Théorème de Bochner et feuilletage minimal

Mohamed A. Chaouch

Abstract. The starting point of this work is the Bochner theorem on harmonics 1-forms stated at 1946. We show that many results on minimal foliations of codimension one and two on compact pseudo-Riemannian manifolds are at the origin of this theorem. We also prove the non existence of minimal Riemannian foliations of codimension one defined by a 1-form with finite global norm on complete non compact Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature.

M.S.C. 2000: 53C12, 57R30.
Key words: Feuilletage Riemannien, Feuilletage Lorentzien, Feuilletage minimal, Feuilletage totalement géodésique, courbure de Ricci, courbure sectionnelle, métrique quasi-fibré.

1 Introduction

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord, ∇ la connection de Levi-Civita induite de g et A_X le tensor de type $(1,1)$ défini par $A_X(Y) = \nabla_Y X$ pour tous X, Y dans $\Gamma(TM)$. Soit ω une 1-forme sur M et $N = \omega^\natural$ le champ de vecteur dual de ω via g c'est *à* dire que $\omega = i_N g$, d^* l'opérateur adjoint de l'opérateur différentiel extérieure d et $\Delta = dd^* + d^*d$ l'opérateur de laplace-Beltrami.

Le point de départ du présent travail est le théorème de Bochner suivant ([9] page 177) :

Si ω est une 1-forme harmonique $(\Delta\omega = 0)$ et si la courbure de Ricci de M est non-négative, alors ω est parallèle $(\nabla\omega = 0)$. Si de plus la courbure de Ricci de M est positive en un point, alors $\omega = 0$.

La preuve de ce théorème consiste d'abord *à* remarquer que la condition $d\omega = 0$ est équivalent *à* A_N est symétrique via g et par conséquent $trA_N^2 \geq 0$; puis utiliser les hypothèses $Ric(N, N) \geq 0$, $d^*\omega = -divN = 0$ et la formule de Green [7] (voir aussi [6]) pour déduire le résultat.

On remarque que si ω est harmonique non singulière, alors elle définit un feuilletage de codimension un sur M et l'énoncé de Bochner en termes de feuilletages sera :

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.12, No.2, 2007, pp. 32-50.

Si $(\mathcal{F}, \omega = 0)$ est un feuilletage Riemannien ($d\omega = 0$), minimal ($d^*\omega = 0$) de codimension un sur M et si la courbure de Ricci de M est non-négative, alors $\mathcal{F}$ est totalement géodésique.

Ce qu'on veut signaler ici c'est que ce résultat s'améliore en supprimant l'hypothèse $\mathcal{F}$ est Riemannien pour retrouver un théorème d'Oschikiri [8] dont l'énoncé :

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage minimal de codimension un sur M et si la courbure de Ricci de M est non-négative, alors $\mathcal{F}$ est Riemannien totalement géodésique.
Ce théorème se démontre de la manière suivante :

a) Si N est l'unique champ de vecteur normal à $\mathcal{F}$ tel que $\omega(N) = g(N, N) = 1$, alors $L = Ker\omega$, le sous fibré tangent *à* $\mathcal{F}$, est sable par l'endomorphisme A_N et l'intégrabilité de ω ($d\omega = \omega \wedge \nabla_N \omega$) entraîne que $A = A_N/_E$ est symétrique via g, par conséquent $trA_N^2 =\| A \|^2$.

b) Comme par hypothèse $Ric(N, N) \geq 0$, $d^*\omega = 0$ et $trA_N^2 \geq 0$ d'après a), alors de la formule de Green on déduit les deux propriétés suivantes :

i) $A \equiv 0$ ou encore $\nabla_X \omega = 0$ pour tout $X \in \Gamma(L)$, c'est *à* dire que ω est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{F}$.

ii) $divV = 0$ où $V = \nabla_N N$.

c) L'intégrabilité de ω entraîne que $d(\nabla_N \omega)$ est divisible par ω, et comme $A \equiv 0$ d'après ii), alors $trA_V^2 \geq 0$.

d) Comme $Ric(V, V) \geq 0$, $\quad trA_V^2 \geq 0 \quad et \quad divV = 0$, alors la formule de Green permet de conclure que $V = 0$.

Maintenant nous donnons la définition suivante :

Définition 1.1. Soit (M, g) une variété Lorentzienne. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur M est dit *g-Lorentzien*, si la métrique g est quasi-fibré (bundle like au sens de Reinhart) et si le fibré orthogonal à $\mathcal{F}$ est de type temps.

Dans ce papier on s'intéresse encore à l'etude des feuilletages minimaux. Dans toute la suite de ce texte, les feuilletages que l'on considère sont supposés orientables et transversalement orientables. Ce qui donne evidemment une orientaion de la variété ambiante.

Le travail est divisé en cinq parties. La deuxième partie est réservée aux préliminaires. Dans la troisième partie on montre essentiellement que les résultats de [8] restent encore valables pour un feuilletage Lorentzien, ce qui n'est pas le cas pour le théorème de Bochner (singulier). Plus précisément on montre les théorèmes suivants :

Théorème 1.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne (resp Lorentzienne) compacte sans bord et à courbure de Ricci non négative. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage minimal de codimension un sur M tel que le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ est de type espace lorsque M est Lorentzienne, alors $\mathcal{F}$ est Riemannien (resp Lorentzien) totalement géodésique et on a l'une des situations suivantes :*

a) M est le tore $\mathbb{T}^n$ et $\mathcal{F}$ est le feuilletage linéaire.

b) M est un produit $M_1 \times \mathbb{S}^1$ où M_1 est une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n-1 à courbure de Ricci non-négative et $\mathcal{F}$ est le feuilletage trivial $M_1 \times \{t\}$.

Théorème 1.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne (resp Lorentzienne) compacte sans bord et à courbure sectionnelle non positive. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage totalement géodésique de codimension un sur M tel que le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ est de type* *espace lorsque M est lorentzienne, alors $\mathcal{F}$ est Riemannien (resp Lorentzien) et on a les conclusions a) ou b) du théorème 1.2 sauf que dans b) la variété M_1 sera à courbure sectionnelle non positive.*

Dans La partie quatre on justifie l'extension des théorèmes 1.2 et 1.3 au cas d'une variété compacte à bord muni d'un feuilletage tangent au bord. Alors on prouve :

Théorème 1.4. *Soit (M, g) une variété Riemanienne (resp Lorentzienne) compacte à bord et à courbure de Ricci non-négative. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage minimal de codimension un sur M, tangent au bord de M et tel que le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ est de type espace lorsque M est lorentzienne, alors la variété M est un produit $M_1 \times [0, 1]$ où M_1 est une variété compacte sans bord de dimension n-1 à courbure de Ricci non-négative et $\mathcal{F}$ est le feuilletage trivial $M_1 \times \{t\}$.*

Dans la partie cinq on se place sur une variété Riemannienne (resp pseudo-Riemannienne de signature (n-2,2)) compacte sans bord et on introduit ce qu'on a appelé $\mathcal{P}$-feuilletage : c'est un feuilletage de codimension deux à fibré normal trivial satisfaisant certaines conditions d'intégrabilité. D'autre part le sous fibré orthogonal à un feuilletage de codimension deux est dit f-intégrable s'il admet un repère orthonormé (N_1, N_2) tel que N_1 et N_2 commutent. On montre qu'on peut étendre les résultats de la partie deux au cas d'un $\mathcal{P}$-feuilletage minimal (resp totalement géodésique) dont le fibré orthogonal est f-intégrable ; nous obtenons :

Théorème 1.5. *1) Si $\mathcal{F}$ un $\mathcal{P}$-feuilletage minimal de codimension 2 sur une variété (M, g) Riemannienne (resp pseudo-Riemannienne) compacte sans bord à courbure de Ricci non-négative tel que le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ est de type espace lorsque M est pseudo-Riemannienne, alors $\mathcal{F}$ est totalement géodésique.*

2)Si l'on suppose de plus que le sous fibré orthogonal à $\mathcal{F}$ est f-intégrable, alors $\mathcal{F}$ est l'intersection de deux feuilletages Riemanniens (Lorentziens) totalement géodésiques de codimension un et on a l'une des situations suivantes :

a) $M = \mathbb{T}^n$ et $\mathcal{F}$ est l'intersection de deux feuilletages linéaires de codimension un.

b) M est un produit $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ et $\mathcal{F}$ est un feuilletage linéaire de codimension un de $\mathbb{T}^{n-1}$.

c) M est un produit $M_1 \times \mathbb{T}^2$ où M_1 est une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n-2 à courbure de Ricci non-négative et $\mathcal{F}$ est le feuilletage trivial $M_1 \times \{t\}$.

Théorème 1.6. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{P}$-feuilletage totalement géodésique de codimension 2 sur une variété (M, g) Riemannienne (resp pseudo-Riemannienne) compacte sans bord à courbure sectionnelle non-positive tel que le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ est de type espace lorsque M est pseudo-Riemannienne. Si le sous fibré orthogonal à $\mathcal{F}$ est f-intégrable, alors on a les mêmes conclusions du théorème 1.4 sauf que dans c) la variété M_1 sera à courbure sectionnelle non-positive.*

Enfin dans la dernière partie on se place sur une variété Riemannienne complète non compacte à courbure de Ricci non-négative. En utilisant les techniques dans [11] (voir aussi [3]) nous montrons :

Théorème 1.7. *il n'existe pas de feuilletage Riemannien minimal de codimension 1 sur une variété Riemannienne complète non compacte à courbure de Ricci non-négative définie par une 1-forme harmonique de norme globale finie.*

Théorème 1.8. *sur une variété Riemannienne complète non compacte, il n'existe pas de feuilletage Riemannien définie par une 1-forme fermée de norme globale finie et de dérivée covariant parallèle.*

2 Préliminaire

Soit (M, g) une variété Riemannienne (resp. Lorentzienne de signature $(n-1, 1)$, ∇ la connection de levi Civita induite de g et TM le fibré tangent à M. Soit ω une 1 forme intégrable non singulière sur M, $L \subset TM$ le noyau de ω et $N = \omega^{\natural}$ l'unique champ unitaire dual de ω via g et orthogonal à L. On suppose que le fibré L est de type espace lorsque la variété M est lorentzienne. On désigne par $\Gamma(TM)$ (resp $\Gamma(L)$) l'ensemble des sections de TM (resp E), par A_X, $X \in \Gamma(TM)$ l'endomorphisme de TM défini par $A_X(Y) = \nabla_Y X$, $\ Y \in \Gamma(TM)$. Dans la suite $(E_1, E_2, ..., E_{n-1})$ désigne un repère orthonormé local du fibré E. Enfin pour simplifier le texte on pose $V = \nabla_N N$ et $\| X \|^2 = g(X, X)$. Par un calcul élémentaire on peut montrer :

Lemme 2.1. *Soit B un endomorphisme de TM (tenseur de type (1,1)). On a les relations suivantes :*

a)

$$\begin{aligned} trB^2 &= \sum_{i,j=1}^{n-1} g(B(E_i), E_j).g(B(E_j), E_i)+ \\ &+ 2\epsilon \sum_{i=1}^{n-1} g(B(N), E_i).g(N, B(E_i))+ \\ &+ (g(B(N), N))^2 \end{aligned}$$

où $\epsilon = 1$ (resp -1) si M est Riemannienne (resp Lorentzienne).

b) Si B(L)$\subset$ L et $B_{/L}$ est symétrique via g, alors

$$trB^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} (g(B(E_i), E_j))^2 + g(B(N), N)^2. \tag{2.1}$$

En particulier si $trB^2 = 0$, alors $B_{/L} \equiv 0$.

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on pose $\nabla^2_{X,Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}$. Si R est le tenseur de courbure de ∇, on a $R(X, Y) = \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X}$. Soit $R_X : TM \mapsto TM$ l'opérateur de courbure directionnelle définie par $R_X(Y) = R(Y, X)X$. Alors

$$Ric(X, X) = trR_X = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(E_i, X)X, E_i) + \varepsilon g(R(N, X)X, N).$$

Lemme 2.2. *Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a les relations suivantes :*

$$Ric(X, X) + trA_X^2 + \nabla_X divX = div\nabla_X X. \tag{2.2}$$

$$Ric(X, X) + trA_X^2 - (divX)^2 = div(\nabla_X X - (divX)X). \tag{2.3}$$

Démonstration. Montrons la relation (2.2). On a
$tr A_X^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i) + \epsilon g(\nabla_{\nabla_N X} X, N)$ et $Ric(X,X) = B + C$ où

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla^2_{E_i,X} X, E_i) + \epsilon g(\nabla^2_{N,X} X, N) = div\nabla_X X - tr A_X^2$$

et

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla^2_{X,E_i} X, E_i) + \epsilon g(\nabla^2_{X,N} X, N) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_X g(\nabla_{E_i} X, E_i) + \epsilon \nabla_X g(\nabla_N X, N) - (P+Q) \\ &= \nabla_X div X - (P+Q) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i) + \epsilon g(\nabla_N X, \nabla_X N) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i} X, E_j) g(\nabla_X E_i, E_j) + \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{E_i} X, N) g(\nabla_X E_i, N) + \\ &+ \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_N X, E_j) g(\nabla_X N, E_j) + g(\nabla_N X, N) g(\nabla_X N, N). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i,j=1}^{n-1} g(\nabla_{\nabla_X E_j} X, E_j) + \epsilon g(\nabla_{\nabla_X N} X, N) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} g(\nabla_X E_j, E_j) g(\nabla_{E_i} X, E_j) + \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_X E_j, N) g(\nabla_N X, E_j) + \\ &+ \epsilon \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_X N, E_j) g(\nabla_{E_j} X, N) + g(\nabla_X N, N) g(\nabla_N X, N). \end{aligned}$$

Mais $P + Q = 0$ car

$$\begin{aligned} g(\nabla_X E_i, E_j) &+ g(E_i, \nabla_X E_j) = g(\nabla_X E_i, N) + g(E_i, \nabla_X N) \\ &= g(\nabla_X N, N) = 0. \end{aligned}$$

On obtient la relation (2.3) à partir de (2.2) en utilisant l'identité

$$div(divX.X) = (divX)^2 + \nabla_X divX.$$

$\square$

Proposition 2.3. *Si la variété (M, g) est Riemannienne (resp Lorentzienne) alors on a les relations suivantes :*

(2.4) $$trA_N^2 = |A_N|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \|A_N(E_i)\|^2.$$

Si $trA_N^2 = 0$, *alors*

(2.5) $$trA_V^2 = \|V\|^4 \geq 0.$$

Démonstration. Montrons (2.4). Comme N est unitaire, alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a

$$\omega \circ A_N(X) = g(\nabla_X N, N) = 0.$$

Par conséquent $A_N(TM) \subset L$ et A_N induit un endomorphisme $A = A_N/_L$ de L. D'autre part A est symétrique via g, en effet pour tous $X, Y \in \Gamma(L)$

$$g(A(X), Y) - g(X, A(Y)) = \nabla_X \omega(Y) - \nabla_Y \omega(X) = d\omega(X, Y) = \omega[X, Y] = 0$$

car L est involutif. Le résultat découle de la relation (2.1).
Maintenant si $trA_N^2 = 0$, alors $A_N/L = 0$ et par conséquent

$$g(N, A_V(E_i)) = -g(V, A_N(E_i)) = 0, \quad \text{pour tout } \ i = 1, ..., n-1$$

c'est à dire que $A_V(L) \subset L$.

Posons $\alpha = \nabla_N \omega$, alors $d\omega = \omega \wedge \alpha$, d'où $d\alpha \wedge \omega = 0$, c'est à dire que $d\alpha$ est divisible par ω. Pour tous $X, Y \in \Gamma(L)$ on a

$$g(A_V(X), Y) - g(X, A_V(Y)) = \nabla_X \alpha(Y) - \nabla_Y \alpha(X) = d\alpha(X, Y) = 0.$$

C'est à dire que A_V est symétrique via g sur L. Alors le résultat découle encore de (2.1). □

Remarquons que la formule de Green sur une variété Riemannienne telle qu'elle est présentée dans [7] est encore valable sur une variété de Lorentz.

Proposition 2.4. *Si la variété* (M, g) *est Riemannienne (resp Lorentzienne), compacte sans bord et si les endomorphismes* A *et* R_N *sont nuls, alors* $V = 0$ *et* ω *est parallèle.*

Démonstration. Si $A \equiv 0$, alors pour tout $X \in \Gamma(E)$, on a

$$R_N(X) = R(X, N)N = \nabla^2_{X,N} N - \nabla^2_{N,X} N = \nabla_X V + \nabla_{\nabla_N X} N = \nabla_X V - \epsilon g(X, V)V.$$

Si de plus $R_N \equiv 0$, alors $\nabla_X V = \epsilon g(X, V)V$ pour $X \in \Gamma(E)$ et on en déduit que

$$\nabla_V V = \epsilon \|V\|^2.V \ \text{ et } \ divV = 0.$$

D'où

$$div\nabla_V V = \epsilon div(\|V\|^2.V) = \epsilon \nabla_V \|V\|^2 = 2\|V\|^4.$$

Le résultat découle de la formule de Green. □

Supposons que la variété (M, g) est Lorentzienne, alors comme dans le cas Riemannien on a :

Proposition 2.5. *Si* ω *est fermée et si* $L = Ker\omega$ *est de type espace, alors le feuilletage d'équation* $(\omega = 0)$ *est Lorentzien.*

Démonstration. Montrons que la métrique g est quasi-fibrée. Soit $X \in \Gamma(L)$, alors on a

$$(L_X g)(N, N) = 2g([X, N], N) = 2\omega([X, N]) = -2d\omega(X, N) = 0.$$

□

3 Cas d'une variété compacte sans bord

Soit d^* l'opérateur adjoint de d. Le théorème 1.2 s'interprète comme une généralisation du théorème de Bochner (cas non singulier). En effet on peut l'énoncer ainsi :

Soit ω une 1- forme intégrable non singulière sur une variété Riemannienne (resp Lorentzienne) compacte sans bord à courbure de Ricci non-négative, tel que $Ker\omega$ est de type espace lorsque la variété est de Lorentz. Si $d^*\omega = 0$, alors ω est parallèle et on a l'une des situations a) ou b) du théorème 1.2.

Démonstration. (du théorème 1.2) Soit Ω la forme volume canonique de (M, g). Comme $d^*\omega = -divN = 0$, alors d'après la relation (2.2) et la formule de Green on a

$$\int_M (Ric(N,N) + trA^2)\Omega = 0$$

Mais comme $trA^2 \geq 0$, alors

$$Ric(N,N) = trA^2 = divV = 0.$$

D'où, d'après (2.5) on a

$$A = 0 \text{ et } trA_V^2 \geq \|V\|^4.$$

En appliquant encore la formule de Green, on obtient

$$\int_M (Ric(V,V) + trA_V^2)\Omega = 0.$$

Par conséquent $V = 0$, C'est à dire que ω est fermée. Mais $A = 0$ et $V = 0$ signifient que ω est parallèle. Les conclusions a) et b) découlent de la classification des feuilletages Riemanniens totalement géodésique de codimension 1 faite dans [4]. □

Proposition 3.1. *Si la variété (M, g) est Riemannienne (resp Lorentzienne) compacte sans bord et si $\nabla\omega$ est parallèle, alors $\nabla_X\omega = 0$ pour tout $X \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. En effet, on a $divV = trA_N^2 = \|A\|^2$. Donc $A = 0$. □

Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$; la courbure sectionnelle de (M, g) est définie par $sec(Y, X) = g(R_Y(X), X)$. Le théorème (1.3) s'énonce aussi de la manière suivante :

Soit ω une forme intégrable non singulière sur une variété Riemanienne (resp Lorentzienne) compacte sans bord à courbure sectionnelle non-positive, tel que $Ker\omega$ est de type espace lorsque la variété est de Lorentz. Si l'endomorphisme A est nul, alors ω est parallèle et on a l'une des situations a) ou b) du théorème 1.2.

Démonstration. (du théorème 1.3) On remarque d'abord que

$$divN = trA_N = trA_N^2 = 0$$

et que

$$Ric(N,N) = trR_N = \sum_{i=1}^{n-1} sect(N, E_i) \leq 0$$

Donc d'après (2.2) et la formule de Green, on a $Ric(N,N) = 0$, ce qui entraîne

$$g(R_N(E_i), E_i) = sec(N, E_i) = 0 \quad \text{pour} \;\; i = 1, ...n-1.$$

Donc $g(R_N(X), Y) = 0$ pour tout $X, Y \in \Gamma(E)$ et alors la conclusion découle de la proposition 2.4. □

On termine cette partie en donnant une application du théorème de Bochner sur les structures transversalement affines et homographiques. Dans la suite la variété (M, g) considérée est Riemannienne compacte sans bord à courbure de Ricci non-négative. On suppose d'abord que (ω, α) définit une structure transversalement affine sur$M$, c'est à dire que $d\alpha = 0$ où $\alpha = \nabla_N \omega$.

Proposition 3.2. *Si α est harmonique (resp $\nabla\alpha$ est parallèle), alors ω est fermée.*

Démonstration. Si α est harmonique, d'après le théorème de Bochner α est parallèle, donc $A_V = 0$. par conséquent $\|V\|^2 = -g(A_V(N), N) = 0$.
Si $\nabla\alpha$ est parallèle, alors l'endomorphisme A_V est parallèle symétrique. En posant $E_n = N$, on aura

$$\begin{aligned} div\nabla_V V &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} A_V(V), E_i) = \sum_{i=1}^{n} g(A_V(\nabla_{E_i} V), E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|A_V(E_i)\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $A_V = 0$. □

Nous déduisons alors :

Proposition 3.3. *Sur une variété Riemannienne compacte sans bord à courbure de Ricci non-négative, tout feuilletage transversalement affine de codimension 1 dont l'holonomie est définie par une 1-forme harmonique (resp fermée de dérivée covariante parallèle) est Riemannien.*

Posons $W = \nabla_N V + \nabla_V N$ et $\beta = W^\flat$ la forme duale de W via g. Alors on a $d\alpha = \omega \wedge \beta$. Supposons que le triplet (ω, α, β) définit une structure transversalement homographique sur M : c'est à dire que l'on a en plus $d\beta = \alpha \wedge \beta$.

Proposition 3.4. *On a les propriétés suivantes :*
a) Si $d^*\beta = -divW = 0$, alors β est singulière.
b) Si β est harmonique, alors ω est fermée.

Démonstration. a) Si β est non singulière, comme elle est intégrable, alors d'après le théorème 1.2, elle sera fermée, par conséquent $V = 0$ et donc $\beta = 0$, ce qui est absurde.

b) Si β est harmonique, alors d'après le théorème de Bochner W est parallèle. Donc $\|W\|$ est une constante devant être nulle car β est singulière. Par conséquent

$$0 = g(W, N) = g(\nabla_N V, N) = -\|V\|^2.$$

□

4 Cas d'une variété compacte à bord

Démonstration. (du théorème 1.4). Dans la preuve du théorème 1.2, on utilise deux fois la formule de Green à savoir

$$\int_M div V\Omega = 0 \text{ et } \int_M div\nabla_V V\Omega = 0.$$

Maintenant si M est compacte à bord et si le feuilletage $\mathcal{F}$ d'équation $\omega = 0$ est tangent au bord de M alors, sachant que $V \in \Gamma(E)$, la première intégrale devient

$$\int_M div V\Omega = \int_{\partial M} g(V, N).\delta = 0$$

où δ est la forme volume de ∂M induite de Ω.

De même la deuxième intégrale devient

$$\int_M div\nabla_V V\Omega = \int_{\partial M} g(\nabla_V V, N)\delta = 0$$

car $g(\nabla_V V, N) = -g(V, A_N(V)) = 0$ puisque $A_N/_E = 0$. □

De la même manière, on montre que le théorème 1.3 et la proposition 3.1 admettent des énoncés analogues sur une variété Riemannienne (resp Lorentzienne de signature (n-1,1)) compacte à bord munie d'un feuilletage tangent au bord.

5 Cas d'un feuilletage de codmension 2

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 2 sur une variété (M, g) Riemannienne (resp pseudo- Riemannienne de signature (n-2,2)) compacte sans bord ; soit L le sous fibré tangent à $\mathcal{F}$ et $Q = L^\perp$ le sous fibré de TM orthogonal à L. On suppose que L est de type espace lorsque la variété M est pseudo- Riemannienne. Soit $\pi : TM \to Q$ la projection de TM sur Q parallèlement à L. Si ∇^M désigne la connection de M induite de g, alors on note par ∇ la connection de Bott sur Q définie par

$$\nabla_X Z = \begin{cases} \pi([X, Z]) & \text{for } X \in \Gamma(L) \text{ et } Z \in \Gamma(Q), \\ \pi(\nabla_X Z) & \text{for } X \in \Gamma(Q) \end{cases}$$

Soit $\Omega^p(M, Q)$ l'anneau des p-formes différentielles sur M à valeurs dans Q. On définit l'opérateur de dérivée extérieure $d_\nabla : \Omega^1(M, Q) \longrightarrow \Omega^2(M, Q)$ par

$$d_\nabla\omega(X, Y) = \nabla\omega(X, Y) - \nabla\omega(Y, X),$$

où $\nabla\omega$ est la dérivée covariante de ω définie par

$$\nabla\omega(X, Y) = (\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla^M_X Y).$$

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ un repère orthonormé local de TM, l'opérateur adjoint d^*_∇ de d_∇ est défini par

$$d^*_\nabla\omega = -tr\nabla\omega = -\sum_{i=1}^{n}\nabla\omega(E_i,E_i).$$

Si de plus on choisit $E_i \in \Gamma(L)$ pour $i = 1,\dots,n-2$ et $E_j \in \Gamma(Q)$ pour $j = n-1, n$, on obtient

$$d^*_\nabla\pi = -tr\nabla\pi = -\sum_{i=1}^{n-2}\nabla\pi(E_i,E_i) = \tau,$$

où τ est le champ de vecteur tension du feuilletage $\mathcal{F}$. La forme de courbure moyenne du feuilletage $\mathcal{F}$ est la forme linéaire sur Q donnée par $\kappa = i_\tau g$. Le feuilletage est dit minimal (ou harmonique) si $\kappa = 0$, [5].

Dans la suite on suppose que le fibré Q est trivial. Soit (N_1, N_2) un repère orthonormè de Q et (ω_1, ω_2) son corepère dual. Alors on a

$$\pi = \omega_1 \otimes N_1 + \omega_2 \otimes N_2 \quad \text{et} \quad \tau = d^*_\nabla\pi = \kappa(N_1)N_1 + \kappa(N_2)N_2.$$

Proposition 5.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i)- Le fibré L est stable par l'endomorphisme A_{N_1}.

ii)- Le fibré L est stable par l'endomorphisme A_{N_2}.

iii)- La forme $d\omega_1$ vérifie l'égalité

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \nabla_{N_1}\omega_1 + \omega_2 \wedge \nabla_{N_2}\omega_1. \tag{5.1}$$

iv)- La forme $d\omega_2$ vérifie l'égalité

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \nabla_{N_1}\omega_2 + \omega_2 \wedge \nabla_{N_2}\omega_2. \tag{5.2}$$

Démonstration. i) est équivalente à (ii), car pour tout $X \in \Gamma(L)$ on a $g(A_{N_1}(X), N_2) = -g(N_1, A_{N_2}(X))$.

Montrons l'équivalence $i) \Longleftrightarrow iii)$.

L'égalité iii) est toujours vraie pour les couples $(N_1,N_2),(N_1,X),(X,Y)$ avec $X,Y \in \Gamma(L)$, et pour le couple (N_2, X) demeure vraie si et seulement si L est stable par A_{N_1}.

De la même manière on montre l'équivalence $ii) \Longleftrightarrow iv)$. □

Définition 5.2. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit $\mathcal{P}$-feuilletage s'il vérifie l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente.

$O°$. n rappelle que $\mathcal{F}$ est totalement géodésique si $A_{N_i}(L) \subset Q$ pour i=1,2. Il est clair que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{P}$-feuilletage totalement géodésique alors $A_{N_i}/_L \equiv 0$ pour i=1,2.

Par un calcul simple on peut montrer le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soit $(E_1,\dots,E_{n-2})$ un repère orthonormé local de L et soit B un endomorphisme de TM, alors on a*

$$\begin{aligned} trB^2 = &\sum_{i,j=1}^{n-2} g(B(E_i),E_j)g(E_i,B(E_j)) + 2\epsilon\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{2} g(B(E_i),N_j)g(E_i,B(N_j)) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2} g(B(N_i),N_j)g(N_i,(B(N_j)). \end{aligned}$$

Proposition 5.4. *Si $\mathcal{F}$ un $\mathcal{P}$-feuilletage, alors on a les relations suivantes*

a) Pour k=1,2 $trA^2_{N_k} \geq 0$. Si $trA^2_{N_k} = 0$, alors $A_{N_k}/L \equiv 0$ et $A_{N_k}(Q) \subset L$. En particulier $\mathcal{F}$ est totalement géodésique.

b) Si Q est intégrable et si $trA^2_{N_k} = 0$ pour $k = 1, 2$, alors $trA^2_{V_k} \geq 0$. Si de plus $trA^2_{V_k} = 0$, alors

$$trA^2_{\nabla_{N_2} N_1} \geq 0. \tag{5.3}$$

Démonstration. a) Comme L est intégrable et contenu dans $Ker\omega_1$, alors pour tout $X, Y \in \Gamma(L)$, on a

$$\begin{aligned} g(A_{N_1}(X), Y) - g(X, A_{N_1}(Y)) &= \nabla_X \omega(Y) - \nabla_Y \omega(X) = d\omega_1(X, Y) \\ &= -\omega_1[X, Y] = 0. \end{aligned}$$

D'autre part $g(A_{N_1}(X), N_1) = 0$ car $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{P}$-feuilletage. Enfin

$$g(N_1, A_{N_1}(N_2)) = g(A_{N_1}(N_1), N_1) = 0 \text{ car } N_1 \text{ est unitaire,}$$

par conséquent d'après le Lemme 5.3, on obtient

$$trA^2_{N_1} = \sum_{i,j=1}^{n-2} (g(A_{N_1}(E_i), E_j))^2 + (g(A_{N_1}(N_2), N_2))^2. \tag{5.4}$$

De la même manière, on montre que

$$trA^2_{N_2} = \sum_{i,j=1}^{n-2} (g(A_{N_2}(E_i), E_j))^2 + (g(A_{N_2}(N_1), N_1))^2. \tag{5.5}$$

Supposons maintenant que $trA^2_{N_k} = 0$ pour k=1,2. Les relations (5.4) et (5.5) entraînent que

$$g(A_{N_k}(E_i), E_j))^2 = 0 \text{ pour tous } i, j = 1, ..., n-2,$$

c'est à dire que $A_{N_k}(L) \subset Q$. Mais comme $A_{N_k}(L) \subset L$ car $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{P}$-feuilletage, alors $A_{N_k}/_L \equiv 0$.

D'autre part (5.4) entraîne que $(g(A_{N_1}(N_2), N_2)) = 0$, c'est à dire que $A_{N_1}(N_2) \in \Gamma(L)$, et (5.5) implique que

$$0 = g(A_{N_2}(N_1), N_1)) = -g(N_2, A_{N_1}(N_1)),$$

c'est à dire que $A_{N_1}(N_1) \in \Gamma(L)$. Donc

$$A_{N_1}(Q) \subset L. \tag{5.6}$$

De même on a $A_{N_2}(Q) \subset L$.

b) Maintenant si $trA^2_{N_k} = 0$ et Q est intégrable alors d'après (5.6) on aura $\nabla_{N_1}\omega_2 = \nabla_{N_2}\omega_1$, et comme $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{P}$-feuilletage nous obtenons

$$0 = \omega_2 \wedge d^2\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge d\nabla_{N_1}\omega_1,$$

Par conséquent

$$d(\nabla_{N_1}\omega_1) = \omega_1 \wedge \alpha_1 + \omega_2 \wedge \alpha_2$$

où α_1 et α_2 sont des 1-formes. Donc pour tout $X, Y \in \Gamma(L)$ on a

$$g(A_{V_1}(X), Y) - g(X, A_{V_1}(Y)) = d(\nabla_{N_1}\omega_1)(X, Y) = 0.$$

D'autre part, on a

$$g(A_{V_1}(X), N_k) = -g(V_1, A_{N_k}(X)) = 0, \text{ car } A_{N_k}/_L \equiv 0$$

et

$$g(A_{V_1}(N_1), N_2)g(N_1, A_{V_1}(N_2)) = g(V_1, \nabla_{N_1}N_2)^2 \text{ car } [N_1, N_2] = 0.$$

Enfin

$$g(A_{V_1}(N_1), N_1) = -g(V_1, V_1) = -\|V_1\|^2.$$

Il en résulte du lemme 5.3 que

$$trA^2_{V_1} = \sum_{j=1}^{n-2}(g(A_{V_1}(E_i), E_j))^2 + 2(g(V_1, \nabla_{N_1}N_2))^2 + g(V_1, V_2)^2 + \|V_1\|^4. \tag{5.7}$$

De la même manière on montre que

$$trA^2_{V_2} = \sum_{i,j=1}^{n-2}(g(A_{V_2}(E_i), E_j))^2 + 2(g(V_2, \nabla_{N_2}N_1))^2 + g(V_1, V_2)^2 + \|V_2\|^4. \tag{5.8}$$

Si de plus $trA^2_{V_k} = 0$, alors de (5.7) et (5.8) on obtient $V_k = 0$ et par conséquent les équations 5.1 et 5.2 de la proposition 5.1 deviennent

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \nabla_{N_2}\omega_1 \quad \text{et} \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \nabla_{N_1}\omega_2.$$

On en déduit que

$$0 = d^2\omega_1 = -\omega_2 \wedge d\nabla_{N_2}\omega_1$$

c'est à dire que $d\nabla_{N_2}\omega_1$ est divisible par ω_2. Il est facile de voir que l'on a

$$trA^2_{\nabla_{N_2}N_1} = \sum_{i,j=1}^{n-2}(g(A_{\nabla_{N_2}N_1}(E_i), E_j))^2 + \|\nabla_{N_2}N_1\|^4 \tag{5.9}$$

d'où le résultat. □

Soit Ω la forme volume canonique de M via g, $\chi_{\mathcal{F}} = i_{N_1}i_{N_2}\Omega$ la forme caractéristique de $\mathcal{F}$ et $\Theta = \omega_1 \wedge \omega_2$. Il est clair que $\Omega = \Theta \wedge \chi_{\mathcal{F}}$.

Proposition 5.5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal,

b) $d^\star\Theta/_Q = 0$,

c) $L_{N_i}(\chi_{\mathcal{F}})/_L = 0$, i=1,2.

Démonstration. Par un calcul simple on montre que

$$d^\star\Theta/_Q = \kappa(N_2)\omega_1 + \kappa(N_1)\omega_2 \quad \text{et} \quad L_{N_i}(\chi_\mathcal{F})/_L = \kappa(N_i)\chi_\mathcal{F}.$$

□

Proposition 5.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal et le fibré Q est intégrable,
b) $d^\star\Theta = 0$,
c) $d\chi_\mathcal{F} = 0$.

Maintenant on donne la preuve du théorème 1.5.

Démonstration. 1) Comme $\mathcal{F}$ est minimal, alors $(divN_1)^2 = (g(A_{N_1}(N_2), N_2))^2$ et d'après la relation (2.2) et la formule de Green on a

$$\int_M \big(Rici(N_1, N_1) + \sum_{i,j=1}^{n-2}(g(A_{N_1}(E_i), E_j))^2\big)\Omega = 0 \ \ \forall\, i, j = 1, \dots, n-2.$$

Donc $(g(A_{N_1}(E_i), E_j)) = 0 \ \forall\, i, j = 1, \dots, n-2$, c'est à dire que $A_{N_1}(L) \subset Q$. De la même manière on montre que $A_{N_2}(L) \subset Q$; ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est totalement géodésique.
2) Si Q est f-intégrable, alors N_1 et N_2 commutent et par conséquent

$$divN_1 = g(A_{N_1}(N_2), N_2) = g([N_2, N_1], N_2) = 0.$$

Ce qui entraîne que

$$trA^2_{N_i} = divV_i = 0.$$

D'où d'après (5.3) on a $trA^2_{Vi} \geq 0$ et puis par la formule de Green on obtient $trA^2_{Vi} = 0$. Par conséquent

$$V_i = 0 \text{ et } trA^2_{\nabla_{N_2}N_1} \geq 0. \tag{5.10}$$

D'un autre côté on a

$$trA^2_{N_1+N_2} = 2trA_{N_1} \circ A_{N_2} = 0 \text{ et } div(N_1 + N_2) = 0$$

par conséquent

$$0 = div\nabla_{N_1+N_2}(N_1 + N_2) = 2div\nabla_{N_2}N_1.$$

De (5.9), (5.10) et la formule de Green on déduit que $\nabla_{N_2}N_1 = 0$,
d'où le résultat. □

Démonstration. (du Théorème 1.6) On remarque d'abord que

$$trA^2_{N_1} = (g(\nabla_{N_2}N_1, N_2))^2 = (divN_1)^2 = 0$$

car $\mathcal{F}$ est totalement géodésique et N_1 et N_2 commutent et que

$$Ric(N_1, N_1) = trR_{N_1} \leq 0$$

car la courbure sectionnelle de M est non-positive. Donc d'après la relation (2.3) et la formule de Green on obtient

(5.11) $$Ric(N_1, N_1) = divV_1 = 0.$$

Ceci entraîne que

(5.12) $$R_{N_1}(X) \in \Gamma(Q) \text{ pour tout } X \in \Gamma(L)$$

et

(5.13) $$g(R_{N_1}(N_2), N_2) = 0.$$

D'un autre côté on a aussi

(5.14) $$\nabla_{N_j} N_i \text{ et } \nabla_X \nabla_{N_j} N_i \in \Gamma(L) \text{ pour } i, j = 1, 2 \text{ et } X \in \Gamma(L).$$

Soit $X \in \Gamma(L)$, alors on a

$$\begin{array}{rcl} R_{N_1}(X) & = & \nabla^2_{X,N_1} N_1 - \nabla^2_{N_1,X} N_1 \\ & = & \nabla_X V_1 - \epsilon g(X, V_1) V_1 - \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) \nabla_{N_2} N_1. \end{array}$$

De (5.12) et (5.14), on en déduit que

(5.15) $$R_{N_1}(X) = 0.$$

De la même manière on montre que

$$divV_2 = 0 \text{ et } \nabla_X V_2 = \epsilon g(X, V_2) V_2 + \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) \nabla_{N_2} N_1.$$

De la relation (5.13) on en déduit que

$$(g(V_1, V_2))^2 = \|\nabla_{N_2} N_1\|^2.$$

D'autre part, comme $A_{N_i}/L = 0$ (car $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{P}$-feuilletage totalement géodésique) alors

$$trA^2_{N_1+N_2} = 2trA_{N_1} \circ A_{N_2} = 0.$$

En vertu de la formule de Green on obtient

(5.16) $$Ric(N_1 + N_2, N_1 + N_2) = div\nabla_{N_2} N_1 = 0$$

(5.16) ce qui implique

$$R_{N_1+N_2}(X) \in \Gamma(Q) \text{ pour tout } X \in \Gamma(L).$$

Mais $R_{N_1}/L = R_{N_2}/L = 0$, alors comme dans (5.11) on déduit que pour $X \in \Gamma(L)$

$$\begin{array}{rcl} R_{N_1+N_2}(X) & = & R(X, N_1)N_2 + R(X, N_2)N_1 \\ & = & 2\nabla_X \nabla_{N_2} N_1 - \epsilon\big((g(X, V_1) + g(X, V_2)\big)\nabla_{N_2} N_1 \\ & - & \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) V_1 - \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) V_2) \\ & = & 0 \end{array}$$

ou encore

(5.17) $$\begin{array}{rcl} 2\nabla_X \nabla_{N_2} N_1 & = & \epsilon\big(g(X, V_1) + g(X, V_2)\big)\nabla_{N_2} N_1 \\ & + & \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) V_1 + \epsilon g(X, \nabla_{N_2} N_1) V_2. \end{array}$$

Posons $U = \nabla_{N_2} N_1$, alors d'après (5.15), (5.11) et(5.16) on a

$$\begin{aligned} div\nabla_{V_1} V_1 &= \epsilon div(\|V_1\|^2 V_1) + \epsilon div(g(V_1, U)U) \\ &= \epsilon \nabla_{V_1} \|V_1\|^2 + \epsilon \nabla_U g(V_1, U) \\ &= 2\|V_1\|^4 + 2g(V_1, U)^2 + \epsilon\big(g(\nabla_U V_1, U) + g(V_1, \nabla_U U)\big). \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$g(\nabla_U V_1, U) = \epsilon\big((g(U, V_1))^2 + \|U\|^4\big)$$

et d'autre part d'après (5.17), on a

$$2g(V_1, \nabla_U U) = \epsilon\big(g(U, V_1)^2 + \|U\|^2\|V_1\|^2 + \|U\|^4 + g(U, V_1)g(U, V_2)\big).$$

D'où on obtient

$$div\nabla_{V_1} V_1 = 2\|V_1\|^4 + \frac{7}{2}g(U, V_1)^2 + \frac{1}{2}\|U\|^2\|V_1\|^2 + \frac{3}{2}\|U\|^4 + \frac{1}{2}g(U, V_1)g(U, V_2).$$

De la même manière on obtient

$$div\nabla_{V_2} V_2 = 2\|V_2\|^4 + \frac{7}{2}g(U, V_2)^2 + \frac{1}{2}\|U\|^2\|V_2\|^2 + \frac{3}{2}\|U\|^4 + \frac{1}{2}g(U, V_1)g(U, V_2).$$

par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} div\nabla_{V_1} V_1 + div\nabla_{V_2} V_2 &= 2(\|V_1\|^4 + \|V_2\|^4) + 3\|U\|^4 + \frac{1}{2}\|U\|^2(|V_1\|^2 + |V_2\|^2) \\ &\quad + 3\big(g(U, V_1)^2 + g(U, V_2)^2\big) + \frac{1}{2}\big(g(U, V_1) + g(U, V_2)\big)^2. \end{aligned}$$

Le résultat découle de la formule de Green. □

6 Cas d'une variété complète non compacte

Revenons d'abord au cas où (M, g) est une variété Riemannienne compacte sans bord. Une conséquence du théorème de Bochner est la suivante :

Proposition 6.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord à courbure de Ricci non-négative. Si la classe d'Euler $\mathcal{E}(TM)$ du fibré tangent est non triviale (respect la courbure de Ricci de M est positive), alors le groupe de cohomologie $H^1(M, \mathbb{R})$ est nul.*

Démonstration. En effet, toute 1-forme sur M sera singulière. Donc d'après le théorème de Bochner le premier groupe de cohomologie de Hodge est trivial mais ce dernier est isomorphe à $H^1(M, \mathbb{R})$. □

Dans la suite, on suppose que (M, g) est une variété Riemannienne complète non compacte. On va utiliser les mêmes techniques que dans [11],(voir aussi [3]) pour démontrer les théorèmes 1.7 et 1.8.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées locales en un point x de M et $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1})$ le repère canonique local de TM en x. On pose $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

la matrice inverse de (g_{ij}). On munit $T_s^r(M)$ l'espace des tenseurs de type (r,s) du produit scalaire local (voir[6])

$$\langle K, L\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_r} g_{i_1k_1}, \dots g_{i_rk_r} g^{i_1j_1} \dots g^{i_sj_s} K^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} L^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_s}.$$

Le produit scalaire global sur $T_s^r(M)$ est défini par

$$\ll K, L \gg = \int_M \langle K, L\rangle \Omega.$$

Lemme 6.2. *L'application de $T_1^1(M)$ vers $T_2^0(M)$ qui a A de coordonnées (a_j^i) associe B de coordonnées ($b_{kj} = \sum_i g_{ki} a_j^i$) est une isométrie.*

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} \|B\|^2 &= \sum g^{ik} g^{jl} B_{ij} B_{kl} = \sum g^{ik} g^{jl} g_{i\alpha} a_j^\alpha g_{k\beta} a_l^\beta \\ &= \sum g_{i\beta} g^{jl} a_l^i a_j^\beta = \|A\|^2. \end{aligned}$$

□

D'un autre côté dans [9] (page 178), l'auteur introduit le produit scalaire ci-dessus sur l'espace $\Gamma(Hom(TM, T^*M)) = T_1^1(M)$ pour démontrer un résultat, (voir page 180), que l'on exploitera dans la suite.

On désigne par $\Omega^s(M) \subset T_2^0(M)$ (respect. $\Omega_c^s(M)$) l'espace des s-formes sur M (respect. à supports compacts). Soit $L_2^s(M)$ le complété de $\Omega_c^s(M)$ via le produit scalaire $\ll, \gg$. On dit qu'une s-forme est de norme globale finie si $\omega \in L_2^s(M) \cap \Omega^s(M)$.

Soit O in point fixe de M. Pour chaque point $P \in M$, on désigne par $\rho(P)$ la distance géodésique de O à P, et on désigne par B_k la boule ouverte (pour la distance ρ) de centre O et de rayon $k > 0$. On choisit une fonction μ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

i) $0 \le \mu \le 1$ sur $\mathbb{R}$,

ii) $\mu(t) = 1$ pour $t \le 1$,

iii) $\mu(t) = 0$ pour $t \ge 2$,

et on pose $\varphi_k(p) = \mu(\frac{\rho(p)}{k})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k est presque partout différentiable sur M et vérifie

$$0 \le \varphi_k(p) \le 1 \qquad \forall p \in M,$$

$$\text{supp } \varphi_k \subset B_{2k} \text{ et } \varphi_k = 1 \text{ sur } B_k,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k = 1 \text{ et } \|d\varphi_k\| \le \frac{c}{k} \quad \text{sur } M,$$

où c est une constante positive donnée.

Lemme 6.3. *[1] Il existe un nombre $\lambda > 0$ dépendant uniquement de μ tel que*

$$\|d\varphi_k \otimes \omega\| \le \frac{\lambda}{k^2} \|\omega\|_{B_{2k}} \qquad \textit{pour tout } \omega \in \Omega^s(M).$$

On notera que si $\omega \in L_2^s(M) \cap \Omega^s(M)$, alors $\varphi_k\omega \in \Omega_c^s(M)$ et $\|\varphi_k\omega - \omega\| \to 0$ $(k \to +\infty)$.

Soit $\omega \in \Omega^1(M)$, pour $X, Y \in \Gamma(TM)$ on pose

$$\nabla^2_{X,Y}\omega = \nabla_X\nabla_Y\omega - \nabla_{\nabla_X Y}\omega \quad \text{et} \quad tr\nabla^2 = \sum_{ij} g^{ij}\nabla^2_{i,j},$$

où

$$\nabla^2_{i,j} = \nabla^2_{\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}}.$$

Avant d'énoncer le théorème principal de cette partie, nous rappelons les deux résultats suivants :

1) Si ω est une 1-forme harmonique sur M, alors d'après la formule de Bochner et Weitzenbock on a

$$Ric(\omega) = tr\nabla^2\omega. \tag{6.1}$$

2) Toute variété Riemannienne complète non compacte à courbure de Ricci non-négative est de volume infini [2].

Soit ∇^* l'adjoint de ∇ via le produit scalaire $\ll, \gg$. En prenant $s_1 = \omega$ et $s_2 = \varphi_k^2\omega$ dans [9],page 180, on obtient

$$\begin{aligned} \ll tr\nabla^2\omega, \varphi_k^2\omega \gg &= -\ll \nabla^*\nabla\omega, \varphi_k^2\omega \gg \\ &= -\ll \nabla\omega, \nabla(\varphi_k^2\omega) \gg \\ &= -\|\varphi_k\nabla\omega\|^2 - 2 \ll d\varphi_k \otimes \omega, \varphi_k\nabla\omega \gg . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Théorème 6.4. *Soit ω une 1-forme harmonique de norme globale finie sur une variété Riemannienne complète non compacte M à courbure de Ricci non-négative. Alors la forme ω est nulle. En particulier le premier groupe de cohomologie de De Rham à support compact $H_c^1(M, \mathbb{R})$ est trivial.*

Démonstration. D'après (6.1) et (6.2) on a,

$$\ll Ric(\omega), \varphi_k^2\omega \gg = -\|\varphi_k\nabla\omega\|^2 - 2 \ll d\varphi_k \otimes \omega, \varphi_k\nabla\omega \gg . \tag{6.3}$$

D'autre part, on a l'inégalité de Schwartz

$$\begin{aligned} \ll d\varphi_k \otimes \omega, \varphi_k\nabla\omega \gg &\geq -\|d\varphi_k \otimes \omega\|_{B_{2k}}\|\varphi_k\nabla\omega\|_{B_{2k}} \\ &\geq -\frac{1}{4}\big(\|\varphi_k\nabla\omega\|^2_{B_{2k}} + 4\|d\varphi_k \otimes \omega\|^2_{B_{2k}}\big). \end{aligned} \tag{6.4}$$

D'où d'après (6.3), (6.4) et le lemme 6.3 on obtient

$$\ll Ric(\omega), \varphi_k^2\omega \gg \leq -\frac{1}{2}\|\varphi_k\nabla\omega\|^2 + \frac{2A^2}{k^4}\|\omega\|^2_{B_{2k}} \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Mais comme la courbure de Ricci de M est non-négative alors

$$0 \leq \limsup_{k\to+\infty} \ll \varphi_k Ric(\omega), \varphi_k(\omega) \gg \leq -\frac{1}{2}\|\nabla\omega\|^2,$$

on en déduit que $\nabla\omega = 0$. Donc la norme locale de ω est une constante qui doit être nulle car le volume de M est infini. $\square$

Maintenant Le théorème 1.7 découle directement du théorème 6.4 ci-dessus. On termine ce papier par Le résultat suivant qui généralise la proposition 3.1.

Théorème 6.5. *Soit (M, g) une variété Riemannienne complète non compacte et ω une 1-forme fermée de norme globale finie. Si sa dérivée covariante $\nabla\omega$ est parallèle, alors ω est nulle.*

Démonstration. Soit X le champ dual de ω via g. Comme l'endomorphisme A_X est parallèle et symétrique via g, alors on a

$$\begin{aligned} \text{div } \varphi_k^2 A_X(X) &= d\varphi_k^2\big(A_X(X)\big) + \varphi_k^2 \text{ div } A_X(X) \\ &= d\varphi_k^2\big(A_X(X)\big) + \varphi_k^2 tr(A_X^2) \\ &= d\varphi_k^2\big(A_X(X)\big) + \|\varphi_k A_X\|^2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Si $X = \sum_l X^l \frac{\partial}{\partial x_l}$, alors $\omega = \sum_j (\sum_l g_{jl} X^l) dx_j$; posons $A_X = (a_l^i)$, on a

$$\begin{aligned} d\varphi_k^2\big(A_X(X)\big) &= \sum_{i=1}^n (d\varphi_k^2)_i \big(A_X(X)\big)^i \\ &= \sum_{i,l} a_l^i X^l (d\varphi_k^2)_i \\ &= \ll B, d\varphi_k^2 \otimes \omega \gg, \end{aligned} \tag{6.6}$$

où B est le tenseur de type $(0, 2)$ de coordonnées $B_{pl} = \sum_i g_{pl} a_l^i$.

D'autre part comme le support de $\varphi_k^2 A_X(X)$ est contenu dans B_{2k}, on a

$$\int_M div(\varphi_k^2 A_X(X))\Omega = 0.$$

Donc d'après (6.5) et (6.6), on obtient

$$\|\varphi_k A_X\|_{B_{2k}}^2 = - \ll B, d\varphi_k^2 \otimes \omega \gg . \tag{6.7}$$

D'après l'inégalité de Schwartz et le lemme 6.3, on a

$$\begin{aligned} | \ll B, 2\varphi_k d\varphi_k \otimes \omega \gg | &\leq \|\varphi_k B\|_{B_{2k}} \|2d\varphi_k \otimes \omega\|_{B_{2k}} \\ &\leq \frac{1}{2}\big(|\varphi_k B\|_{B_{2k}}^2 + 4\|d\varphi_k \otimes \omega\|_{B_{2k}}^2\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(|\varphi_k B\|_{B_{2k}}^2 + \frac{2\lambda}{k^2}\|\omega\|_{B_{2k}}^2\big). \end{aligned}$$

Mais $\|B\|_{B_{2k}} = \|A_X\|_{B_{2k}}$, par conséquent (6.7) induit

$$\|\varphi_k A_X\|_{B_{2k}}^2 \leq \frac{1}{2}\big(\|\varphi_k A_X\|_{B_{2k}}^2 + \frac{2\lambda}{k^2}\|\omega\|_{B_{2k}}^2\big),$$

c'est à dire que

$$\|\varphi_k A_X\|^2_{B_{2k}} \leq \frac{4\lambda}{k^2}\|\omega\|^2_{B_{2k}}.$$

En faisant tendre $k \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \|\varphi_k A_X\|^2_{B_{2k}} \leq 0,$$

car la norme globale de la forme ω est finie. Par conséquent $A_X = 0$, c'est à dire que la forme ω est parallèle. □

Maintenant le théorème 1.8 découle du théorème 6.5.

Références

[1] A. Andreotti and E. Vesentini, *Carlman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 25 (1965), 313-362.

[2] E. Calabi, *On manifolds with non negative Ricci curvature II,* Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975) A205.

[3] G. De Rham, *Variétés differtentiables,* Hermann, Paris 1960.

[4] E.Ghys, *Classification des feuilletages totalement géodèsiques de codimension un,* Comment. Math. Helv. 58 (1983), 543-572.

[5] F. Kamber, Ph. Tondeur , *Harmonic Foliations,* Lectures notes in Mathematics 949, Springer-Verlag (1982), 87-121.

[6] F. Kobayashi-K. Nomizu , *Fondations of differential geometry,* Vol I Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 15, Interscience publishers New-York 1963.

[7] S Lang, *Fundamentals of differentials geometry*, Graduate texts in Mathematics 191, Springer-Verlag, 1999.

[8] G.I. Oschikiri, *A Remark on minimal Foliations*, Tohoku Math J. 33 (1981), 133-137.

[9] P. Peterson, *Riemannian Geometry,* Graduate texts in Mathematics 171, Springer-Verlag, 1998.

[10] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds,* Universitex, Springer-Verlag, 1988.

[11] S. Yorozu, *Killing vector fields on complete Riemannian manifolds,* Procceding of the American Mathemaical Society 84, 1 (1982), 115-120.

Author's address:

Mohamed A. Chaouch
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bizerte,
Zarzouna 7021 Bizerte, Tunisie.
e-mail : MohamedAli.Chaouch@fst.rnu.tn