$, (1) asegura que equivale a $|I_3(n)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Lo que diferencia la demostración con la presentada por Martínez y Olivares [5] es justamente el estudio del término $I_2(n)$, en lugar de utilizar el resultado de Csörgö [3], expresamos

$$I_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} \left\{e^{itX_k}\left(\overline{\varphi_f(t)}\right) + e^{-itX_k}\varphi_f(t) - 2\left|\varphi_f(t)\right|^2\right\} dt$$

y como $\mathbb{E}\left(e^{itX_k}\right) = \varphi_f(t)$ tenemos que

$$E\left(I_2(n)\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad var\left(I_2(n)\right) = \mathbb{E}\left(I_2(n)\right)^2$$

donde mediante simples cálculos

$$\begin{aligned} E\left(I_2(n)\right)^2 =& \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{|t|\leq a_n} \int\limits_{|s|\leq a_n} t^{2m} s^{2m} \varphi_f(t+s)\, \overline{\varphi_f(t)\varphi_f(s)} dt ds \\ & - \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} \left|\varphi_f(t)\right|^2 dt\right)^2 \end{aligned}$$

concluyendo que $\mathbb{E}\left(I_2(n)\right)^2 \to \sigma_m^2(f)$ cuando $n \to \infty$.

Para obtener la convergencia en distribución expresamos

$$I_2(n) = \sum_{k=1}^{n} Y_{kn}$$

donde

$$Y_{kn} = \frac{1}{\pi\sqrt{n}} Re \int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} \left\{ \left(e^{itX_k} - \varphi_f(t)\right) \left(\overline{\varphi_f(t)}\right) \right\} dt$$

tenemos que

$$Var\left(I_2(n)\right) = \mathbb{E}\left(I_2(n)\right)^2 = s_n^2$$

para obtener el Teorema Central del Límite , se debe verificar la condición de Lindeberg, es decir que $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1} \int\limits_{\{|Y_{kn}| \geq \varepsilon s_n\}} Y_{kn}^2 d\mathbb{P} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

puesto que

$$Y_{kn}^2 \leq \frac{4}{\pi^2 n} \left(\int\limits_{|t|\leq a_n} t^{2m} dt \right)^2 \leq \frac{16}{\pi^2 n} \left(\frac{a_n^{2m+1}}{2m+1} \right)^2$$

a partir de

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(Y_{kn}^2 \geq \varepsilon^2 s_n^2\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^2 s_n^2} \int Y_{kn}^2 d\mathbb{P}$$

se verifica la condición de Lindeberg.

El Teorema Central del Límite nos afirma que

$$I_2(n) \to N\left(0, \sigma_m^2(f)\right)$$

de donde

$$I_1(n) + I_3(n) + I_2(n) \to N\left(0, \sigma_m^2(f)\right)$$

en distribución, se concluye que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(m) - \theta_m(f)\right) \to N\left(0, \sigma_m^2(f)\right)$$

en distribución. □

Demostración del teorema 2

Cuando $m = 0$, asumiremos que existe $\beta > 1$, tal que

$$|\varphi_f(t)| = O\left(1 + |t|\right)^{-\beta}.$$

Esta hipótesis sobre el decrecimiento de $\varphi_f(t)$ permite demostrar que

$$|I_3(n)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

La demostración es similar a la del Teorema 1, obteniendo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(0) - \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, d(x)\right) = N\left(0, \sigma_F^2\right)$$

en distribución, donde

$$\sigma_F^2 = 4\left\{\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2\, dF(x) - \left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x)\right]^2\right\}.$$

□

References

[1] Bickel, P., Ritov, Y., (1988), Estimating Integrated Squared Density Derivaties: Sharp best order of convergence estimates. Sankhyã Ser. A.

[2] Birgé, L., Massart, P., (1995), Estimation of Integral Functionals of a Density. Ann. Statist.

[3] Csörgö, S., (1981a), Limit Behaviour of the Empirical Characteristic Function. Ann. Probab.

[4] Laurent, B., (1996), Efficient Estimation of Integral Functionals of a Density. Ann. Statist.

[5] Martínez, H.,Olivares, M.M.,(1999), Estimation of Quadratic Functionals of a Density. Statistics and Probability Letters 42; 327-332.

[6] Wu, T., (1995), Adaptive Root n Estimates of Integrated Squared Density Derivatives. Ann. Statist.

[7] Río, E. (1999). Théorème limite pour des suites faiblement dépendantes. SMAI Mathématiques et Applications 31, Springer.