Etude Asymptotique de la Densité Associée à un Filtre d'Ordre Infini

Denis Bosq*

Résumé

Etant donné un filtre de la forme

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

on étudie le comportement asymptotique de la densité du vecteur $(Y_t, X_t, \ldots, X_{t-k})$ lorsque k tend vers l'infini.
Ce problème est lié à l'estimation des a_j par une méthode de maximum de vraisemblance empirique.

Abstract

We consider the filter

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

and we study the asymptotic behaviour of the density of $(Y_t, X_t, \ldots, X_{t-k})$ when k tends to infinity.
This problem is connected with the estimation of the a_j's by an empirical maximum likelihood method.

*LSTA, Université Paris VI

Received by the editors April 1993 - Revised July 1993
Communicated by M. Hallin
AMS Mathematics Subject Classification : Primary 62M20, Secondary 62G05
Keywords : linear filter, density estimation, empirical maximum likelihood, Kullback information.

1 Introduction

Soit (X_t, Y_t, ϵ_t), $t \in \mathbb{Z}$ un processus à trois dimensions tel que

$$(1) \qquad Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Nous supposons que (X_t) et (ϵ_t) sont formés de variables i.i.d. et que ϵ_t est indépendant de $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Les a_j sont des réels vérifiant $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < +\infty$ et si $EX_0^2 < +\infty$ la série $\sum a_j X_{t-j}$ converge presque sûrement et en moyenne quadratique (cf. [6] p. 51).

Pour estimer les a_j on peut utiliser une méthode définie et étudiée dans [1] et [2]. Elle consiste à maximiser un estimateur de la densité f_k de $Z_{t,k} = (Y_t, X_t, \ldots, X_{t-k})$. Pour étudier le comportement asymptotique de cet estimateur on fait tendre k vers l'infini avec la dimension du vecteur observé. Aussi ce travail est-il consacré à l'étude du comportement asymptotique de f_k lorsque k tend vers l'infini.

Il est clair, qu'en général, on n'aura pas $f_k \to f$ où f est une densité sur R^∞ car la loi de $(Y_t, X_t, X_{t-1}, \ldots)$ est étrangère à λ^∞ (λ désignant la mesure de Lebesgue sur R).

Ainsi pour des lois concentrées sur $[0, 1]$ la loi de $(X_t, X_{t-1}, \ldots)$ et la restriction de λ^∞ à $[0, 1]^\infty$ sont étrangères (cf. [5] p. 42), donc la loi de $(Y_t, X_t, X_{t-1}, \ldots)$ et la restriction de $\lambda \times \lambda^\infty$ à $[0, 1] \times [0, 1]^\infty$ le sont également.

2 Le cas Gaussien

Nous commençons par envisager le cas où $X_t \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$ et $\epsilon_t \sim N(0, \eta^2)$ $\eta > 0$. La loi de $Z_{t,k}$ est alors gaussienne de densité

$$f_k(y; x_0, \ldots, x_k) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{k+1}} \exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\frac{x_j^2}{\sigma^2}\Big] \times$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}\sqrt{2\pi}} \exp\Bigg[-\frac{1}{2}\frac{\Big(y - \sum_{j=0}^{k} a_j x_j)^2\Big)}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}\Bigg]$$

pourvu que η soit non nul ou qu'il existe une infinité de a_j non nuls ce que nous supposerons toujours dans la suite.

Théorème 1.

1) Pour $\eta > 0$ et k tendant vers l'infini

$$E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \\ \mathrm{Log}\,\dfrac{1}{n\sqrt{2\pi e}} & \text{si } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \\ -\infty & \text{si } \sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{cases}$$

et dans tous les cas $\frac{1}{k}E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

2) Pour $\eta = 0$ et k tendant vers l'infini

a) $E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to +\infty$ *si* $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

b) Pour $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ *le comportement de* $E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k})$ *dépend de celui de* $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2$ *ainsi:*

- *Pour* $a_j = \alpha j^{-\beta}$, $\beta > 1$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to -\infty$.
- *Pour* $a_j = \alpha \rho^j$, $0 < |\rho| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma < \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \\ \mathrm{Log}\,\frac{|\rho|(1-\rho^2)^{1/2}}{|\alpha|} & \text{si } \sigma = \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \\ -\infty & \text{si } \sigma > \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \end{cases}$$

- *Pour* $a_j = \alpha \rho^{\rho'^j}$, $\alpha \in R^*$, $0 < |\rho| < 1$, $\rho' > 1$, $E\ \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to +\infty$.

Démonstration: D'après (2) nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = \quad & -(k+1)\,\mathrm{Log}\,\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=0}^{k} X_{t-j}^2 \\ & -\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\eta^2 + \sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) - \mathrm{Log}\,\sqrt{2\pi} \\ & -\frac{1}{2}\frac{(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j})^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} \end{aligned}$$

d'où

$$E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = (k+1)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\eta^2 + \sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

donc pour $\eta > 0$ et $\sigma \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, $E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k})$ se comporte comme$(k+1)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ et, pour $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, comme $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\eta^2+\sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) + \mathrm{Log}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. 1) et 2)a) s'en déduisent.

Maintenant, pour $\eta = 0$ nous avons

$$E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = (k+2)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sqrt{\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}}$$

or, pour $a_j = \alpha j^{-\beta}$ il vient $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \sim \dfrac{\alpha^2}{1-2\beta}\dfrac{1}{k^{1-2\beta}}$

donc $E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \to -\infty$ si $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

Pour $a_j = \alpha\rho^j$ on a $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 = \dfrac{|\alpha|^2|\rho|^{2k+2}}{1-|\rho|^2}$ d'où

$$E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = (k+2)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma|\rho|\sqrt{2\pi e}} + \mathrm{Log}\,\frac{|\rho|(1-\rho^2)^{1/2}}{|\alpha|}$$

d'où les résultats annoncés.

Enfin pour $a_j = \alpha\rho^{\rho'^j}$ on a $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \leq A(\rho^2)^{\rho'^{k+1}}$ où A est une constante positive, d'où

$$E\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \geq (k+2)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} + \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sqrt{A}}\rho'^{k+1}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{|\rho|}$$

et le minorant tend vers $+\infty$. □

Théorème 2. *Pour $\eta > 0$ et k tendant vers l'infini*

$$\frac{1}{k+1}\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \overset{\text{p.co.}}{\longrightarrow} \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \tag{3}$$

et

$$S_k = \sqrt{\frac{2}{k+1}}[(\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) + (k+1)\,\mathrm{Log}\,\sigma\sqrt{2\pi e}] \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1). \tag{4}$$

Démonstration: Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = \quad & -\mathrm{Log}\,\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2(k+1)}\sum_{j=0}^{k} X_{t-j}^2 \\ & -\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}(\eta^2+\sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) - \frac{1}{k+1}\,\mathrm{Log}\,\sqrt{2\pi} \\ & -\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}\frac{(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j})^2}{\eta^2+\sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}.\end{aligned}$$

Comme $EX_0^8 < \infty$ on peut affirmer que

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} X_{t-j}^2 \overset{\text{p.co.}}{\longrightarrow} \sigma^2.$$

D'autre part, comme $\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}$ est Gaussienne l'inégalité de TCHEBYCHEV s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \qquad P\left[\frac{1}{k+1}\frac{\left(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}\right)^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} > \epsilon\right] \leq \frac{2}{(k+1)^2\epsilon^2}$$

(3) se déduit de ce qui précède.

D'autre part, d'après le théorème central limite

$$\sqrt{\frac{2}{k+1}}\Big(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{X_{t-j}}{2\sigma^2} - \frac{k+1}{2}\Big) \overset{\mathcal{L}}{\to} N(0,1)$$

mais

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}\frac{\left(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}\right)^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} \overset{p}{\to} 0$$

or

$$S_k = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\Big(\frac{k+1}{2} - \sum_{j=0}^{k+1}\frac{X_{t-j}^2}{2\sigma^2}\Big) - T_k - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big(\eta^2 + \sigma^2\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2\Big) - \sqrt{\frac{2}{k+1}}\,\mathrm{Log}\,\sqrt{2\pi}$$

d'où (4). $\square$

Pour $\eta > 0$ et $\sigma\sqrt{2\pi e} = 1$ ainsi que pour $\eta = 0$, $a_j = \alpha\rho^j$ et $\sigma\sqrt{2\pi e} = \rho$ la loi du logarithme itéré permet de préciser le comportement asymptotique de Log $f_k(Z_{t,k})$. Nous renvoyons aux paragraphes suivants pour les détails.

3 Le cas général

On suppose maintenant que X_t et ϵ_t sont dans $L^2(P)$, centrées, de variance respectives σ^2 et η^2, de densités respectives g et φ non nécessairement Gaussiennes. Nous désignons par φ_k la densité de $\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t$ et par η_k^2 sa variance. Alors, si f_k désigne la densité de $Z_{t,k}$, nous avons

(5) $$f_k(x_t, \ldots, x_{t-k}; y) = g(x_t)\ldots g(x_{t-k})\varphi_k(y - \sum_{0}^{k} a_j x_{t-j})$$

$$(x_t, \ldots, x_{t-k}; y) \in R^{k+2}.$$

(5) montre que le comportement asymptotique de Log $f_k(Z_{t,k})$ dépend de celui de φ_k. Le théorème suivant lui est consacré:

Théorème 3.

1. *Si φ est continue et tend vers 0 à l'infini*

$$\sup |\varphi_k - \varphi| \to 0 \text{ et } \int |\varphi_k - \varphi| \to 0.$$

2. *Si, de plus, $\varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k$ $(k \geq 1)$ et $\varphi \,\mathrm{Log}\, \varphi$ sont Lebesgue intégrables on a*

$$\mathrm{Log}\, \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi e}} \leq \underline{\lim} \int \varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k \leq \overline{\lim} \int \varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k \leq \int \varphi \,\mathrm{Log}\, \varphi.$$

3. *Si, de plus, il existe a et b strictement positifs tels que*

$$\varphi(x) \geq a e^{-b|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et si $\varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi$ est Lebesgue intégrable pour k assez grand, alors

$$\int \varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k \to \int \varphi \,\mathrm{Log}\, \varphi.$$

4. *Si φ_k et φ sont Gaussiennes on a*

$$\sup|\varphi_k - \varphi| \to 0, \int |\varphi_k - \varphi| \to 0, \int \varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k \to \int \varphi \,\mathrm{Log}\, \varphi.$$

Démonstration:

1. Un théorème de convergence affirme que si (μ_k) est une suite de probabilités sur R qui converge faiblement vers μ, alors pour toute fonction h Lebesgue intégrable, continue et tendant vers 0 à l'infini on a

$$\sup_{x_0 \in R} |\int h(x_0 - x) d\mu_k(x) - \int h(x_0 - x) d\mu(x)| \to 0$$

et

$$\int |\int h(x_0 - x) d\mu_k(x) - \int h(x_0 - x) d\mu(x)| dx_0 \to 0$$

([3] p. 106).

Ce résultat s'applique ici pour $\mu_k = \mathcal{L}\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big)$, $\mu = \delta(0)$ et $h = \varphi$.

2. Une propriété bien connue de l'entropie ([4] p. 243) permet d'écrire

$$\mathrm{Log}\, \frac{1}{\eta_k \sqrt{2\pi e}} \leq \int \varphi_k \,\mathrm{Log}\, \varphi_k, \quad k \geq 1$$

la première inégalité s'en déduit par passage à la limite inférieure.
Pour établir la dernière on commence par remarquer que l'on peut supposer que

$$\max(\sup_{x,k} \varphi_k(x), \sup_x \varphi(x)) < 1. \tag{6}$$

En effet, si $\sup_x \varphi(x) < 1$, comme $\sup |\varphi_k - \varphi| \to 0$ on a $\sup_x \varphi_k(x) \leq \frac{1+\sup\varphi}{2} < 1$ pour k assez grand ce qui suffit car la propriété cherchée est asymptotique. Si $\sup \varphi \geq 1$ on se donne $c > \sup \varphi$ et on remarque que

$$c\Delta_{k,t} = c\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + c\epsilon_t \xrightarrow{\mathcal{L}} c\epsilon_t$$

or $c\epsilon_t$ a pour densité $\psi = \frac{1}{c}\varphi\left(\frac{\cdot}{c}\right)$ avec sup $\psi < 1$ et $c\Delta_{k,t}$ a pour densité $\psi_k = \frac{1}{c}\varphi_k\left(\frac{\cdot}{c}\right)$. Alors

$$\int \psi_k \operatorname{Log} \psi_k = \operatorname{Log} \frac{1}{c} + \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi_k$$

de même

$$\int \psi \operatorname{Log} \psi = \operatorname{Log} \frac{1}{c} + \int \varphi \operatorname{Log} \varphi$$

donc il suffit d'établir l'inégalité

$$\overline{\lim} \int \psi_k \operatorname{Log} \psi_k \leq \int \psi \operatorname{Log} \psi.$$

Nous supposerons donc que l'on a (6) ce qui permet d'appliquer le lemme de FATOU à la suite positive $\left(\varphi_k \operatorname{Log} \frac{1}{\varphi_k}\right)$:

$$\int \underline{\lim}\, \varphi_k \operatorname{Log} \frac{1}{\varphi_k} \leq \underline{\lim} \int \varphi_k \operatorname{Log} \frac{1}{\varphi_k}$$

soit

$$-\int \varphi \operatorname{Log} \varphi \leq \overline{\lim} \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi_k.$$

3. Pour établir la troisième partie nous supposerons que sup $\varphi < 1$. D'après ce qui précède il suffit de montrer que

$$\underline{\lim} \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi_k \geq \int \varphi \operatorname{Log} \varphi$$

or

$$\int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi_k - \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi = \int \varphi_k \operatorname{Log} \frac{\varphi_k}{\varphi} \tag{7}$$
$$= \int \Big(\frac{\varphi_k}{\varphi} \operatorname{Log} \frac{\varphi_k}{\varphi} + 1 - \frac{\varphi_k}{\varphi}\Big)\varphi \geq 0$$

car $x \operatorname{Log} x + 1 - x \geq 0$ pour $x > 0$.
D'après (7) (qui est une propriété classique de l'information de KULLBACK) il suffit d'établir

$$\underline{\lim} \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi \geq \varphi \operatorname{Log} \varphi$$

mais

$$|\int (\varphi_k - \varphi) \operatorname{Log} \varphi| \leq \int |\varphi_k - \varphi| | \operatorname{Log} \varphi| \leq \sqrt{\int |\varphi_k - \varphi|} \sqrt{\int |\varphi_k - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2}$$

et comme $\int |\varphi_k - \varphi| \to 0$ il suffit de montrer que

$$\int |\varphi_K - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2 \text{ reste bornée quand } k \text{ tend vers l'infini.}$$

Or,

$$\operatorname{Log} a - b|x| \leq \operatorname{Log} \varphi(x) < 0, \quad x \in R$$

donc

$$(\operatorname{Log} \varphi(x))^2 \leq (\operatorname{Log} a)^2 - 2b \operatorname{Log} a \cdot (x) + b^2 |x|^2, \quad x \in R$$

d'où

$$\int |\varphi_k - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2 \leq$$

$$(\operatorname{Log} a)^2 \int |\varphi_k - \varphi| + 2b | \operatorname{Log} a| \int |x| (\varphi + \varphi_k) + b^2 \int x^2 (\varphi + \varphi_k),$$

et ce majorant est borné puisque la convergence en moyenne quadratique de $\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t$ vers ϵ_t implique

$$\int x^2 \varphi_k \to \int x^2 \varphi \text{ et } \int |x| \varphi_k \to \int |x| \varphi.$$

4. Si φ_k et φ sont gaussiennes les convergences uniformes et en moyenne de φ_k vers φ sont des conséquences de la première partie. Mais on peut faire une démonstration élémentaire directe:
On écrit:

$$\frac{1}{\eta k \sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sqrt{2\pi}}\Big) - \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\eta^2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{\alpha_k}{\eta_k} + \beta_k\Big)$$

où

$$\alpha_k = \exp\Big(-\frac{x^2}{2\eta_k^2}\Big) - \exp\Big(-\frac{x^2}{2\eta^2}\Big)$$

et

$$\beta_k = \Big(\frac{1}{\eta_k} - \frac{1}{\eta}\Big) \exp\Big(-\frac{x^2}{2\eta^2}\Big).$$

Comme (η_k) tend vers η il suffit d'établir la convergence uniforme de α_k vers 0.
Or $\eta_k > \eta$ donc $|\alpha_k| = \alpha_k$ et comme $\alpha_k(0) = 0$, α'_k change de signe pour

$$\pm x_k = \pm\left(\frac{\operatorname{Log}\frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2}\right)}\right)^{1/2}$$

le maximum de α_k vaut $\alpha_k(x_k)$ c'est-à-dire

$$\exp\left[-\frac{1}{2\eta_k^2}\frac{\operatorname{Log}\frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2}\right)}\right] - \exp\left[-\frac{1}{2\eta^2}\frac{\operatorname{Log}\frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2}\right)}\right]$$

et ceci tend vers zéro.
D'autre part, pour montrer que $\int |\varphi_k - \varphi| \to 0$ il suffit de prouver que $\int |\alpha_k| \to 0$, or

$$\int |\alpha_k| = \int \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\eta_k^2}\Big)\Big(1 - \exp\frac{x^2}{2}(\frac{1}{\eta_k^2} - \frac{1}{\eta^2})\Big)dx$$

et le théorème de la convergence dominée s'applique avec la fonction majorante $\exp(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{1+\eta^2})$.
Enfin

$$\int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k = \frac{1}{\eta_k\sqrt{2\pi e}} \to \frac{1}{\eta\sqrt{2\pi e}} = \int \varphi \operatorname{Log}\varphi. \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant indiquer le comportement de $E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) = m_k$.

Théorème 4.

1. *Sous les hypothèses du théorème 3.2 et si $g \operatorname{Log} g$ est intégrable Lebesgue il vient*

$$\int g \operatorname{Log} g > 0 \quad\Rightarrow\quad m_k \to +\infty$$

$$\int g \operatorname{Log} g < 0 \quad\Rightarrow\quad m_k \to -\infty$$

$$\int g \operatorname{Log} g = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Log}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \le \underline{\lim}\, m_k \le \overline{\lim}\, m_k \le \int \varphi \operatorname{Log}\varphi.$$

2. *Sous les hypothèses du théorème 3.3: $\int g \operatorname{Log} g = 0 \Rightarrow m_k \to \int \varphi \operatorname{Log}\varphi$.*

Démonstration: De (5) on déduit

$$m_k = (k+1)\int g \operatorname{Log} g + \int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k.$$

Comme $\int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k$ reste asymptotiquement borné il est clair que, pour $\int g \operatorname{Log} g \neq 0$, m_k tend vers l'infini avec le signe de $\int g \operatorname{Log} g$.

Si $\int g \,\mathrm{Log}\, g = 0$ les résultats sont des conséquences immédiates du théorème 3 (2 et 3). □

Théorème 5.

1. *Si φ est continue strictement positive et tend vers 0 à l'infini et si $g \,\mathrm{Log}\, g$ est Lebesgue intégrable, on a*

$$\frac{1}{k+1} \,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \,\mathrm{Log}\, g \tag{8}$$

et par conséquent

$$\int g \,\mathrm{Log}\, g > 0 \Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty \tag{9}$$

$$\int g \,\mathrm{Log}\, g < 0 \Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0 \tag{10}$$

2. *Si de plus $g(\,\mathrm{Log}\, g)^2$ est Lebesgue intégrable, on a*

$$\frac{\mathrm{Log}\, g_k(Z_{t,k}) - (k+1)\int g \,\mathrm{Log}\, g}{(\int g(\,\mathrm{Log}\, g)^2 - (\int g \,\mathrm{Log}\, g)^2)^{1/2}(k+1)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \tag{11}$$

et si $\int g \,\mathrm{Log}\, g = 0$ on a aussi

$$P(\overline{\lim}\, f_k(Z_{t,k}) = +\infty) = 1$$

$$P(\underline{\lim}\, f_k(Z_{t,k}) = 0) = 1.$$

Démonstration:

1. D'après (5) on a

$$\frac{1}{k+1} \,\mathrm{Log}\, f_k(Z_{t,k}) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} \mathrm{Log}\, g(X_{t-j}) + \frac{1}{k+1} \,\mathrm{Log}\, \varphi_k\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big)$$

or, d'après la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} \mathrm{Log}\, g(X_{t-j}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \,\mathrm{Log}\, g$$

et d'après le théorème 3.1

$$\varphi_k\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big) - \varphi\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big) \to 0$$

mais comme φ est continue

$$\varphi\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big) \xrightarrow{\text{p.s.}} \varphi(\epsilon_t) > 0$$

on en déduit (8) puis (9) et (10).

2. Soit $U_{t,k}$ le premier membre de (11), il s'écrit

$$U_{t,k} = \frac{\sum_0^k \operatorname{Log} g(X_{t-j}) - (k+1)\int g \operatorname{Log} g}{V_g^{1/2}(k+1)^{1/2}} + \frac{\operatorname{Log} \varphi_k\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big)}{V_g^{-1/2}(k+1)^{1/2}}$$

où $V_g = \int g(\operatorname{Log} g)^2 - (\int g \operatorname{Log} g)^2$.

Comme Log $\varphi_k\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big) \xrightarrow{\text{p.s.}} \operatorname{Log}\varphi(\epsilon_t)$ le théorème central limite entraîne (11).

Maintenant si $\int g \operatorname{Log} g = 0$ on peut considérer l'égalité:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Log} f_k(Z_{t,k})}{\alpha_k} &= \frac{\sum_0^k \operatorname{Log} g(X_i)}{\alpha_k} + \frac{\operatorname{Log}\varphi_k\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t\Big)}{\alpha_k} \\ &= A_k + B_k\end{aligned}$$

où $\alpha_k = \sqrt{V_g}\sqrt{2(k+1)\operatorname{Log}\operatorname{Log}(k+1)}$

il est clair que $B_k \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ et la loi du logarithme itéré ([6] p. 367) entraîne:

$$P(\overline{\lim}\, A_k = 1) = P(\underline{\lim}\, A_k = -1) = 1$$

cela permet de conclure. □

4 Le cas où ϵ_t est identiquement nul

Pour $\epsilon_t = 0$ la situation est assez différente. Le théorème suivant donne quelques résultats partiels:

Théorème 6. *On suppose que $\epsilon_t = 0$ mais qu'une infinité de a_j sont non nuls: alors:*

1. *Si g et $\varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k$ $(k \geq 1)$ sont Lebesgue intégrables*

$$\int g \operatorname{Log} g \geq 0 \Rightarrow m_k \to +\infty.$$

2. *Si, de plus, $a_j = \alpha\rho^j$, $\alpha \in R$, $0 < \rho < 1$, $j \geq 1$, alors la densité de Y_t, soit ψ, est telle que $\psi \operatorname{Log}\psi$ soit Lebesgue intégrable et*

$$\begin{aligned}\int g \operatorname{Log} g > \operatorname{Log}\rho &\Rightarrow m_k \to +\infty \\ \int g \operatorname{Log} g = \operatorname{Log}\rho &\Rightarrow m_k \to \int \psi \operatorname{Log}\psi \\ \int g \operatorname{Log} g < \operatorname{Log}\rho &\Rightarrow m_k \to -\infty.\end{aligned}$$

3. *Sous les hypothèses précédentes et si* $\int \psi(\operatorname{Log}\psi)^2 < +\infty$

$$\frac{1}{k+1}\operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \operatorname{Log} g + \operatorname{Log}\frac{1}{\rho}$$

et par conséquent

$$\int g \operatorname{Log} g > \operatorname{Log}\rho \quad \Rightarrow \quad f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$$

$$\int g \operatorname{Log} g < \operatorname{Log}\rho \quad \Rightarrow \quad f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0.$$

Enfin si de plus $\int g(\operatorname{Log} g)^2 < \infty$

$$\begin{aligned}\int g \operatorname{Log} g = \operatorname{Log}\rho \Rightarrow \qquad & P(\overline{\lim}\, f_k(Z_{t,k}) = +\infty) \\ = \quad & P(\underline{\lim}\, f_k(Z_{t,k}) = 0) = 1.\end{aligned}$$

Démonstration:

1. On a encore
$$m_k = (k+1)\int g \operatorname{Log} g + \int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k$$
or, d'après une propriété de l'entropie (cf. [4])
$$\int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k \geq \operatorname{Log}\frac{1}{\eta_k\sqrt{2\pi e}}$$
où $\eta_k = \sigma\sqrt{\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}$
donc $\int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k \to +\infty$ et par conséquent $m_k \to +\infty$.

2. Si $a_j = \alpha\rho^j$ la loi de
$$\frac{1}{\rho^{k+1}}\sum_{k+1}^{\infty}\alpha\rho^j X_{t-j} = \sum_{k+1}^{\infty}\alpha\rho^{j-k-1}X_{t-j}$$
ne dépend pas de k et a pour densité ψ. Par conséquent
$$\varphi_k(u) = \frac{1}{\rho^{k+1}}\psi\Big(\frac{u}{\rho^{k+1}}\Big), \qquad u \in R. \tag{12}$$
Comme φ_k est intégrable il en est donc de même pour $\psi \operatorname{Log}\psi$ et
$$\int \varphi_k \operatorname{Log}\varphi_k = \int \varphi \operatorname{Log}\varphi + (k+1)\operatorname{Log}\frac{1}{\rho}$$
on en déduit
$$m_k = (k+1)\Big[\int g \operatorname{Log} g + \operatorname{Log}\frac{1}{\rho}\Big] + \int \psi \operatorname{Log}\psi$$
d'où les résultats annoncés.

3. Nous étudions maintenant la suite

$$A_k = \frac{1}{k+1} \operatorname{Log} \varphi_k\Big(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}\Big) \quad k \geq 0.$$

D'après (12) nous avons

$$A_k = \operatorname{Log} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{k+1} \operatorname{Log} \psi\Big(\sum_{k+1}^{\infty} \rho^{j-k-1} X_{t-j}\Big)$$

la loi de $W_{t,k} = \sum\limits_{k+1}^{\infty} \rho^{j-k-1} X_{t-j}$ et celle de Log $\psi(W_{t,k})$ ne dépendent ni de t ni de k, or

$$(\forall \epsilon > 0), P\Big(\Big|\frac{1}{k+1} \operatorname{Log} \psi(W_{t,k})\Big| > \epsilon\Big) \leq \frac{E(\operatorname{Log} \psi(W_{t,k}))^2}{(k+1)^2 \epsilon^2}$$

donc

$$A_k \xrightarrow{\text{p.s.}} \operatorname{Log} \frac{1}{\rho}$$

il suffit maintenant de remarquer que

$$\frac{1}{k+1} \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \operatorname{Log} g(X_{t-j}) + A_k$$

et d'appliquer la loi forte des grands nombres pour obtenir les résultats de convergence presque sûre annoncés. Enfin le dernier résultat provient de la loi du logarithme itéré appliqué aux variables Log $g(X_i)$. $\square$

Références

[1] D. Bosq, Nonparametric estimation of a non linear filter using a density estimator with a zero-one explosive behaviour in $\mathbb{R}^d$. *Statistics and Decisions* **7**, (1989), 229-241.

[2] D. Bosq, Asymptotic estimation of a non linear infinite filter. Application to the estimation of Volterra series. Soumis à *Journal of Nonparametric Statistics.*

[3] P. Malliavin, *Intégration - Analyse de Fourier - Probabilités.* Masson (1982).

[4] P.A.P. Moran, *An introduction to probability theory.* Oxford (1968).

[5] J. Neveu, *Martingales à temps discret.* Masson (1972).

[6] M.M. Rao, *Probability theory with applications.* Acad. Press (1964).

D. Bosq
74 rue Dunois
75013 Paris
France.