Un estudio geométrico del grupo S_4

A. R. Moyano y R. M. Rubio.

Abstract. We present a geometric study of the symmetry group of the tetrahedron constructing its elements explicitly as transformations in a tridimensional Euclidean space. We also give all its subgroups and linear representations.

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio geomtrico del grupo de simetrías del tetraedro construyendo explicitamente sus elementos como transformaciones en el espacio euclídeo tridimensional. Así mismo, también damos todos sus subgrupos y representaciones lineales.

Math. Sub. Class (2000). 20B05.

1 Introducción

Es considerable la cantidad de grupos que aparecen como grupos de isometrías de una figura geometrica regular. Por otro lado, es frecuente en el estudio del grupo simétrico S_3, recurrir a una interpretación geometrica del mismo por medio de las transformaciones geométricas del plano euclideo que conservan la figura (véase [2]). Sin embargo, en el paso inmediatamente superior (S_4) si bien aparece comentado en algunas referencias (véase [1]) no es habitual encontrar un tratamiento geométrico detallado.

En este trabajo realizamos un estudio original y completo del grupo de isometrías del tetraedro encuadrado en el contexto del álgebra geométrica, frente a las descripciones sintéticas de sus elementos que se pueden encontrar en las referencias existentes.

En lo que sigue, hacemos una descripción y estudio de la estructura del grupo de isometrías del tetraedro, clasificando geometricamente sus elementos y explicitando todos sus subgrupos. Para esto construimos en primer lugar un sistema de referencia adaptado a la figura.

2 Unos ejes para el tetraedro

Sean A, B, C, D los cuatro vértices de un tetraedro regular con longitud L en cada una de sus 6 aristas.

Partimos de unos ejes de manera que
el origen esté en el vértice B,
el eje de las x's contenga al lado $[B, C]$,
el plano $z = 0$ contenga a la cara BCD.
Calculando la altura desde el lado $[B, C]$ hasta el vértice D sale el número $\sqrt{3}L/2$, lo que permite escribir

$$B = (0, 0, 0), C = (L, 0, 0), D = (L/2, \sqrt{3}L/2, 0).$$

El vector

$$H = \frac{B + C + D}{3} = (L/2, \sqrt{3}L/6, 0)$$

sitúa al baricentro de la base BCD, el cual se encuentra a una distancia $\sqrt{3}L/3$ de sus vértices. Entonces, la altura del tetraedro mide $\sqrt{6}L/3$, con lo que

$$A = (L/2, \sqrt{3}L/6, \sqrt{6}L/3).$$

Finalmente, el baricentro G del tetraedro vendrá fijado por

$$G = \frac{A + B + C + D}{4} = (L/2, \sqrt{3}L/6, \sqrt{6}L/12).$$

Hacemos ahora una traslación de ejes para dejar al punto G como origen. En esta referencia se tendrán, para los 4 vértices, las coordenadas

$$A = (0, 0, \sqrt{6}L/4) = (0, 0, 3\alpha\beta\gamma),$$

$$B = (-L/2, -\sqrt{3}L/6, -\sqrt{6}L/12) = (-6\gamma, -2\beta\gamma, -\alpha\beta\gamma),$$

$$C = (L/2, -\sqrt{3}L/6, -\sqrt{6}L/12) = (6\gamma, -2\beta\gamma, -\alpha\beta\gamma),$$

$$D = (0, \sqrt{3}L/3, -\sqrt{6}L/12) = (0, 4\beta\gamma, -\alpha\beta\gamma),$$

donde $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{3}, \gamma = L/12$.

3 Ejes de simetría

Para los puntos medios de cada una de las aristas, se tiene

$$(A + B)/2 = (-3\gamma, -\beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$$

$$(C + D)/2 = (3\gamma, \beta\gamma, -\alpha\beta\gamma)$$

$$(A + C)/2 = (3\gamma, -\beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$$

$$(B + D)/2 = (-3\gamma, \beta\gamma, -\alpha\beta\gamma)$$

$$(A + D)/2 = (0, 2\beta\gamma, \alpha\beta\gamma)$$

$$(B + C)/2 = (0, -2\beta\gamma, -\alpha\beta\gamma)$$

Los dos primeros son simétricos respecto del origen y determinan una recta b con vector director unitario

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\alpha\beta}(-\beta, -1, \alpha)$$

Las rectas $< A, B >$ y $< C, D >$, dirigidas por los vectores

$$< A, B >:\ (-6\gamma, -2\beta\gamma, -4\alpha\beta\gamma), < C, D >:\ (-6\gamma, 6\beta\gamma, 0)$$

son ambas perpendiculares a b, luego en la simetría axial de eje b se intercambian A con D y B con C, lo que nos indican que b es un eje de simetría para el tetraedro. Igual ocurre con la segunda pareja, que determinan una recta c con vector director unitario

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\alpha\beta}(\beta, -1, \alpha)$$

la cual es eje de simetría que cambia A en C y B en D. Finalmente, la tercera pareja determina una recta d con vector director unitario

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\alpha\beta}(0, 2, \alpha)$$

eje de simetría que aplica A en D y B en C.

4 Referencia canónica para el tetraedro

Se observa enseguida que la terna $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es ortonormal de orientación positiva. Manteniendo como origen el baricentro G, tenemos un sistema de referencia *canónico* para el tetraedro. Las matrices de cambio desde el anterior son las

$$P = \frac{1}{\alpha\beta}\begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, P^{-1} = P^t = \frac{1}{\alpha\beta}\begin{bmatrix} -\beta & -1 & \alpha \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

Usando la inversa, pasamos de las viejas coordenadas a las nuevas, resultando, para los vértices, que

$$A = \delta(1,1,1)$$
$$B = \delta(1,-1,-1)$$
$$C = \delta(-1,1,-1)$$
$$D = \delta(-1,-1,1)$$

donde hemos escrito $\delta = 3\alpha\gamma = \sqrt{2}L/4$. Las de los puntos medios de las aristas pasan a ser

$$(A+B)/2 = \delta(1,0,0)$$
$$(C+D)/2 = \delta(-1,0,0)$$
$$(A+C)/2 = \delta(0,1,0)$$
$$(B+D)/2 = \delta(0,-1,0)$$
$$(A+D)/2 = \delta(0,0,1)$$
$$(B+C)/2 = \delta(0,0,-1)$$

5 Rotaciones del tetraedro

Tenemos en primer lugar la identidad

$$1)\ I = (A,B,C,D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, las 3 simetrías axiales (rotaciones de π radianes) que denotaremos con las mismas letras que sus ejes:

Eje $b : y = z = 0$

$$2)\ b = (B, A, D, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eje $c : z = x = 0$

$$3)\ c = (C, D, A, B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eje $d : x = y = 0$

$$4)\ d = (D, C, B, A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Éstas son isometrías de orden 2. Con eje la recta que une un vértice con el baricentro de la cara opuesta, hay dos rotaciones con amplitudes de $2\pi/3$ y $4\pi/3$ radianes. Así, se obtienen 8 isometrías de orden 3 que indicamos a continuación:

Eje: $x = y = z$, orientado desde el baricentro hacia el vértice A

$$5)\ g_A = (A, C, D, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = g$$

$$6)\ g_A^2 = (A, D, B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = g^2$$

Eje: $x = -y = -z$, orientado desde el baricentro hacia el vértice B

$$7)\ g_B = (D, B, A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = gd$$

$$8)\ g_B^2 = (C, B, D, A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = g^2c$$

Eje: $-x = y = -z$, orientado desde el baricentro hacia el vértice C

$$9)\ g_C = (B, D, C, A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = gb$$

$$10)\ g_C^2 = (D, A, C, B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = g^2 d$$

Eje: $-x = -y = z$, orientado desde el baricentro hacia el vértice D

$$11)\ g_D = (C, A, B, D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = gc$$

$$12)\ g_D^2 = (B, C, A, D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = g^2 b$$

6 Estructura del grupo de rotaciones

Estas 12 isometrías constituyen el **grupo de las rotaciones del tetraedro** (isomorfo al grupo alternado $\mathcal{A}_4$), denotado como $\mathcal{T}^+$ y generado con los elementos g, b, c, d, si bien los dos últimos son superfluos porque

$$d = bc, \quad c = g^{-1} b g.$$

No obstante, mantrendremos en la escritura las transformaciones c y d.

Operando, bien con las matrices, bien con las permutaciones, es evidente que $K = \{I, b, c, d\}$ es un subgrupo isomorfo al cuártico de Klein $\mathcal{K}$. Como las simetrías axiales son los únicos elementos de orden 2, si a una le aplicamos un automorfismo, debe obtenerse otra simetría axial, es decir, el subgrupo K es característico y, por ello, es normal. Otro subgrupo a destacar, éste de orden 3 (luego isomorfo $\mathcal{C}_3$) es el $G = \{I, g, g^2\}$. Siendo claro que

$$\mathcal{T}^+ = GK, \quad G \cap K = \{I\},$$

podemos escribir el producto semidirecto

$$\mathcal{T}^+ = G[K].$$

La operatividad del grupo, además de las tablas de G y K, depende de las fórmulas

$$g^{-1} b g = c, \quad g^{-1} c g = d, \quad g^{-1} d g = b.$$

7 Subgrupos del grupo $\mathcal{T}^+$

Dentro de este grupo tenemos los siguientes subgrupos:

1) Uno de orden 1:

$$\{I\}$$

2) Tres de orden 2:

$$\{I, b\} \simeq \{I, c\} \simeq \{I, d\} \simeq \mathcal{C}_2$$

Son conjugados entre sí porque

$$g^{-1}\{I, b\}g = \{I, c\}, \quad g^{-2}\{I, b\}g^2 = \{I, d\}.$$

3) Cuatro de orden 3:

$$\{I, g, g^2\} \simeq \{I, gd, g^2c\} \simeq \{I, gb, g^2d\} \simeq \{I, gc, g^2b\} \simeq \mathcal{C}_3$$

Son conjugados entre sí porque,

$$b^{-1}\{I, g, g^2\}b = \{I, gd, g^2c\},$$

$$c^{-1}\{I, g, g^2\}c = \{I, gb, g^2d\},$$

$$d^{-1}\{I, g, g^2\}d = \{I, gc, g^2b\}.$$

4) Uno de orden 4:

$$\{I, b, c, d\} \simeq \mathcal{K}$$

Es característico y normal.

5) Se comprueba que no hay subgrupos de orden 6. De haberlos, no puede ser cíclico pues el grupo carece de elementos de orden 6, luego sería isomorfo a $\mathcal{D}_3$. En tal caso, contendría un subgrupo normal de orden 3, por ejemplo el $\{I, g, g^2\}$, y alguno de los elementos b, c, d de orden 2. Esto es imposible porque

$$b^{-1}gb = gd, \quad g^{-1}cg = gb, \quad g^{-1}dg = gc,$$

son distintos de g^2.

6) Uno de orden 12:

$$\mathcal{T}^+.$$

8 Representaciones lineales del grupo $\mathcal{T}^+$

Las órbitas de conjugación en este grupo son las cuatro siguientes:

$$\mathcal{O}(I) = \{I\}$$

$$\mathcal{O}(b) = \{b, c, d\}$$

$$\mathcal{O}(g) = \{g, gd, gb, gc\}$$

$$\mathcal{O}(g^2) = \{g^2, g^2c, g^2d, g^2b\}$$

Para los grados de las representaciones irreducibles se cumplirá que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = 12 \Leftrightarrow n_1 = n_2 = n_3 = 1, n_4 = 3$$

La primera será la trivial σ^1. Las dos siguientes, de grado 1, se definen por las fórmulas

$$\sigma^2(k) = 1, \sigma^2(g) = \omega,$$

$$\sigma^3(k) = 1, \sigma^3(g) = \omega^2,$$

donde $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. La de grado 3 la da el propio grupo. La tabla de caracteres resultante es la

		χ^1 1	χ^2 1	χ^3 1	χ^4 3
I	1	1	1	1	3
b	3	1	1	1	-1
g	4	1	ω	ω^2	0
g^2	4	1	ω^2	ω	0

9 Planos de simetría

El tetraedro admite 6. El espejo de cada uno de ellos es el plano que pasa por dos vértices y el punto medio de los otros dos. Por ejemplo, el plano que pasa por los vértices A y D y por el punto medio de B y C. Esta simetría la denotaremos como s. Operando, se tiene, entonces, que

13) Simetría de espejo $x - y = 0$ $s = (A, C, B, D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14) Simetría de espejo $z - x = 0$

$$sg = (A, D, C, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15) Simetría de espejo $y - z = 0$ $sg^2 = (A, B, D, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16) Simetría de espejo $x + y = 0$ $sd = (D, B, C, A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17) Simetría de espejo: $z + x = 0$ $sgc = (C, B, A, D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18) Simetría de espejo: $y + z = 0$ $sg^2b = (B, A, C, D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10 Isometrías impares del tetraedro

Además de las seis simetrías especulares, que son isometrías impares de orden 2, habrá otras seis, con orden 4, las cuales serán simetrías rotatorias. Las especulares se han obtenido componiendo s con las seis rotaciones I, g, g^2, d, gc, g^2b; las rotatorias se obtendrán componiendo s con las restantes rotaciones:

19) Simetría rotatoria dirigida por $(0, 0, 1)$ y ángulo de $3\pi/2$

$$sb = (B, D, A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

20) Simetría rotatoria dirigida por $(0, 0, 1)$ y ángulo de $\pi/2$

$$sc = (C, A, D, B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

21) Simetría rotatoria dirigida por $(0, 1, 0)$ y ángulo de $3\pi/2$

$$sgd = (D, A, B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

22) Simetría rotatoria dirigida por $(0, 1, 0)$ y ángulo de $\pi/2$

$$sgb = (B, C, D, A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23) Simetría rotatoria dirigida por $(1, 0, 0)$ y ángulo de $3\pi/2$

$$sg^2c = (C, D, B, A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

24) Simetría rotatoria dirigida por $(1, 0, 0)$ y ángulo de $\pi/2$

$$sg^2d = (D, C, A, B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11 El grupo del tetraedro

Las 24 isometrías

$$1)\, I = (A, B, C, D)$$

$$2)\, b = (B, A, D, C),\ 3)\, c = (C, D, A, B),\ 4)\, d = (D, C, B, A)$$

$$5)\, g = (A, C, D, B),\ 6)\, g^2 = (A, D, B, C)$$

$$7)\, gd = (D, B, A, C),\ 8)\, g^2c = (C, B, D, A)$$

$$9)\, gb = (B, D, C, A),\ 10)\, g^2d = (D, A, C, B)$$

$$11)\, gc = (C, A, B, D),\ 12)\, g^2b = (B, C, A, D)$$

$$13)\, s = (A, C, B, D),\ 14)\, sg = (A, D, C, B),\ 15)\, sg^2 = (A, B, D, C)$$

$$16)\, sd = (D, B, C, A),\ 17)\ sgc\ = (C, B, A, D),\ 18)\, sg^2b = (B, A, C, D)$$

$$19)\, sb = (B, D, A, C),\ 20)\, sc = (C, A, D, B)$$

$$21)\, sgd = (D, A, B, C),\ 22)\, sgb = (B, C, D, A)$$

$$23)\, sg^2c = (C, D, B, A),\ 24)\, sg^2d = (D, C, A, B)$$

que hemos descrito constituyen el **grupo del tetraedro**, isomorfo al grupo simétrico $\mathcal{S}_4$ y denotado como $\mathcal{T}$. Lo generamos con el conjunto $\{g, b, c, d, s\}$, aunque bastaría hacerlo con el $\{g, b, s\}$.

El grupo $K = \{I, b, c, d\}$ sigue siendo normal: al aplicar cualquier automorfismo interno a los elementos b, c y d, debe salir una transformación de orden 2 y par, es decir, otra de ellas. Comprobando que $s^{-1}gs = g^2$, vemos que los elementos g y s generan un subgrupo

$$SG = \{I, g, g^2, s, sg, sg^2\} \simeq \mathcal{D}_3$$

Entonces, se llega a la descomposición

$$\mathcal{T} = SG[K].$$

La operatividad en $\mathcal{T}$ resulta de las tablas de estos subgrupos y de las fórmulas

$$g^{-1}bg = c,\ g^{-1}cg = d,\ g^{-1}dg = b,$$

$$s^{-1}bs = c,\ s^{-1}cs = b,\ s^{-1}ds = d,$$
$$s^{-1}gs = g^{-1}.$$

12 Subgrupos del grupo $\mathcal{T}$

Posee los siguientes subgrupos:

1) Uno de orden 1:

$$\{I\}$$

2) Nueve de orden 2:

$$\{I, b\} \simeq \{I, c\} \simeq \{I, d\} \simeq \mathcal{C}_2,$$

$$\{I, s\} \simeq \{I, sg\} \simeq \{I, sg^2\} \simeq \{I, sd\} \simeq \{I, sgc\} \simeq \{I, sg^2b\} \simeq \mathcal{C}_2.$$

Los tres primeros, ya lo sabemos, son conjugados entre sí. También lo son los otros seis porque

$$g^{-1}\{I, s\}g = \{I, sg^2\},\ g^{-2}\{I, s\}g^2 = \{I, sg\},\ b^{-1}\{I, s\}b = \{I, sd\},$$

$$(gd)^{-1}\{I, s\}(gd) = \{I, sg^2b\},\ (g^2d)^{-1}\{I, s\}(g^2d) = \{I, sgc\}.$$

3) Cuatro de orden 3:

$$\{I, g, g^2\} \simeq \{I, gd, g^2c\} \simeq \{I, gb, g^2d\} \simeq \{I, gc, g^2b\} \simeq \mathcal{C}_3.$$

Ya sabemos que son conjugados entre sí.

4) Tres subgrupos cíclicos de orden 4:

$$\{I, sb, d, sc\} \simeq \{I, sgd, c, sgb\} \simeq \{I, sg^2c, b, sg^2d\} \simeq \mathcal{C}_4$$

Son conjugados entre sí porque

$$g^{-1}\{I, sb, d, sc\}g = \{I, sg^2c, b, sg^2d\},\ g^{-2}\{I, sb, d, sc\}g^2 = \{I,sgd,c,sgb\}.$$

5) Otros cuatro de orden 4:

$$\{I, b, c, d\} \simeq \{I, s, d, sd\} \simeq \{I, sg, c,sgc\} \simeq \{I, sg^2, b, sg^2b\} \simeq \mathcal{K}$$

El primero es normal. Los otros son conjugados entre sí ya que

$$g^{-1}\{I, s, d, sd\}g = \{I, sg^2, b, sg^2b\},\ g^{-2}\{I, s, d, sd\}g^2 = \{I, sg, c,sgc\}.$$

6) Hay cuatro de orden 6:

$$\{I, g, g^2, s, sg, sg^2\} \simeq \{I, gd, g^2c, sd, sg^2,sgc\} \simeq$$

$$\simeq \{I, gb, g^2d, sg, sd, sg^2b\} \simeq \{I, gc, g^2b, s, sg^2b,sgc\} \simeq \mathcal{D}_3$$

Son conjugados entre sí porque

$$b^{-1}\{I, g, g^2, s, sg, sg^2\}b = \{I, gd, g^2c, sd,sgc,sg^2\},$$

$$c^{-1}\{I, g, g^2, s, sg, sg^2\}c = \{I, gb, g^2d, sd, sg, sg^2b\},$$

$$d^{-1}\{I, g, g^2, s, sg, sg^2\}d = \{I, gc, g^2b, s,sgc,sg^2b\}.$$

7) De orden 8 hay tres:

$$\mathcal{Z}(d) = \{I, sb, d, sc, b, sd, c, s\} \simeq$$

$$\simeq \mathcal{Z}(c) = g^{-2}\mathcal{Z}(d)g^2 = \{I,sgb,c,sgd,d, sg, b,sgc\} \simeq$$

$$\simeq \mathcal{Z}(b) = g^{-1}\mathcal{Z}(d)g = \{I, sg^2c, b, sg^2d, c, sg^2b, d, sg^2\} \simeq \mathcal{D}_4$$

Son los 2-subgrupos de Sylow.

8) Hay un subgrupo (normal) de orden 12:

$$\{I, b, c, d, g, g^2, gd, g^2c, gb, g^2d, gc, g^2b\} = \mathcal{T}^+ \simeq \mathcal{A}_4$$

13 Representaciones lineales del grupo $\mathcal{T}$

Las órbitas de conjugación en este grupo son las cuatro siguientes:

$$\mathcal{O}(I) = \{I\}$$

$$\mathcal{O}(b) = \{b, c, d\}$$
$$\mathcal{O}(g) = \{g, gd, gb, gc, g^2, g^2c, g^2d, g^2b\}$$
$$\mathcal{O}(s) = \{s, sd, sg^2, sg, sg^2b, sgc\}$$
$$\mathcal{O}(sb) = \{sb, sc, sg^2c, sgd, sg^2d, sgb\}$$

Para los grados de las representaciones irreducibles se cumplirá que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24 \to n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = n_5 = 3$$

La primera representación es la trivial

$$\sigma^1(s^x g^y k) = 1.$$

La segunda es la función *signo*

$$\sigma^2(s^x g^y k) = 1 \text{ si } x = 0,\ \sigma^2(s^x g^y k) = -1 \text{ si } x = 1.$$

La función

$$\sigma^3(s^x g^y k) = s^x g^y$$

es un morfismo de $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{D}_3$, con lo cual σ^3 se materializa como el grupo del triángulo. Como σ^4podemos tomar la identidad del propio grupo $\mathcal{T}$. Finalmente, σ^5 se define como

$$\sigma^5(s^x g^y k) = s^x g^y k \text{ si } x = 0,\ \sigma^5(s^x g^y k) = -s^x g^y k \text{ si } x = 1,$$

tratándose en realidad del grupo de las rotaciones del cubo. La tabla de caracteres resultante es la

		χ^1 1	χ^2 1	χ^3 2	χ^4 3	χ^4 3
I	1	1	1	2	3	3
b	3	1	1	2	-1	-1
g	8	1	1	-1	0	0
s	6	1	-1	0	1	-1
sb	6	1	-1	0	-1	1

14 Interpretación geométrica de algunos subgrupos

Interpretación geométrica del subgrupo $\{I, b, c, d\} \simeq \mathcal{K}$:
Los cuatro puntos

$$(A + B)/2 = \delta(1, 0, 0)$$

$$(B + D)/2 = \delta(0, -1, 0)$$

$$(D + C)/2 = \delta(-1, 0, 0)$$

$$(C + A)/2 = \delta(0, 1, 0)$$

situados en el plano $z = 0$, forman un cuadrilátero cuyos lados los marcan los vectores

$$(B + D)/2 - (A + B)/2 = \delta{-1}, -1, 0$$

$$(D + C)/2 - (B + D)/2 = \delta(-1, 1, 0)$$

$$(C + A)/2 - (D + C)/2 = \delta(1, 1, 0)$$

$$(A + B)/2 - (C + A)/2 = \delta(1, -1, 0)$$

todos de igual longitud, por lo que forman un rombo (de hecho es un cuadrado porque cada lado es perpendicular a su contiguo). Restringiéndonos al mismo b y c son las simetrías respecto a las diagonales, mientras que d es la simetría central. El subgrupo $\{I, s, d, sd\}$ actúa sobre este cuadrado, considerado ahora como rectángulo, de manera que s y sd son las simetrías respecto de las mediatrices y d sigue siendo la simetría central.

$$(A + B)/2 = \delta(1, 0, 0)$$

$$(B + C)/2 = \delta(0, 0, -1)$$

$$(C + D)/2 = \delta(-1, 0, 0)$$

$$(D + A)/2 = \delta(0, 0, 1)$$

Considerado como rombo, su grupo vuelve a ser el $\{I, b, c, d\}$, actuando ahora como simetría central la transformación c. Considerado como rectángulo su grupo es el $\{I, sg, c, sgc\}$.

$$(A + C)/2 = \delta(0, 1, 0)$$

$$(C + B)/2 = \delta(0, 0, -1)$$

$$(B + D)/2 = \delta(0, -1, 0)$$

$$(D + A)/2 = \delta(0, 0, 1)$$

De nuevo $\{I, b, c, d\}$ es el grupo de este rombo, si bien ahora la simetría central la ejecuta b. Como rectángulo, su grupo es el $\{I, sg^2, b, sg^2b\}$.

Interpretación de los grupos $\mathcal{C}_4$:

Los cuatro puntos $(A + B)/2, (B + D)/2, (D + C)/2, (C + A)/2$, forman un cuadrado. La actuación sobre el mismo del subgrupo $\{I, sb, d, sc\}$ es el grupo de los giros de dicho cuadrado.

Interpretación de los grupos $\mathcal{D}_4$:

La transformación b es una de las simetrías del cuadrado, luego el subgrupo $\{I, sb, d, sc, b, sd, c, s\}$ es el diédrico del mismo.

15 Tabla del grupo $\mathcal{T}$

Terminamos mostrando en su totalidad la tabla del grupo $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$(Superior izquierda = $\mathcal{A}_4$)

	I	b	c	d	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d
I	I	b	c	d	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d
b	b	I	d	c	gc	gd	g	gb	g^2d	g^2c	g^2b	g^2
c	c	d	I	b	gd	gc	gb	g	g^2b	g^2	g^2d	g^2c
d	d	c	b	I	gb	g	gd	gc	g^2c	g^2d	g^2	g^2b
g	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d	I	b	c	d
gb	gb	g	gd	gc	g^2c	g^2d	g^2	g^2b	d	c	b	I
gc	gc	gd	g	gb	g^2d	g^2c	g^2b	g^2	b	I	d	c
gd	gd	gc	gb	g	g^2b	g^2	g^2d	g^2c	c	d	I	b
g^2	g^2	g^2b	g^2c	g^2d	I	b	c	d	g	gb	gc	gd
g^2b	g^2b	g^2	g^2d	g^2c	c	d	I	b	gd	gc	gb	g
g^2c	g^2c	g^2d	g^2	g^2b	d	c	b	I	gb	g	gd	gc
g^2d	g^2d	g^2c	g^2b	g^2	b	I	d	c	gc	gd	g	gb

$\mathcal{T}$(Superior derecha)

	s	sb	sc	sd	sg	sgb	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d
I	s	sb	sc	sd	sg	sgb	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d
b	sc	sd	s	sb	sgd	sgc	sgb	sg	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c
c	sb	s	sd	sc	sgc	sgd	sg	sgb	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2
d	sd	sc	sb	s	sgb	sg	sgd	sgc	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b
g	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d	s	sb	sc	sd	sg	sgb	sgc	sgd
gb	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b	sd	sc	sb	s	sgb	sg	sgd	sgc
gc	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c	sc	sd	s	sb	sgd	sgc	sgb	sg
gd	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2	sb	s	sd	sc	sgc	sgd	sg	sgb
g^2	sg	sgb	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d	s	sb	sc	sd
g^2b	sgc	sgd	sg	sgb	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2	sb	s	sd	sc
g^2c	sgb	sg	sgd	sgc	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b	sd	sc	sb	s
g^2d	sgd	sgc	sgb	sg	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c	sc	sd	s	sb

$\mathcal{T}$(Inferior izquierda)

	I	b	c	d	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d
s	s	sb	sc	sd	sg	sgb	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d
sb	sb	s	sd	sc	sgc	sgd	sg	sgb	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2
sc	sc	sd	s	sb	sgd	sgc	sgb	sg	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c
sd	sd	sc	sb	s	sgb	sg	sgd	sgc	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b
sg	sg	sgb	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d	s	sb	sc	sd
sgb	sgb	sg	sgd	sgc	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b	sd	sc	sb	s
sgc	sgc	sgd	sg	sgb	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2	sb	s	sd	sc
sgd	sgd	sgc	sgb	sg	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c	sc	sd	s	sb
sg^2	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d	s	sb	sc	sd	sg	sgb	sgc	sgd
sg^2b	sg^2b	sg^2	sg^2d	sg^2c	sc	sd	s	sb	sgd	sgc	sgb	sg
sg^2c	sg^2c	sg^2d	sg^2	sg^2b	sd	sc	sb	s	sgb	sg	sgd	sgc
sg^2d	sg^2d	sg^2c	sg^2b	sg^2	sb	s	sd	sc	sgc	sgd	sg	sgb

$\mathcal{T}$(Inferior derecha)

	s	sb	sc	sd	sg	sg	sgc	sgd	sg^2	sg^2b	sg^2c	sg^2d
s	I	b	c	d	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d
sb	c	d	I	b	gd	gc	gb	g	g^2b	g^2	g^2d	g^2c
sc	b	I	d	c	gc	gd	g	gb	g^2d	g^2c	g^2b	g^2
sd	d	c	b	I	gb	g	gd	gc	g^2c	g^2d	g^2	g^2b
sg	g^2	g^2b	g^2c	g^2d	I	b	c	d	g	gb	gc	gd
sgb	g^2c	g^2d	g^2	g^2b	d	c	b	I	gb	g	gd	gc
sgc	g^2b	g^2	g^2d	g^2c	c	d	I	b	gd	gc	gb	g
sgd	g^2d	g^2c	g^2b	g^2	b	I	d	c	gc	gd	g	gb
sg^2	g	gb	gc	gd	g^2	g^2b	g^2c	g^2d	I	b	c	d
sg^2b	gc	gd	g	gb	g^2d	g^2c	g^2b	g^2	b	I	d	c
sg^2c	gb	g	gd	gc	g^2c	g^2d	g^2	g^2b	d	c	b	I
sg^2d	gd	gc	gb	g	g^2b	g^2	g^2d	g^2c	c	d	I	b

References

[1] M. A. Armstrong: Groups and Symmetry, Springer-Verlag, 1988

[2] Fraleigh, John B. Algebra abstracta. Adison- Wesley Iberoamericana 1987.

A. R. Moyano.
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Córdoba

R. M. Rubio.
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Córdoba.

e-mail: ma1rimoa@uco.es, ma1rurur@uco.es