Sur les Connexions Finsler-Projectives (III)

Gheorghe Murărescu et Petre Stavre

Abstract

In the present we continue the study of Finsler-projective connections [3], [5], [6], [8], [9]. After definitions, we analyse some problems of metric structure.

Mathematics Subject Classification: 53C60
Key words: Finsler metric, Weyl Finsler connections

Le premiere auteur a introduit une nouvelle voie d'aborder la géomètrie différentielle Finsler-projective (differente de celle utilise par Okada [7]) en utilisant la theorie des fibrés vectoriaux $\xi = (E, \pi, M)$ a fibre type R (d'après le livre R.Miron et M.Anastasiei [2]). Tous les deux, nous avons obtenu des resultats analogues à ceux de la géometrie differentielle classique (ou le second auteur a obtenu quelques résultats publiés dans [3] et dans sa thèse (1969)). Ces resultats, nous les avons publie dans [4], [5], [6], [8], [9]. Dans ces travaux nous abordons les problemes de courbure, d'holonomie, géodésiques, etc.

D'abord, nous rappellons quelques notions et formules. Soit sur ξ une connexion nonlinéaire N et une d-connexion D. La base adaptée à N est $\{X_\alpha\} = \left\{\delta/\delta x^i, \partial/\partial y\right\}$, $(i,j = 1,...,n;\ \alpha,\beta = 1,...,n,0;\ x^0 = y)$ et la base naturelle est $\{u_\alpha\} = \left\{\partial/\partial x^i, \partial/\partial y\right\}$; nous notons par $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x,y)$ les coefficients locaux dans la base adaptee et par $\gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x,y)$, les coefficients locaux dans la base naturelle pour la connexion D.

Definition 1 [9]. La connexion D s'appellle *quasi-projective normale*, si les coefficients Γ satisfont les relations $\Gamma^0_{0\alpha} = w\Gamma^i_{i\alpha}$ ou $w = -\dfrac{1}{n+1}$ (nous notons D par (c.q-p-n)).

Nous definissons [8] les coefficients projectifs J de type Weyl:

$$\begin{aligned}
&J^i_{ik} = \Gamma^i_{jk} + \left(\delta^i_j \partial N_k/\partial y + \delta^i_k \partial N_j/\partial y\right),\\
&J^i_{jkh} = \delta J^i_{jh}/\delta x^k - \delta J^i_{jk}/\delta x^h + J^r_{jh}J^i_{rk} - J^r_{jk}J^i_{rh},\\
&J_{jk} = J^i_{jki}.
\end{aligned}$$

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.2, No.2, 1997, pp. 99-103

Definition 2 [8]. La connexion linaire $\overset{*}{D}$, attachée a N et D, aux coefficients
$\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{0k} = y^{-1}\delta^{i}_{k}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{00} = 0$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} \cdot N_i + y/\left(n-1\right) \cdot J_{jk} - \delta N_j/\delta x^k$,

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{0k} = 0,\ \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{00} = 0,$$

s'appele la *conexion Finsler-projective normale;* dans la base naturelle, les coefficients $\overset{*}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}(x,y)$ de la connexion $\overset{*}{D}$ sont definis par

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\gamma}{}^{i}_{jk} = J^{i}_{jk},\ \overset{*}{\gamma}{}^{i}_{00} = 0,\ \overset{*}{\gamma}{}^{i}_{0k} = \Gamma^{i}_{k0} = \overset{*}{\gamma}{}^{0}_{0k} = 0, \\ &\overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk} = y/\left(n-1\right) \cdot J_{jk}\ ,\ \overset{*}{\gamma}{}^{0}_{00} = 0. \end{aligned}$$

Nous notons D par (cF-p-n).

Entre deux connexions D et $\overline{D}$, q-p-n symétriques, nous définissons [8] la transformation $\tau : D \to \overline{D}$ donnée par $\overline{D}_x y = D_x y + \sigma\left(x\right) hy + \sigma\left(y\right) hx$, òu h est le projecteur horizontal et σ est un $d-$champ de type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par ces transformations, les coefficients J sont invariants.

De même que dans le cas classique [10], nous pouvons définir la connexion $\overset{*}{D}$ comme une classe des connexions (q-p-n) symétriques liées par les transformations τ.

En partant de l'étude du groupe d'holonomie [5], [6], le second auteur a démontré que, dans les conditions specielles, le tenseur $J'\left(J_{jk}\right)$ définit une metrique sur E , nondégénérée et indéfinie, donc a la proprieté

$$J_{ij|k} = 0. \tag{1}$$

Dans cette note nous trouvons la forme de la métrique $J'\left(J_{jk}\right)$; de plus nous montrons que les coefficients $\overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk}$ définissent aussi une métrique decomposable.

Dans $E \setminus \{0\}$ nous démontrons que

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial y} = 0, \quad \text{donc:} \quad J_{ij}\left(x,y\right) = J_{ij}\left(x,1\right)$$

sur le rayon $y > 0$; de plus, nous avons

$$\overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk} = \frac{y}{n-1} J_{jk}$$

et

$$\overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk|i} = 0,\ \overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk|0} = -y^{-1}\ \overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk}. \tag{2}$$

D'après les relations (2), il résulte

$$\overset{*}{\gamma}{}^{0}_{jk}\left(x,y\right) = y \cdot e^{\varphi_{jk}(x)}\ , \tag{3}$$

$$J_{jk}\left(x\right) = \left(n-1\right) e^{\varphi_{jk}(x)}, \tag{4}$$

ou $\varphi_{jk}(x) = \varphi_{kj}(x) \in \mathbf{C}^{\infty}$.

Les coefficients symétriques $\overset{*}{\gamma}{}^0$ $\left(\overset{*}{\gamma}{}^0_{jk}\right)$ de la connexion $\overset{*}{D}$ $(F-p-n)$ ont le caractère de d-champ tensoriel, donc nous puvons considerer $\overset{*}{\gamma}{}^0$ comme une nouvelle métrique sur $E\setminus\{0\}$ à la propriété (2), donc decomposable.

Ainsi nous enonçons

Proposition 1. *Les coefficients* $\overset{*}{\gamma}{}^0$, *de la connexion* $(F-p-n)$ $\overset{*}{D}$, *définit sur* $E\setminus\{0\}$ *une métrique decomposable.*

Observation 1 En notant

$$h_{jk} = \frac{1}{n-1}e^{\phi_{jk}(x)},$$

il resulte que $\overset{*}{\gamma}{}^0_{jk} = e^{\ln y}\cdot h_{jk}$.

Ce fait nous conduit à une étude conforme.

Observation 2 Nous pouvons considérer l'espace Lagrange généralisée de la forme: $(M, g_{ij}(x,y))$ ou $g_{jk} = \overset{*}{\gamma}{}^0_{jk} = e^{\ln y}\cdot h_{jk}$ que se peut étudier d'aprés la mèthode de R.Miron [2].

Ayant $(M;\ g_{jk})$, nous pouvons considérer sur E la métrique

(5) $$G(x,y) = g_{ij}(x,y)\,dx^i \otimes dx^j + g_{00}(x,y)\,\delta y \otimes \delta y,$$

ou $\delta y = dy + N_k dx^k$ avec $g_{00}(x,y)$ arbitraire, nondégénérée de type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'ici, nous pouvons enonçer:

Proposition 2. *Le tenseur*

(6) $$\overset{*}{G} = h_{ij}(x)\,dx^i \otimes dx^j + \overset{*}{g}_{00}(x,y)\,\delta y \otimes \delta y$$

est une métrique h-riemanniene.

Observation 3 La fonction $\overset{*}{g}_{00}$ *peut être* convenablement, choisant:

a) $\overset{*}{g}_{00}(x,y) = h_{00}(x)$, il resulte que $\overset{*}{G}$ est $h-$ riemanniene et $v-$riemanniene;

b) si dans la relation (5), $\overset{*}{g}_{00}$ dépend seulement de y, par exemple, $\overset{*}{g}_{00}(x,y) = y$ dans $E\setminus\{0\}$, nous avons une métrique G, $v-$locale-riemanniene;

c) la métrique G ne peut pas être $h-$ locale-minkowskienne.

Nous pouvons appliquer pour les cas a), b), c) la théorie de R.Miron [2] qui conduite evidement aux applications interesantes dans la physique theoretique.

Un calcul inspiré par le livre [2], permet de démontrer la

Proposition 3. *La connexion nonlinéaire* N, *donnée initialement, coincide á la connexion nonlinéaire déterminée par la métrique* G.

Cette note représente le commencement de l'etude metrique-Finsler- projective.

Acknowledgements. A version of this paper was presented at the First Conference of Balkan Society of Geometers, Politehnica University of Bucharest, September 23-27, 1996.

Bibliographie

1 E. Cartan, *Lecon sur la theorie des espaces a connexion projective*, Paris (1937).

2 R.Miron, M.Anastasiei, *Fibrate vectoriale, spaţii Lagrange, aplicaţii în teoria relativităţii*, Ed. Acad. R.S.R. Bucuresti (1987); *Vector Bundles and Lagrange Spaces with Applications to Relativity*, Balkan Society of Geometers, Monographs and Textbooks, No 1, Geometry Balkan Press, Bucharest, Romania, 1997.

3 Gh. Murărescu, *Sur la theorie globale des connexions projectives,* C.R. Acad.Sci.Paris,T.269, p. 141-143 (1969).

4 Gh. Murărescu, *Sur les connexions Finsler-projectives; le groupe d'holonomie*, .An.St.Univ.Timişoara. Fasc. 1 (1995) T.33.

5 Gh. Murărescu, P. Stavre. *Sur le groupe d'holonomie des connexions Finsler-projectives*, The 25^{th} Nat. Conf. of Geom. an Topology, Iaşi, sept. 1995(sous-presse).

6 Gh. Murărescu, P. Stavre, *Sur les connexions Finsler-projectives (II)*, 4^{th} Intern Congres of Geometry, Thessaloniki, May 26-June 1, 1996 (sous-presse).

7 T. Okada-*Pair connexions on line bundle and projective connexions*, Symp. on Finsler-Geometry at Kinosaki, Nov.(1984).

8 P. Stavre, Gh. Murărescu, *Sur les connexions Finsler-projectives normales*, Bull. Math. la Soc. Math. de Roumanie, T37 (85), nr. 1-2 (1993), p.133-146.

9 P. Stavre, Gh. Murărescu, *Sur les connexions Finsler-projectives (I)*, The 19^{th} Nat.Conf.of Geom. and Topology, Timişoara, 1989.

10 T.Y. Thomas, *On the projective geometry of path*, Proc. Nat. Acad. 11, 1925, p.199-203.

11 C. Udrişte, I.E.Hirică, *Family of projective projections on tensors and connections*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2, 2 (1997), 139-156.

12 H. Wakakuwa, *Holonomy groups*. Publ.St. Groups of Geometry. V.6., 1971.

Faculté de Mathématique-Informatique
Department of Mathematics, University of Craiova
11, Al.I.Cuza., St., Craiova, 1100, Romania