Divulgaciones Matemáticas Vol. 12 No. 2(2004), pp. 181–185

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@demat.org.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Del 17 al 26 de septiembre de este año se realizó en Castellón, España, la XIX Olimpíada Iberoamericana de Matemática, a la cual por primera vez en su historia asistieron los veintidós países convocados. El gran ganador fué Brasil, que logró cuatro medallas de oro, seguido de Colombia con dos y Cuba y México con una cada uno. La Copa Puerto Rico, que se otorga al país de mayor progreso relativo, fué adjudicada a Ecuador.

En la delegación venezolana Maximiliano Liprandi obtuvo una medalla de bronce mientras que Rodrigo Ipince y Andrés Guzmán recibieron sendas menciones honoríficas. Vayan nuestras felicitaciones a todos ellos.

La sede para el próximo año será Cartagena de Indias, en Colombia, país en el que esta Olimpíada se inició en 1985.

Los problemas 86 al 91 son los propuestos en dicha competencia.

1 Problemas propuestos

86. Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

    - Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
    - De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

    Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

87. Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

88. Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que $\mathrm{mcd}(a, n) = \mathrm{mcd}(b, n) = 1$ y $k = a + b$.

89. Determinar todas las parejas (a, b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

90. Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente. Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA', B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'. Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

91. Para un conjunto $\mathcal{H}$ de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un punto de corte de $\mathcal{H}$ si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en $\mathcal{H}$ tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P. Dado un conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$,... de la siguiente manera: para cualquier $j \geq 0$, $\mathcal{A}_{j+1}$ es la unión de $\mathcal{A}_j$ con el conjunto de todos los puntos de corte de $\mathcal{A}_j$. Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j \geq 1$ se tiene que $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

92. *Propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España*

    Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un ortocentro dado y están inscritos en una circunferencia dada es otra circunferencia.

93. *Propuesto por Francisco J. García Capitán, Córdoba, España, y Ricardo Barroso Campos, Universidad de Sevilla, España*

    ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos que tienen un incentro dado y están inscritos en una circunferencia dada?

2 Soluciones

29. [**8**(2) (2000) p. 179.] Sea n un entero positivo par. Hallar todas las triplas de números reales $(x,\ y,\ z)$ tales que

$$x^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n.$$

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

Escribamos la condición en la forma equivalente

$$x^n(y-z) + y^n z = xy^n + z^n(y-x)$$

y restamos y^{n+1} a ambos miembros resulta

$$x^n(y-z) + y^n(z-y) = (x-y)y^n + z^n(y-x)$$

o bien

$$(y^n - x^n)(z-y) = (z^n - y^n)(y-x). \tag{1}$$

De aquí es claro que si dos de las tres cantidades x, y, z son iguales la tercera también debe serlo, por lo tanto todas las ternas (x,x,x) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (1) entre $(z-y)(y-x)$ resulta

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \frac{y^n - z^n}{y-z}. \tag{2}$$

Esta ecuación se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x,x^n), (y,y^n) y la pendiente de la recta que pasa por los puntos (y,y^n),(z,z^n), es decir que la condición equivale a que los tres puntos (x, x^n), (y, y^n), (z, z^n) estén alineados. Pero como n es par la función $f(x) = x^n$ es convexa (su gráfica es una parábola para $n = 2$ y una curva parecida pero más achatada cerca del origen para $n = 4, 6, \ldots$) por lo cual no puede tener tres puntos diferentes alineados.

31. [**8**(2) (2000) p. 180].

a) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Demostrar que

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2.$$

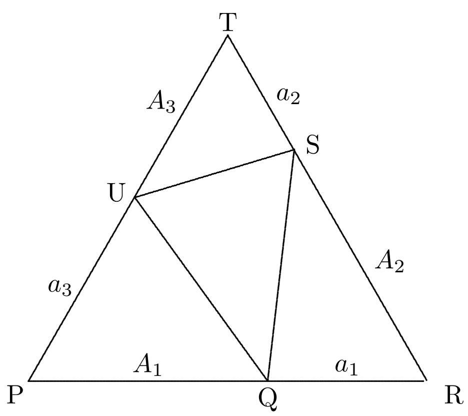
b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4 reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$

y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

Cada igualdad $a_i + A_i = k$ puede representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos tres segmentos podemos construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto a_1A_2 está relacionado con el área del triángulo QRS, que denotaremos $|QRS|$. De hecho como $\angle QRS = 60°$ se tiene que $|QRS| = a_1A_2\sqrt{3}/4$. Del mismo modo $|STU| = a_2A_3\sqrt{3}/4$ y $|UPQ| = a_3A_1\sqrt{3}/4$, mientras que $|PRT| = k^2\sqrt{3}/4$. Observando la figura es obvio que

$$|QRS| + |STU| + |UPQ| < |PRT|,$$

y multiplicando por $4/\sqrt{3}$ resulta la desigualdad de la parte (a).

La parte (b) es tal vez más fácil: basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad.

57. [**10**(1) (2002) p. 86.] Se tiene una lista $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{21})$ de 21 números enteros positivos no necesariamente distintos entre sí. Se dice que la terna $[a_i, a_j, a_k]$ es una *escalera*, si $1 \leq i < j < k \leq 21$, y además $a_j = a_i + 1$ y $a_k = a_j + 1$. Sea $E(A)$ el número de escaleras de la lista A. Por ejemplo, si $A = (1, 2, 3, 21, 21, \ldots, 21)$, entonces se tiene únicamente la escalera $[a_1, a_2, a_3] = [1, 2, 3]$ y por lo tanto $E(A) = 1$. Si se consideran todas las listas posibles A, ¿cuál es el máximo valor de $E(A)$? Justifique su respuesta.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España.

El máximo valor es $7^3 = 343$. Si todos los a_i fuesen distintos, el máximo numero de escaleras sería 19, si estuviesen ordenados en orden creciente y fuesen consecutivos. Si se tienen dos escaleras distintas $[a_i, a_j, a_k]$ y $[a'_i, a'_j, a'_k]$ y se sustituye la segunda por una copia de la primera, reordenando la lista en orden no decreciente, si es preciso, el número de escaleras posibles aumenta. Si ambas escaleras son disjuntas se pasa de 2 a 8, y si coinciden parcialmente: tanto si $a_k = a'_i$, como si $a_j = a'_i$ y $a_k = a'_j$, se pasa de 4 a 8 escaleras posibles.

Si se tienen dos grupos de m y k escaleras iguales, con $m \leq k$, al sustituir una de las m por otra igual a las k, aumenta asimismo el número de escaleras. Por tanto, el número de escaleras es máximo cuando son todas iguales. Nos encontramos entonces con una lista A formada por 21 números, entre los que sólo hay 3 distintos. Digamos a, $a+1$ y $a+2$, de los que hay k, m y n, respectivamente, con $k + m + n = 21$.

El número de escaleras será kmn, pues podemos escoger un elemento cualquiera de cada una de las tres sublistas para formarlas.

Pero el máximo de kmn cuando la suma $k + m + n$ es constante se produce cuando $k = m = n$. En este caso, 7.