Jesús Salvador González (1930 – 2008)

Vol. XVI • No. 1 • Año 2009

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XVI, Número 1, Año 2009

I.S.S.N. 1315–4125

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
`http://amv.ivic.ve/` .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Vol. XVI • No. 1 • Año 2009

El año pasado falleció en la ciudad de Caracas el Profesor Jesús González, uno de los egresados, en 1962, de la primera promoción de matemáticos de, en aquél entonces, Escuela de Física y Matemáticas, de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Central de Venezuela.

En el esbozo biográfico, de los Profesores Walter Beyer, Mauricio Orellana y Sergio Rivas, los lectores apreciarán el desempeño de Jesús como docente, investigador, divulgador y administrador. En todas esas actividades Jesús González puso siempre su empeño e inteligencia para ejercerlas eficientemente. Pero también, hallarán parte de la historia del desarrollo de la vida matemática venezolana, ya que, Jesús está ligado a él.

Conocí a Jesús González, en 1961, al iniciar mis estudios de matemáticas en la Universidad Central de Venezuela. Al igual que muchos, de esa época, le agradeceré siempre su aprecio, amistad y estímulo en mi desarrollo como estudiante y profesional; la generosidad no le era ajena.

En nuestra sesión de artículos tenemos los siguientes:

- A generalization of a Cullen's integral theorem for quaternions
  Daniel Alayón-Solarz
- Metric properties of a tensor norm defined by $lp\{lq\}$ spaces and some characteristics of its operator ideals associated
  Patricia Gómez Palacio, Juan Antonio López Molina and José Rivera
- On the stability of fixed point iteration procedures with errors
  A.A. Mogbademu and J.O. Olaleru

En la esquina olímpica, Rafael Sánchez reseña la actividad olímpica desarrollada durante los meses de enero a mayo de 2009. Resalta la actuación de Venezuela en el Canguro pues en esta ocasión se superó la cantidad de 155.000 alumnos. Así, Venezuela obtuvo una posición destacada entre los 41 países del mundo que participaron en ese evento.

Finalmente, informamos sobre el homenaje al Profesor Lázaro Recht, la XXII Escuela Venezolana de Matemáticas y el XI Congreso Latinoamericano de Probabilidad y Estadística Matemática, actividades que serán realizadas, en el país, durante este año.

Oswaldo Araujo G.

A generalization of a Cullen's Integral Theorem for the quaternions

Daniel Alayón-Solarz

1 Introduction and preliminaries

Let $\mathbb{H}$ be the algebra of the quaternions and let p be a quaternion, then p can be written as

$$p := t + xi + yj + zk.$$

Let f be a quaternion-valued function of a single quaternionic variable. Consider the class of complex-like quaternionic functions such that a member f can be written as

$$f = u + \iota v,$$

where u and v are real functions and ι is defined as

$$\iota := \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

In particular the identity function, sending one quaternion onto itself is complex-like and thus the quaternion p can be written as:

$$p = t + r\iota,$$

where

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Recall the left-Fueter operator is given by:

$$D_l := \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

and the right-Fueter operator is:

$$D_r := \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\ i + \frac{\partial}{\partial y}\ j + \frac{\partial}{\partial z}\ k.$$

Where in each case the constants i, j and k act by the left or by the right. For the rest of this paper, the class of complex-like quaternionic functions satisfying

$$D_l f = \frac{-2v}{r}$$

which will be referred as *left-Hyperholomorphic*. Replacing the left-Fueter operator by the right-Fueter operator one obtains the class of *right-Hyperholomorphic* functions. Since we will study the left-Fueter operator case we will refer to it simply as *Hyperholomorphic*. Note that ι can be parametrized by spherical coordinates

$$\iota = (\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\beta).$$

The coordinate system based in the variables (t, r, α, β) is especially well suited to study the interplay between the Fueter operator and the complex-like quaternionic functions. The left-Fueter operator in this coordinate system has the form:

$$D_l = \frac{\partial}{\partial t} + \iota \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial_l \iota},$$

where

$$\frac{\partial}{\partial \iota} := (\iota_\alpha)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} + (\iota_\beta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \beta},$$

and ι_α and ι_α represent the derivatives of ι with respect to α and β respectively. Using this coordinate system the following characterization of Hyperholomorphic functions can be proved:

Proposition 1 *A function $f = u + \iota v$ is hyperholomorphic if and only if u and v satisfy:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

and

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}(\sin\beta)^{-1} + \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(\sin\beta)^{-1} - \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

Analytic intrinsic functions, in the sense of Cullen [1] are hyperholomorphic. However, there exists hyperholomorphic functions which are not analytic intrinsic, as shown by the following examples:

$$\arctan\frac{x}{y} + \iota \operatorname{arctanh}\frac{z}{r},$$

$$\arctan\frac{y}{z} + \iota\,\mathrm{arctanh}\,\frac{x}{r},$$
$$\arctan\frac{z}{x} + \iota\,\mathrm{arctanh}\,\frac{y}{r}.$$

It is well known that regular functions in the Fueter sense, that is, quaternionic null-solutions to the Fueter operator, are in general not closed under the quaternionic product. However non-zero hyperholomorphic functions form a multiplicative group:

Proposition 2 *The sum and product of two hyperholomorphic functions is hyperholomorphic. If a function is hyperholomorphic and non-zero then its algebraic inverse is hyperholomorphic.*

A important property of hyperholomorphic functions is that they extends the Fueter's Theorem [3]. Denoting by Δ the Laplace operator in 4 dimensions:

Proposition 3 *Let f be a hyperholomorphic function. Then*

$$D_l\Delta f = D_r\Delta f = 0.$$

Fueter's Theorem was originally stated for the smaller class of quaternionic functions obtained by rotating around the real axis a complex analytic function. The purpose of this paper is to show how hyperholomorphic functions satisfy the following integral theorem given by Cullen in [1].

Proposition 4 *Let $f = u + \iota v$ be an hyperholomorphic function and let K any smooth, simple closed hypersurface in $\mathbb{H}$ the quaternionic space, disjoint from the real axis, K^* being the interior of K. Let $n(p) = n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k$ where (n_0, n_1, n_2, n_3) is the unit outer normal to K at p. Then,*

$$\int_K n(p)f(p)\frac{1}{r^2}dS_K = -2\int_{K^*} u\frac{\iota}{r^3}dV.$$

where dS_K is the element of surface area on K.

2 The Proof

This proof we will consider is the same Cullen gave in [1] and it requires two preliminar lemmas. Our contribution consists on the observation that one of these lemmas used by Cullen and satisfied by the class of analytic intrinsic functions is actually a definition of the the larger class of hyperholomorphic functions.

Proposition 5 *(Cullen's lemma) A function $f = u + \iota v$ a hyperholomorphic if and only if:*

$$D_l\left(\frac{f}{r^2}\right) = -\frac{2}{r^3}u\iota.$$

Proof. We first assume f is hyperholomorphic, then:

$$D_l(\frac{f}{r^2}) = (\frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_l \iota})(\frac{u+\iota v}{r^2})$$

$$= (\frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial r})(\frac{f}{r^2}) - \frac{2}{r^3}v = \frac{1}{r^2}(\frac{\partial f}{\partial t} + \iota\frac{\partial f}{\partial r}) - \frac{2}{r^3}(u\iota - v) - \frac{2}{r^3}v = -\frac{2}{r^3}u\iota.$$

Note how we use the fact that since f is hyperholomorphic then:

$$\frac{\partial f}{\partial_l \iota} = 2v$$

which in turn is a consequence of the hyperholomorphic functions being Cullen-regular [2], that is it satisfies the following equation:

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial r})f = 0$$

Note that for all functions $f = u + \iota v$:

$$D_l(\frac{f}{r^2}) = \frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_l \iota})f - \frac{2}{r^3}(\iota f)$$

so in particular if f satisfies the Cullen lemma then:

$$\frac{1}{r^2}(\frac{\partial}{\partial t} + \iota\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_l \iota})f - \frac{2}{r^3}(\iota f) = -\frac{2}{r^3}u\iota$$

implies

$$\frac{1}{r^2}D_l f = -\frac{2}{r^3}v$$

which for $r \neq 0$ is the condition for hyperholomorphicity. We continue with the second lemma:

Proposition 6 *Let (n_0, n_1, n_2, n_3) be the outward unit normal of K, then*

$$\int_{K^*}(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z})dV = \int_K (f_0 n_0 + f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)dS_k$$

where f_i are differentiable quaternionic functions.

Proof. Following Cullen, this is an application of the Gauss Theorem in four dimensions for the components of f_i.
We are now ready to prove our main result, for this it suffices to show that for $f = u + \iota v$ an hyperholomorphic function we have:

$$\int_K n(p)f(p)\frac{1}{r^2}dS_K = \int_K (n_0\frac{f}{r^2} + n_1\frac{if}{r^2} + n_2\frac{jf}{r^2} + n_3\frac{kf}{r^2})dS_K = \int_{K^*} D_l(\frac{f}{r^2})dV$$

$$= -2 \int_{K^*} u \frac{\iota}{r^3} dV.$$

And it is proved.
If one starts with the class of right-hyperholomorphic functions, that is those functions of the form $f = u + \iota v$ that satisfy

$$D_r f = \frac{-2v}{r},$$

then the integral theorem would read:

$$\int_K f(p)n(p)\frac{1}{r^2} dS_K = -2 \int_{K^*} u \frac{\iota}{r^3} dV.$$

The class of functions that are both left- and right-hyperholomorphic is not empty. For example the class of analytic instrinsic functions on the quaternions is of this form.

References

[1] C. G. Cullen, An Integral Theorem for Analytic Intrinsic functions on quaternions. Duke Math. J. 32, 139-148 (1965).

[2] G. Gentili and D. C. Struppa, A new theory of regular functions of a quaternionic variable, Advances in Mathematics Volume 216, Issue 1, 1 December 2007, Pages 279-301

[3] R. Fueter, Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier variablen, Comment. Math. Helv. **7**, 307-330 (1935); *ibidem* **8**, 371 (1936)

[4] A. Sudbery, *Quaternionic Analysis* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 85, pp. 199-225; (1979).

Daniel Alayón-Solarz
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Universidad Simón Bolívar

Metric properties of a tensor norm defined by $\ell_p\{\ell_q\}$ spaces and some characteristics of its associated operator ideals.

Patricia Gómez Palacio,
Juan Antonio López Molina and María José Rivera

Abstract. The present article examines the study stated in [4] regarding a tensor norm defined in a Bochner Banach sequence space $\ell_p\{\ell_q\}$ and its associated operator ideals in the sense of Defant and Floret [2]. In particular, we analyze the coincidence between components of the minimal and maximal operator ideals, and we prove some metric properties of the tensor norm and its dual.

Resumen. Este artículo examina el estudio indicado en [4] en cuanto a una norma de tensor definida en un espacio de secuencias de Bochner Banach $\ell_p\{\ell_q\}$ y sus ideales de operador asociados en el sentido de Defant y Floret [2]. En particular, analizamos la coincidencia entre los componentes de los ideales de operador mínimos y máximos, y demostramos algunas propiedades métricas de la norma de tensor y su duales.

1 Introduction

The equality between components of the maximal and the minimal operator ideals is a classical problem of the operator ideals theory and its solution has always been related to the Radon-Nikodým property, and the use of some concepts of the local theory. We use results found in [4] about the tensor norm defined by $\ell_p\{\ell_q\}$ spaces and the associated operator ideals.

The notation is standard. All the spaces are Banach spaces over the real field which allow us to use known results in Banach lattices. When we want to emphasize the space E where a norm is defined, we shall write $\|.\|_E$. The canonical inclusion of a Banach space E into its bidual E'' will be denoted by

J_E. Using FIN, we denote the class of all finite dimensional normed spaces, and for a normed space E we define

$$FIN(E) := \{M \subset E : M \in FIN\} \text{ and } COFIN(E) := \{L \subset E : E/L \in FIN\}$$

the sets of finite dimensional subspaces and finite codimensional, closed subspaces with induced norm.

We suppose the reader is familiar with the theory of operator ideals and tensor norms. The fundamental references about these matters are the books [14] and [2] of Pietsch and Defant and Floret respectively. We set the notation and some definitions to be used.

Given a pair of Banach spaces E and F and a tensor norm α, $E \otimes_\alpha F$ represents the space $E \otimes F$ endowed with the α-normed topology. The completion of $E \otimes_\alpha F$ is denoted by $E \hat{\otimes}_\alpha F$, and the norm of z in $E \otimes_\alpha F$ by $\alpha(z; E, F)$ (or $\alpha(z)$ if there is no risk of mistake). These are three tensor norms relative to α: transposed, α^t, finite hull, $\overrightarrow{\alpha}$, and cofinite hull, $\overleftarrow{\alpha}$. They are defined by

$$\alpha^t(z; E, F) := \alpha(z^t; F, E)$$

$$\overrightarrow{\alpha}(z) := \inf\{\alpha(z; M, N) : M \in FIN(E), N \in FIN(F), z \in M \otimes N\}$$

$$\overleftarrow{\alpha}(z) := \sup\left\{\alpha\left(Q_K^E \otimes Q_L^F(z); E/K, F/L\right) : K \in COFIN(E), L \in COFIN(F)\right\}$$

where $Q_K^E : E \twoheadrightarrow E/K$ is the canonical mapping.

A tensor norm α is called right-accessible if $\overleftarrow{\alpha}(\cdot; M, F) := \overrightarrow{\alpha}(\cdot; M, F)$ for all $(M, F) \in FIN \times NORM$, left-accessible if α^t is right-accessible, and accessible if it is right- and left-accessible. α is called totally accessible if $\overleftarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$.

For $1 \leq p \leq \infty$ the Saphar's tensor norm g_p is defined by

$$g_p(z; E \otimes F) := \inf\left\{\pi_p((x_i))\varepsilon_{p'}((y_i)) : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F\right\}$$

where

$$\pi_p((x_i)) := \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p\right)^{1/p} \quad \varepsilon_p((x_i)) := \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\langle x', x_i\rangle|^p\right)^{1/p}$$

for $1 \leq p < \infty$, and $\pi_\infty((x_i)) = \varepsilon_\infty((x_i)) = \sup_i \|x_i\|$

Concerning Banach lattices, we refer the reader to [1]. We recall the more relevant definitions and properties for our purposes: A Banach lattice E is order complete or Dedekind complete if every order bounded set in E has a least upper bound in E; it is order continuous if every order convergent filter is norm convergent. Every dual Banach sequence lattice E' is order complete, and the reflexive spaces are even order continuous. A linear map T between Banach lattices E and F is said to be positive if $T(x) \geq 0$ in F for every $x \in E, x \geq 0$. T is called order bounded if $T(A)$ is order bounded in F for every order bounded set A in E.

For $1 \leq p, q \leq \infty$ define the Bochner Banach sequence space

$$\ell_p\{\ell_q\} := \{a = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty} : \ \ \|a\|_{p\{q\}} := (\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q)^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

with the usual modifications if p or q are infinite. If $1 \leq p, q < \infty$, $\ell_p\{\ell_q\}$ is an order continuous Banach sequence lattice. By $\ell_p^n\{\ell_q^m\}, n, m \in \mathbb{N}$, we denote the sectional subspace of $\ell_p\{\ell_q\}$ of those sequences (α_{ij}) such that $\alpha_{ij} = 0$ for every $i \geq n,\ j \geq m$. $\ell_p^n\{\ell_q^m\}$ is 1-complemented in $\ell_p\{\ell_q\}$. By $\ell_{p'}\{\ell_{q'}\}$, we denote the dual space of $\ell_p\{\ell_q\}$, as usual.

According to J. Hoffman-Jörgensen's definition, a Banach space X is of type p for $1 < p \leq 2$, and cotype q for $q \geq 2$, respectively, if there is a constant $0 \leq M < \infty$ such that for all finite vector set $\{x_j\}_{j=1}^n$ in X,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\| dt \leq M \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p}$$

respectively,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\| dt \geq M^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{1/q}$$

where $r_n(t) := sing(\sin 2^n \pi t)$ is a Rademacher functions sequence for all $t \in [0,1]$ and $n = 0, 1, 2, 3....$ In particular, for $1 \leq p < \infty$ the space $L_p(\mu)$ is of type $\min(2,p)$ and cotype $\max(2,p)$, see [2].

Let (Ω, Σ, μ) be a measure, we denote $L_0(\mu)$ the space of equivalence classes, modulo equality μ-almost everywhere, of μ-measurable real-valued functions, endowed with the topology of local convergence in measure. The space of all equivalence classes of μ-measurable X-valued functions is denoted $L_0(\mu, X)$. By a Köthe function space $\mathcal{K}(\mu)$ on (Ω, Σ, μ), we shall mean an order dense ideal of $L_0(\mu)$, which is equipped with a norm $\|.\|_{\mathcal{K}(\mu)}$ that makes it a Banach lattice (if $f \in L_0(\mu)$ and $g \in \mathcal{K}(\mu)$ $|f| \leq |g|$, then $f \in \mathcal{K}(\mu)$ with $\|f\|_{\mathcal{K}(\mu)} \leq \|g\|_{\mathcal{K}(\mu)}$). Likewise, $\mathcal{K}(\mu, X) = \{f \in L_0(\mu, X) : \|f(.)\|_X \in \mathcal{K}(\mu)\}$, endowed with the norm $\|f\|_{\mathcal{K}(\mu,X)} = \|\|f(.)\|_X\|_{\mathcal{K}(\mu)}$.

2 Local theory and $\mathcal{L}^{p,q}$ spaces.

A standard reference on ultraproducts of Banach spaces, is [6].

Let D be a non empty index set and $\mathcal{U}$ a non-trivial ultrafilter in D. Given a family $\{X_d,\ d \in D\}$ of Banach spaces, $(X_d)_\mathcal{U}$ denotes the corresponding ultraproduct Banach space. If every $X_d,\ d \in D$, coincides with a fixed Banach space X, the corresponding ultraproduct is called an ultrapower of X, and it is denoted by $(X)_\mathcal{U}$. Notice that if every $X_d,\ d \in D$ is a Banach lattice, $(X_d)_\mathcal{U}$ has a canonical order which makes it a Banach lattice. If we have another family of Banach spaces $\{Y_d,\ d \in D\}$ and a family of operators $\{T_d \in \mathcal{L}(X_d, Y_d),\ d \in D\}$ such that $\sup_{d\in D} \|T_d\| < \infty$, then $(T_d)_\mathcal{U} \in \mathcal{L}((X_d)_\mathcal{U}, (Y_d)_\mathcal{U})$ denotes the canonical ultraproduct operator.

Two strong notions of finite representability are included in the following extension of the $\mathcal{L}^p$ spaces due to Lindenstrauss and Pelczyński [7]:

Definition 2.1 *Let $1 \le p, q \le \infty$. We say that a Banach space X is an $\mathcal{L}^{p,q}$ space if for every $F \in FIN(X)$ and every $\varepsilon > 0$ there is $G \in FIN(X)$,* $\dim(G) = n$, *containing F such that $d(G, \ell_p^n\{\ell_q^n\}) \le 1 + \varepsilon$.*

Being an $\mathcal{L}^{p,q}$ space turns out to be very strong a condition with bad stability properties under ultraproducts; therefore, we need a weaker condition:

Definition 2.2 *Let $1 \le p, q \le \infty$. We say that a Banach space X is a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$ space if there are $a > 0$ and $b > 0$ such that for every $M \in FIN(X)$ there are $M_1 \in FIN(X)$ containing M and a b-complemented subspace $H \subset \ell_p\{\ell_q\}$, such that $d(M_1, H) \le a$. Moreover, if X is a Banach lattice, we say that it is a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$ lattice.*

Of course, $\ell_p\{\ell_q\}$ is a *quasi* $\mathcal{L}^{p,q}$ space. Furthermore, from the the following definition of the uniform projection property introduced by Pelczyński and Rosenthal [13] and theorem 9.4 [6], $(\ell_p\{\ell_q\})_\mathcal{U}$ is a *quasi* $\mathcal{L}^{p,q}$ space too.

Definition 2.3 *A Banach space X has the uniform projection property if there is a number $b > 0$ such that for every $k \in \mathbb{N}$ there is $m(k) \in \mathbb{N}$ with the following property: for every $F \in FIN(X)$ with dimension k there is a b-complement subspace $G \in FIN(X)$ containing F with dimension $dim(G) \le m(k)$.*

3 Tensor norm $g_{p\{q\}}$ and its associated operator ideals.

Given a Banach space E, a sequence of sequences $(x_{ij})_{i,j=1}^\infty \subset E$ is strongly $p\{q\}$-summing if $\pi_{p\{q\}}((x_{ij})) := \|(\|x_{ij}\|)\|_{p\{q\}} < \infty$ and it is weakly $p\{q\}$-summing if $\varepsilon_{p\{q\}}((x_{ij})) := \sup_{\|x'\|\le 1} \|(|\langle x_{ij}, x'\rangle|)\|_{p\{q\}} < \infty$.

Let E and F be Banach spaces and $1 \leq p, q < \infty$. For every $z \in E \otimes F$, we define

$$g_{p\{q\}}(z) := \inf\{\pi_{p\{q\}}((x_{ij}))\ \varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij})) \quad / \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \otimes y_{ij}\}.$$

The functional $g_{p\{q\}}$ is a tensor norm for $E \otimes F$. A suitable representation of the elements of a completed tensor product is a basic tool in the study of the operator ideals involved. It can be shown that $z \in E\hat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$ may be represented as $z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ where $\{(x_{ij})_{j=1}^{\infty}, \quad / \quad i \in \mathbb{N}\} \subset E^{\mathbb{N}}, \{(y_{ij})_{j=1}^{\infty}, \quad / \quad i \in \mathbb{N}\} \subset F^{\mathbb{N}}$ and $\pi_{p\{q\}}((x_{ij}))\ \varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij})) < \infty$. Moreover, $g_{p\{q\}}(z) = \pi_{p\{q\}}((x_{ij}))\ \varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij}))$ where the infimum is taken over all representations of z.

There are three important associated operator ideals to $g_{p\{q\}}$, which we define and characterize now.

Definition 3.1 *Let $T \in \mathcal{L}(E, F)$. We say that T is $p\{q\}$-absolutely summing if it exists a real number $C > 0$, such that for all sequence of sequences (x_{ij}) in E, with $\varepsilon_{p\{q\}}((x_{ij})) < \infty$, it satisfies that*

$$\pi_{p\{q\}}((T(x_{ij}))) \leq C\varepsilon_{p\{q\}}((x_{ij})). \tag{1}$$

By $\mathcal{P}_{p\{q\}}(E, F)$, we denote the Banach ideal of the $p\{q\}$-absolutely summing operators $T : E \to F$ endowed with the topology of the norm $\Pi_{p\{q\}}(T) := \inf\{C \geq 0 : C \text{ satisfies } (1)\}$

Theorem 3.2 *Let E, F be Banach spaces, then $\left(E \otimes_{g_{p\{q\}}} F\right)' = \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(F, E')$ isometrically.*

Proof. For all $T \in \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(F, E')$, we define $\varphi_T : E \otimes_{g_{p\{q\}}} F \to \mathbb{R}$ by

$$\langle \varphi_T, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij})\rangle \text{ for every } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E \otimes_{g_{p\{q\}}} F,$$

The definition does not depend on the representation of z used and it can be proved that $\varphi_T \in (E \otimes_{g_{p\{q\}}} F)'$ with $|\langle \varphi_T, z\rangle| \leq \Pi_{p'\{q'\}}(T)\, g_{p\{q\}}(z; E, F)$, and therefore, $\|\varphi_T\| \leq \Pi_{p'\{q'\}}(T)$.

On the other hand, for $\varphi \in \left(E \otimes_{g_{p\{q\}}} F\right)'$, we define $T_\varphi : F \longrightarrow E'$ by

$$\langle T_\varphi(y), x\rangle = \langle \varphi, x \otimes y\rangle\, \forall y \in F,\ x \in E.$$

Then, if $(y_{ij}) \in F^{\mathbb{N}}$ such as $\varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij})) < \infty$, as B_E is weakly dense in $B_{E''}$, given $\epsilon > 0$ and $(\delta_{ij}) \in \ell_{p'}\{\ell_{q'}\}$ with $\|(\delta_{ij})\|_{p'\{q'\}} \leq 1$, for all $i, j \in \mathbb{N}$ there is

$x_{ij} \in E$ such as $\|x_{ij}\| \leq 1$ and $\|T_\varphi(y_{ij})\| \leq |\langle\varphi, x_{ij} \otimes y_{ij}\rangle| + \epsilon\delta_{ij}$ hence

$$\|(\|T_\varphi(y_{ij})\|)\|_{p'\{q'\}} \leq \sup_{\|(\eta_{ij})\|_{p\{q\}} \leq 1} |\sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ij} \langle\varphi, x_{ij} \otimes y_{ij}\rangle| + \epsilon$$

but $\pi_{p\{q\}}((\eta_{ij}x_{ij})) = \|(\|\eta_{ij}x_{ij}\|)\|_{p\{q\}} \leq \|(\eta_{ij})\|_{p\{q\}} \leq 1$ and $\varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij})) < \infty$ then $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ij}x_{ij} \otimes y_{ij} \in E\widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$, hence

$$\|(\|T_\varphi(y_{ij})\|)\|_{p'\{q'\}} \leq \sup_{\|(\eta_{ij})\|_{p\{q\}} \leq 1} \|\varphi\| g_{p\{q\}}(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ij}x_{ij} \otimes y_{ij}) + \epsilon \leq \|\varphi\|\varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij})) + \epsilon$$

and, as ϵ is arbitrary, it follows that $\|(\|T_\varphi(y_{ij}\|)\|_{p'\{q'\}} \leq \|\varphi\|\varepsilon_{p'\{q'\}}((y_{ij}))$ and $\Pi_{p'\{q'\}}(T_\varphi) \leq \|\varphi\|$. ∎

Now, every representation of $z \in E'\hat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$ of the form

$$z = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \otimes y_{ij}$$

defines a map $T_z \in \mathcal{L}(E, F)$ such that for every $x \in E$,

$$T_z(x) := \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_{ij}, x\rangle\, y_{ij}.$$

We remark that all representations of z define the same map T_z. Let $\Phi_{EF} : E'\hat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F \to \mathcal{L}(E, F)$ be defined by $\Phi_{EF}(z) := T_z$.

Definition 3.3 *Let E, F be Banach spaces. An operator $T : E \to F$ is said to be $p\{q\}$- nuclear if $T = \Phi_{EF}(z)$, for some $z \in E'\hat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$.*

$\mathcal{N}_{p\{q\}}(E, F)$ denotes the space of the $p\{q\}$-nuclear operators $T : E \to F$ endowed with the topology of the norm $\mathbf{N}_{p\{q\}}(T) := \inf\{g_{p\{q\}}(z) \ / \ \Phi_{EF}(z) = T\}$.

For every pair of Banach spaces E and F, $(\mathcal{N}_{p\{q\}}(E, F), \mathbf{N}_{p\{q\}})$ is a component of the minimal Banach operator ideal $(\mathcal{N}_{p\{q\}}, \mathbf{N}_{p\{q\}})$ associated to the tensor norm $g_{p\{q\}}$.

We have the following characterization of $p\{q\}$-nuclear operators:

Theorem 3.4 *[4] Let E and F be Banach spaces and let T be an operator in $\mathcal{L}(E, F)$. Then the following statements are equivalent:*

1) T is $p\{q\}$-nuclear.

2) T factors continuously in the following way:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & F \\
\ell_\infty\{\ell_\infty\} \arrow[r, "B"'] & \ell_p\{\ell_q\} \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}
$$

where B is a diagonal multiplication operator defined by a positive sequence $((b_{ij})) \in \ell_p\{\ell_q\}$.

Furthermore $\mathbf{N}_{p\{q\}}(T) = \inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$*, taking it over all such factors.*

The normed ideal of $p\{q\}$-integral operators $(\mathcal{I}_{p\{q\}}, \mathbf{I}_{p\{q\}})$ is the maximal operator ideal associated to the tensor norm $g_{p\{q\}}$ in the sense of Defant and Floret [2], which coincides with the maximal normed associated operator ideal to the normed ideal of $p\{q\}$-nuclear operators in the sense of Pietsch [14]. From [2], for every pair of Banach spaces E and F, an operator $T : E \to F$ is $p\{q\}$-integral if and only if $J_F T \in (E \otimes_{g'_{p\{q\}}} F')'$.

Given Banach spaces E, F, we define the finitely generated tensor norm $g'_{p\{q\}}$ such that if $M \in FIN(E)$ and $N \in FIN(F)$, for every $z \in M \otimes N$,

$$g'_{p\{q\}}(z; M \otimes N) := \sup\left\{ |\langle z, w\rangle| \;/\; g_{p\{q\}}(w; M' \otimes N') \leq 1 \right\}.$$

We remark that $E' \otimes_{g_{p\{q\}}} F'$ is an isometric subspace of $(E \otimes_{g'_{p\{q\}}} F)'$ because $g_{p\{q\}}$ is finitely generated, see [2], 15.3.

In this case, we define $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)$ to be the norm of $J_F\, T$ considered as an element of the topological dual of the Banach space $E \otimes_{g'_{p\{q\}}} F'$. Notice that $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T) = \mathbf{I}_{p\{q\}}(J_F\, T)$ as a consequence of F' be canonically complemented in F'''.

An essential example of $p\{q\}$-integral operators is given in the following theorem:

Theorem 3.5 *Let $1 < p, q < \infty$ and let G be an abstract M-space. Then every order bounded operator $T : G \to \ell_p\{\ell_q\}$ is $p\{q\}$-integral with $\boldsymbol{I}_{p\{q\}}(T) = \|T\|$.*

Proof. As G is an abstract M-space, its dual G' is lattice isomorphic to $L_1(\mu)$ for some measure space (Ω, Σ, μ) and hence there is an isometric order isomorphism $B : G'' \to L_\infty(\mu)$ from the bidual G'' onto $L_\infty(\mu)$. Noting that $T = T''\, B^{-1}\, B\, J_G$ with $T''\, B^{-1} : L_\infty(\mu) \to \ell_p\{\ell_q\}$, it is enough to see that every bounded operator $S : L_\infty(\mu) \longrightarrow \ell_p\{\ell_q\}$ is $p\{q\}$-integral. Let $\mathcal{T}$ be the linear span of the set $\{\mathbf{e}_{ij},\, i, j \in \mathbb{N}\}$ which is dense in $\ell_p\{\ell_q\}$. Then, by the representation theorem of maximal operator ideals (see 17.5 in [2]) and the density lemma (theorem 13.4 in [2]), we only have to show that $S \in (L_\infty(\mu) \otimes_{g'_{p\{q\}}} \mathcal{T})'$.

Given $z \in L_\infty(\mu) \otimes_{g'_{p\{q\}}} \mathcal{T}$ and $\varepsilon > 0$, let X and Y be finite dimensional subspaces of $L_\infty(\mu)$ and $\mathcal{T}$ respectively such that $z \in X \otimes Y$ and

$$g'_{p\{q\}}(z; X \otimes Y) \leq g'_{p\{q\}}(z; L_\infty(\mu) \otimes \mathcal{T}) + \varepsilon. \tag{2}$$

Let $\{\mathbf{g}_s\}_{s=1}^m$ be a basis for Y and let $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ be such that

$$\mathbf{g}_s = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} c_{sij} \mathbf{e}_{ij} \text{ for every } 1 \leq s \leq m.$$

Then for every $f \in X$ and $1 \leq s \leq m$

$$\begin{aligned} \langle S, f \otimes \mathbf{g}_s \rangle &= \langle f, S'(\mathbf{g}_s) \rangle = \left\langle f, \left(\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} c_{sij} \right) S'(\mathbf{e}_{ij}) \right\rangle \\ &= \left\langle f \otimes \sum_{t=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{k_2} c_{stl}\, \mathbf{e}_{tl}, \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} S'(\mathbf{e}_{ij}) \otimes \mathbf{e}_{ij} \right\rangle. \end{aligned}$$

Then if U denotes the tensor

$$U := \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} S'(\mathbf{e}_{ij}) \otimes \mathbf{e}_{ij} \in L_\infty(\mu)' \otimes \ell_p\{\ell_q\},$$

by bylinearity we get for all $z \in X \otimes Y$ $\langle z, S \rangle = \langle U, z \rangle$.

Given $\nu > 0$, for every $1 \leq i \leq k_1$ and $1 \leq j \leq k_2$ there is $f_{ij} \in L_\infty(\mu)$ such that $\|f_{ij}\| \leq 1$ and $\|S'(\mathbf{e}_{ij})\| \leq |\langle S'(\mathbf{e}_{ij}), f_{ij} \rangle| + \nu$. Then $f := \sup_{1 \leq i \leq k_1} \sup_{1 \leq j \leq k_2} f_{ij}$ lies in the closed unit ball of $L_\infty(\mu)$. On the other hand, we know that $\ell_p\{\ell_q\}$ is order complete. By the Riesz-Kantorovich theorem (see theorem 1.13 in [1] for instance), the modulus $|S|$ of the operator S exists in

$\mathcal{L}(L_\infty(\mu), \ell_p\{\ell_q\})$. By the lattice properties of $\ell_p\{\ell_q\}$, we have

$$\begin{aligned}
\pi_{p\{q\}}((S'(e_{ij})) &= \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \|S'(\mathbf{e}_{ij})\| \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} |\langle S'(\mathbf{e}_{ij}), f_{ij}\rangle| \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} |\langle S(f_{ij}), \mathbf{e}_{ij}\rangle| \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \langle |S(f_{ij})|, \mathbf{e}_{ij}\rangle \right\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \langle |S|(|f_{ij}|), \mathbf{e}_{ij}\rangle \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \langle |S|(|f|), \mathbf{e}_{ij}\rangle \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&= \| \, |S|(|f|)\|_{p\{q\}} + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} \\
&\leq \| \, |S| \, \| + \nu \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p\{q\}} .
\end{aligned}$$

Moreover

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{p'\{q'\}}(((\mathbf{e}_{ij})_{i=1}^{k_1})_{j=1}^{k_2}) &= \sup_{\|(\beta_{tl})\|_{p'\{q'\}} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \langle \mathbf{e}_{ij}, (\beta_{tl})\rangle \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p'\{q'\}} \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \beta_{ij} \, \mathbf{e}_{ij} \right\|_{p'\{q'\}} \leq 1.
\end{aligned}$$

Hence, denoting by I_X and I_Y the corresponding inclusion maps into $L_\infty(\mu)$ and $\ell_p\{\ell_q\}$ respectively, we have

$$\begin{aligned}
|\langle S,z\rangle| &= |\langle U,z\rangle| = |\langle U,((I_X)'\otimes(I_Y)')(z)\rangle| \\
&\le g_{p\{q\}}(U;X\otimes Y)\; g'_{p\{q\}}(((I_X)'\otimes(I_Y)')(z);X'\otimes Y') \\
&\le g_{p\{q\}}(U;X\otimes Y)\; g'_{p\{q\}}(((I_X)'\otimes(I_Y)')(z);X'\otimes Y') \\
&\le (g_{p\{q\}}(U;L_\infty\otimes\ell_p\{\ell_q\})+\varepsilon)g'_{p\{q\}}(z;L_\infty(\mu)\otimes\ell_{p'}\{\ell_{q'}\}) \\
&\le g'_{p\{q\}}(z;L_\infty(\mu)\otimes\ell_{p'}\{\ell_{q'}\}\})\ \left(\pi_{p\{q\}}((S'(\mathbf{e}_{ij}))\ \varepsilon_{p'\{q'\}}((\mathbf{e}_{ij}))+\varepsilon\right) \\
&\le g'_{p\{q\}}(z;L_\infty(\mu)\otimes\ell_{p'}\{\ell_{q'}\}\})\left(\|\,|S|\,\|+\nu\left\|\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2}\mathbf{e}_{ij}\right\|_{p\{q\}}+\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

and ν being arbitrary $|\langle S,z\rangle|\le g'_{p\{q\}}(z;L_\infty(\mu)\otimes\ell_{p'}\{\ell_{q'}\})(\|\,|S|\,\|+\varepsilon)$. Finally, by the arbitrariness of ε, we get

$$|\langle S,z\rangle|\le g'_{p\{q\}}(z;L_\infty(\mu)\otimes\ell_{p'}\{\ell_{q'}\})\ \|\,|S|\,\|.$$

But from [1] theorem 1.10, $|S|(\chi_\Omega)=\sup\{|S(f)|,|f|\le\chi_\Omega\}$ and as $\ell_p\{\ell_q\}$ is order continuous

$$\|\,|S|\,\|=\|\,|S|(\chi_\Omega)\|=\sup\{\|\,|S(f)|\,\|,\|f\|\le 1\}=\|S\|.$$

Then S is $p\{q\}-$integral with $\mathbf{I}_{p\{q\}}(S)\le\|S\|$. As $(\mathcal{I}_{p\{q\}},\mathbf{I}_{p\{q\}})$ is a Banach operators ideal, $\|S\|\le\mathbf{I}_{p\{q\}}(S)$, hence $\mathbf{I}_{p\{q\}}(S)=\|S\|$. ∎

Corollary 3.6 *Let G be an abstract M-space with unit. Then every operator $T:G\to\ell_p^n\{\ell_q^m\}$ is $p\{q\}$-integral with $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)=\|T\|$.*

Proof. The results follows easily from theorem 3.5 because every operator $T:G\to\ell_p^n\{\ell_q^m\}$ is order bounded and $\ell_p^n\{\ell_q^m\}$ is order continuous. ∎

For our next theorem, we need a very deep technical result due to Lindenstrauss and Tzafriri [9] which gives us a kind of "uniform approximation" of finite dimensional subspaces by finite dimensional sublattices in Banach lattices.

Lemma 3.7 *Let $\varepsilon>0$ and $n\in\mathbb{N}$ be fixed. There is a natural number $h(n,\varepsilon)$ such that for every Banach lattice X and every subspace $F\subset X$ of dimension $\dim(F)=n$ there are $h(n,\varepsilon)$ disjoints elements $\{z_i,\ 1\le i\le h(n,\varepsilon)\}$ and an operator A from F into the linear span G of $\{z_i,\ 1\le i\le h(n,\varepsilon)\}$ such that for every $x\in F$ $\|A(x)-x\|\le\varepsilon\,\|x\|$*

Theorem 3.8 *For $1\le p,q<\infty$, G an abstract M-space, and X a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$ space or a complemented subspace of a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$ space. Then every operator $T:G\longrightarrow X$ is $p\{q\}$-integral and there is a constant $K>0$ such that $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)\le K\,\|T\|$.*

Proof. By the representation theorem of maximal operator ideals (see 17.5 in [2]), if J_X is the inclusion map of X into X'', we only need to show that $J_X T \in (G \otimes_{g'_{p\{q\}}} X')'$.

Given $z \in G \otimes X'$ and $\varepsilon > 0$, let $M \subset G$ and $N \subset X'$ be finite dimensional subspaces, and let $z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes x'_i$ be a fixed representation of z with $f_i \in M$ and $x'_i \in N$, $i = 1, 2, .., n$ such that

$$g'_{p\{q\}}(z; G \otimes X') \leq g'_{p\{q\}}(z; M \otimes N) \leq g'_{p\{q\}}(z; G \otimes X') + \varepsilon.$$

By lemma 3.7, we obtain a finite dimensional sublattice M_1 of G and an operator $A : M \to M_1$ so that for every $f \in M$, $\|A(f) - f\| \leq \varepsilon \|f\|$. Then, if id_G denotes the identity map on G, we have

$$|\langle T, z\rangle| = \left|\sum_{i=1}^n \langle T(f_i), x'_i\rangle\right| \leq \left|\sum_{i=1}^n \langle\ (id_G - A)(f_i), x'_i\rangle\right| + \left|\sum_{i=1}^n \langle T\ A(f_i), x'_i\rangle\right|$$

$$\leq \varepsilon \|T\| \sum_{i=1}^n \|f_i\|\ \|x'_i\| + \left|\sum_{i=1}^n \langle T\ A(f_i), x'_i\rangle\right|.$$

Put $X_1 := T(M_1)$. By hypothesis, X is a *quasi*-$\mathcal{L}^{p,q}$-space. Hence, there are a finite dimensional subspace X_2 of X, some complemented finite dimensional subspace H of $\ell_p\{\ell_q\}$ with projection $P_H : \ell_p\{\ell_q\} \to H$ such that $\|P_H\| \leq b$ for some $b > 0$, and an isomorphism $V : X_2 \longrightarrow H$ such that $X_1 \subset X_2$ and $\|V\|\ \|V^{-1}\| \leq a$ for some positive real constant a. Let $I_{X_1} : X_1 \longrightarrow X_2$ be the inclusion map. To simplify notation, we denote $R : M_1 \longrightarrow H$ such that $R := V\ I_{X_1}\ T$. Let $K_2 : X''' \longrightarrow X'_2 = X'''/X_2^\circ$ be the canonical quotient map. Then

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle T\ (A(f_i)), x'_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle I_{X_1}\ T\ (A(f_i)), K_2(x'_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle V^{-1}\ V\ I_{X_1}\ T\ (A(f_i)), K_2(x'_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle R\ A(f_i), (V^{-1})' K_2(x'_i)\rangle \\
&= \left\langle R, \sum_{i=1}^n A(f_i) \otimes (V^{-1})'\ K_2(x'_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

with $\sum_{i=1}^n A(f_i) \otimes (V^{-1})'\ K_2(x'_i) \in M_1 \otimes H'$. As $\ell_p\{\ell_q\}$ is an $\mathcal{L}^{p,q}$ space, H is contained in some r-dimensional subspace W of $\ell_p\{\ell_q\}$ such that $d(W, \ell_p^r\{\ell_q^r\}) < 1 + \varepsilon$.

We denote I_H the inclusion of H in W and by $C : W \to \ell_p^r\{\ell_q^r\}$ such that $\|C\|\|C^{-1}\| \le 1+\varepsilon$.

Since M_1 is an abstract M-space with unit, the map $C\ I_H\ R\ : M_1 \to \ell_p^r\{\ell_q^r\}$ is order bounded by corollary 3.6, hence $\mathbf{I}_{p\{q\}}(CI_HR) \le \|C\|\|R\| \le \|C\|\|V\|\|T\|$. Then, as

$$R = (P_H)_{|W}\ C^{-1}\ C\ I_H\ R,$$

R is again $p\{q\}$-integral with $\mathbf{I}_{p\{q\}}(R) \le \|P_H\|\ \|C^{-1}\|\ \|C\|\ \|V\|\ \|T\| \le (1+\varepsilon)\ b\ \|V\|\ \|T\|$. Therefore,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\langle T\ (A(f_i)), x_i'\rangle\right| = \left|\left\langle R, \sum_{i=1}^{n} A(f_i)\otimes (V^{-1})'\ K_2(x_i')\right\rangle\right| \le$$

$$\le \mathbf{I}_{p\{q\}}(R)\ g_{p\{q\}}(\sum_{i=1}^{n} A(f_i)\otimes (V^{-1})'\ K_2(x_i'); M_1\otimes H') \le$$

$$\le (1+\varepsilon)\ b\ \|V\|\ \|T\|\ g_{p\{q\}}\left((A\otimes (V^{-1})'\ K_2)(z); M_1\otimes H'\right) \le$$

$$\le (1+\varepsilon)\ b\ \|V\|\ \|T\|\ \|A\|\ \|(V^{-1})'\|\ \|K_2\|\ g_{p\{q\}}(z; M\otimes N) \le$$

$$\le (1+\varepsilon)^2\ a\ b\ \|T\|\ g_{p\{q\}}(z; M\otimes N) \le (1+\varepsilon)^2\ a\ b\ \|T\|\ (g_{p\{q\}}(z; G\otimes X)+\varepsilon)$$

and by the arbitrariness of $\varepsilon > 0$ we obtain

$$|\langle T, z\rangle| \le a\, b\, \|T\|\ \ g'_{p\{q\}}\,(z; G\otimes X')\,.\blacksquare$$

Concerning necessary conditions for an operator to be $p\{q\}$-integral we have:

Theorem 3.9 *[4] Let $1 \le p, q < \infty$. For every pair of Banach spaces E, F if $T \in \mathcal{I}_{p\{q\}}(E,F)$ then $J_F T$ factors as:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "J_F T"] \arrow[d, "A"'] & & F'' \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "B"'] & & X \arrow[u, "C"'] \end{tikzcd}$$

where X is some ultrapower $(\ell_p\{\ell_q\})_{\mathcal{U}_1}$ of $\ell_p\{\ell_q\}$ and B is a lattice homomorphism. Moreover $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T) \ge \inf \|C\|\ \|B\|\ \|A\|$ taking the infimum over all such factorizations.

Theorem 3.10 *Let $1 \leq p, q < \infty$ and let E and F be Banach spaces. The following statements are equivalent:*

1) $T \in \mathcal{I}_{p\{q\}}(E, F)$.

2) $J_F T$ factors continuously is:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "J_F\, T"] \arrow[d, "A"'] & F'' \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "B"'] & X \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}$$

where X is a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$-space. Furthermore, the norm $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)$ is equal to $\inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$, *taking the infimum over all such factorizations.*

3) $J_F T$ factors continuously in the following way:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "J_F\, T"] \arrow[d, "A"'] & F'' \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "B"'] & X \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}$$

where X is a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$-lattice and B is a lattice homomorphism. Furthermore $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)$ is equal to $\inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$, *taking the infimum over all such factorizations.*

4) It exists a σ-finite measure space $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \nu)$ and a Köthe function space $\mathcal{K}(\nu)$ which is complemented in a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$, such that $J_F T$ factors continuously in the following way:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "J_F\, T"] \arrow[d, "A"'] & F'' \\
L_\infty(\nu) \arrow[r, "B"'] & \mathcal{K}(\nu) \arrow[u, "C"']
\end{tikzcd}$$

where B is a multiplication operator for a positive function of $\mathcal{K}(\nu)$. Furthermore, $\mathbf{I}_{p\{q\}}(T)$ is equal to $\inf\{\|C\|\|B\|\|A\|\}$, *taking the infimum over all such factorizations.*

Proof. For 1) $\Leftrightarrow$ 2) and 1) $\Leftrightarrow$ 3), we remember that $(\ell_p\{\ell_q\})_{\mathcal{U}}$ is a *quasi* $\mathcal{L}^{p,q}$ space, and we use theorems 3.9 and 3.8. For 1) $\Leftrightarrow$ 4), we have to keep in mind that $\ell_p\{\ell_q\}$ has finite cotype; hence, every ultrapower of $\ell_p\{\ell_q\}$ is order continuous (Henson and Moore, [5], 4.6), and by [8] theorem 1.a.9, it may be decomposed into an unconditional direct sum of a family of mutually disjoint ideals $\{X_h, h \in H\}$ having a positive weak unit. Then, from 1.b.14 in [8], as every X_h is order isometric to a Köthe function space defined on a probability space $(\mathcal{O}_h, \mathcal{S}_h, \nu_h)$, then $(\ell_p\{\ell_q\})_{\mathcal{U}}$ is order isometric to a Köthe function space $\mathcal{K}(\nu^1)$ on a measure space $(\mathcal{O}^1, \mathcal{S}^1, \nu^1)$, hence we may replace $(\ell_p\{\ell_q\})_{\mathcal{U}}$ by $\mathcal{K}(\nu^1)$ in 2). If we denote $z := B(\chi_\Omega)$ as $z = \sum_{i=1}^{\infty} y_{h_i}$ with $y_{h_i} \in X_{h_i}$ for every $i \in \mathbb{N}$, then $B(L_\infty(\mu))$ is contained in the unconditional direct sum of $\{X_{h_i}, i \in \mathbb{N}\}$ which is order isometric to a Köthe function space $\mathcal{K}(\nu)$ on a σ-finite measure space $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \nu)$, which is 1-complemented in $\mathcal{K}(\nu^1)$.

Finally, as $\mathcal{K}(\nu)$ is order complete, it exists $g := \sup_{\|f\|_{L_\infty(\mu)}} B(f)$ in $\mathcal{K}(\nu)$. Then, the operators $B_1 : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ and $B_2 : L_\infty(\nu) \to \mathcal{K}(\nu)$, defined as $B_1(f)(\omega) := B(f)(\omega)/g(\omega)$, for all $f \in L_\infty(\mu)$, $\omega \in \mathcal{O}$ with $g(\omega) \neq 0$ and $B_1(f)(\omega) = 0$ otherwise, and $B_2(h)(\omega) := g(\omega)h(\omega)$ for all $h \in L_\infty(\nu)$, $\omega \in \mathcal{O}$, satisfy $B = B_2B_1$ and B_2 is a multiplication operator by a positive element $g \in \mathcal{K}(\nu)$. ■

4 Coincidence between $p\{q\}$-nuclear and $p\{q\}$-integral operators.

For $1 \leq p, q < \infty$, we introduce a new operator ideal, which is contained in the ideal of the $p\{q\}$-integral operators .

Definition 4.1 *Let $1 \leq p, q < \infty$. We say that $T \in \mathcal{L}(E, F)$ is* ***strictly $p\{q\}$-integral*** *if a σ-finite measure space $(\mathcal{O}, \mathcal{S}, \nu)$ and a Köthe function space $\mathcal{K}(\nu)$ exist which is complemented in some quasi $\mathcal{L}^{p,q}$ space, such that T factors continuously in the following way:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & F \\ L_\infty(\nu) \arrow[r, "B"'] & \mathcal{K}(\nu) \arrow[u, "C"'] \end{tikzcd}$$

where B is a multiplication operator for a positive function of $\mathcal{K}(\nu)$.

We denote by $\mathcal{SI}_{p\{q\}}(E,F)$ the set of the strictly $p\{q\}$-integral operators between E and F which is closed subspace of $\mathcal{I}_{p\{q\}}(E,F)$ and $\mathbf{SI}_{p\{q\}}(T) = \mathbf{I}_{p\{q\}}(T)$ for every $T \in \mathcal{SI}_{p\{q\}}(E,F)$. It is clear that if F is a dual space, or it is complemented in its bidual space, then $\mathcal{SI}_{p\{q\}}(E,F) = \mathcal{I}_{p\{q\}}(E,F)$.

Theorem 4.2 *Let $1 \leq p,q < \infty$, and let E and F be Banach spaces, such that E' satisfies the Radon-Nikodým property, then $\mathcal{N}_{p\{q\}}(E,F) = \mathcal{SI}_{p\{q\}}(E,F)$.*

Proof. We suppose that E' has the Radon-Nikodým property and let $T \in \mathcal{SI}_{p\{q\}}(E,F)$.

a) We suppose that B is a multiplication operator by a function $g \in \mathcal{K}(\nu)$ with support on D, a set of finite measure. We denote ν_D the restriction of ν to D.

As $(\chi_D A) : E \to L_\infty(\nu_D)$, then $(\chi_D A)' : (L_\infty(\nu_D))' \to E'$ and the restriction of $(\chi_D A)' \restriction_{L_1(\nu_D)}: L_1(\nu_D) \to E'$, thus, for every $x \in E$ and $f \in L_1(\nu_D)$

$$\langle x, (\chi_D A)'(f)\rangle = \langle \chi_D A(x), f\rangle = \int_D \chi_D A(x)\, f d(\nu_D).$$

As E' has the Radon-Nikodým property, applying theorem III(5) of [3], we have that $(\chi_D A)'$ has a Riesz representation; therefore, it exists a function $\phi \in L_\infty(\nu_D, E')$ such that for every $f \in L_1(\nu_D)$

$$(\chi_D A)'(f) = \int_D f\phi d(\nu_D).$$

Then, for every $x \in E$, we have that $\chi_D A(x)(t) = \langle \phi(t), x\rangle$, ν_D-almost everywhere in D, and then $B(\chi_D A)(x) =< g\phi(.), x >$, ν_D-almost everywhere in D. We denote by $g\phi$ this last operator, and we can consider it as an element of $\mathcal{K}(\nu_D, E')$.

Now, as the simple functions are dense in $\mathcal{K}(\nu_D, E')$, $g\phi$ can be approximated by a sequence of simple functions $(S_k)_{k=1}^\infty$.

We suppose $S_k = \sum_{j=1}^{m_k} x'_{kj}\chi_{A_{kj}}$, where $\{A_{ki} : i = 1, .., m\}$ is a family of pairwise disjoint ν-measurable sets of Ω . For each $k \in \mathbb{N}$, we can interpret S_k as a map $S_k : E \to \mathcal{K}(\nu)$ such that $S_k(x) = \sum_{j=1}^{m_k} < x'_{kj}, x > \chi_{A_{kj}}$ with norm less than or equal to the norm of S_k in $\mathcal{K}(\nu, E')$.

Obviously, for all $k \in \mathbb{N}$, S_k is $p\{q\}$-nuclear because it has finite rank , but we need to evaluate its $p\{q\}$-nuclear norm $\mathbf{N}_{p\{q\}}(S_k)$ which coincides with its $p\{q\}$-integral norm $\mathbf{I}_{p\{q\}}(S_k)$.

Let $S_k^1 : E \to L_\infty(\nu)$ be defined as $S_k^1(x) := \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\langle x'_{kj}, x\rangle}{\|x'_{kj}\|}\chi_{A_{kj}}$ and $S_k^2 : L_\infty(\nu) \to \mathcal{K}(\nu)$ as $S_k^2(f) := \sum_{j=1}^{m_k} \|x'_{kj}\| f\chi_{A_{kj}}$. It is easy to see that $\|S_k^1\| \leq 1$, $\|S_k^2\| \leq \|S_k\|_{\mathcal{K}(\nu,E')}$ and $S_k = S_k^2\, S_k^1$.

As $\mathcal{K}(\nu)$ is a complemented subspace of a quasi $\mathcal{L}^{p,q}$, from 3.8, there is $K > 0$ such that $\mathbf{N}_{p\{q\}}(S_k^2) = \mathbf{I}_{p\{q\}}(S_k^2) \leq K\ \|S_k^2\| \leq K\ \|S_k\|_{\mathcal{K}(\nu,E')}$, hence

$\mathbf{N}_{p\{q\}}(S_k) \leq K \, \|S_k\|_{\mathcal{K}(\nu,E')}$. Then, as $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ converges in $\mathcal{K}(\nu_D, E')$, it is a Cauchy sequence in the complete space $\mathcal{N}_{p\{q\}}(E, \mathcal{K}(\nu_D))$, so $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ converges to $g\phi$, i.e., $g\phi \in \mathcal{N}_{p\{q\}}(E, \mathcal{K}(\nu_D))$. Therefore, $g\phi = B\chi_D A$ is $p\{q\}$-nuclear and so is T.

b) If g is any element of $\mathcal{K}(\nu)$, it can be approximated in norm by means of a sequence $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ of simple functions with finite measure support therefore, by a), the sequence $T_n = CB_{t_n}A$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{N}_{p\{q\}}(E, F)$ converging to T in $\mathcal{L}(E, F)$, and then $T \in \mathcal{N}_{p\{q\}}(E, F)$. ■

As a consequence of the former result and the factorization theorems 3.10 and 3.4, we obtain the following metric properties of $g_{p\{q\}}$ and $(g_{p\{q\}})'$.

Theorem 4.3 *$(g_{p\{q\}})'$ is a totally accessible tensor norm.*

Proof. As $(g_{p\{q\}})'$ is finitely generated, it is sufficient to prove that the map $F \otimes_{(g_{p\{q\}})'} E \hookrightarrow \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E', F'')$ is an isometry.

In fact, let $z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} \otimes x_{ij} \in F \otimes_{(g_{p\{q\}})'} E$, and let $H_z \in \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E', F'')$ be the canonical map associated to z,

$$H_z(x') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} \langle x_{ij}, x' \rangle \, y_{ij}$$

for all $x' \in E'$, where $H_z \in \mathcal{L}(E', F) \subset \mathcal{L}(E', F'')$.

Applying theorem 15.5 of [2] with $\alpha = (g_{p\{q\}})'$, theorem 3.2, and the equality $(g_{p\{q\}})'' = g_{p\{q\}}$, since $g_{p\{q\}}$ is finitely generated, the inclusion

$$F \otimes_{\overleftarrow{(g_{p\{q\}})'}} E \hookrightarrow \left(F' \otimes_{g_{p\{q\}}} E'\right)' \to \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E', F'')$$

is an isometry, therefore by proposition 12.4 in [2], we obtain

$$\Pi_{p'\{q'\}}(H_z) = \overleftarrow{(g_{p\{q\}})'}(z; F \otimes E) \leq (g_{p\{q\}})'(z; F \otimes E).$$

On the other hand, given N, a finite dimensional subspace of F such that $z \in N \otimes_{(g_{p\{q\}})'} E$, there exists $V \in (N \otimes_{(g_{p\{q\}})'} E)' = \mathcal{I}_{p\{q\}}(N, E')$ such that $\mathbf{I}_{p\{q\}}(V) \leq 1$ and $(g_{p\{q\}})'(z; N \otimes E) = \langle z, V \rangle$. Clearly enough $V \in \mathcal{SI}_{p\{q\}}(N, E') = \mathcal{I}_{p\{q\}}(N, E')$ because E' is a dual space, and N', being finite dimensional, has the Radon-Nikodým property. Therefore by theorem 4.2, $V \in \mathcal{N}_{p\{q\}}(N, E')$ and by theorem 3.4, given $\varepsilon > 0$, there is a factorization of V of the form

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "V"] \arrow[d, "A"'] & E' \\ \ell_\infty\{\ell_\infty\} \arrow[r, "B"'] & \ell_p\{\ell_q\} \arrow[u, "C"'] \end{tikzcd}$$

such that $\|C\|\|B\|\|A\| \le \mathbf{N}_{p\{q\}}(V) + \varepsilon = \mathbf{I}_{p\{q\}}(V) + \varepsilon \le 1 + \varepsilon$.

As $\ell_\infty\{\ell_\infty\}$ has the extension metric property, (see proposition 1, C.3.2. in [14]), A may be extended to a continuous map $\overline{A} \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty\{\ell_\infty\})$ such that $\|\overline{A}\| = \|A\|$. By theorem 3.4 again, $W := CB\overline{A}$ is in $\mathcal{N}_{p\{q\}}(F, E')$, so there is a representation $w =: \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty y'_{ij} \otimes x'_{ij} \in F' \widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}} E'$ of W satisfying

$$\sum_{i=1}^\infty \pi_{p\{q\}}\left(\left(y'_{ij}\right)\right) \varepsilon_{p'\{q'\}}\left(\left(x'_{ij}\right)\right) \le \mathbf{N}_{p\{q\}}(W) + \varepsilon \le \|C\| \|B\| \|\overline{A}\| + \varepsilon \le 1 + 2\varepsilon.$$

Then, $(g_{p\{q\}})'(z; F \otimes E) \le (g_{p\{q\}})'(z; N \otimes E) = \langle z, V\rangle = \langle z, W\rangle$ and it follows that

$$(g_{p\{q\}})'(z; F \otimes E) \le g_{p\{q\}}(w)\Pi_{p'\{q'\}}(H_z) \le (1 + 2\varepsilon)\Pi_{p'\{q'\}}(H_z)$$

whence $(g_{p\{q\}})'(z; F \otimes E) \le \Pi_{p'\{q'\}}(H_z)$, and the equality becomes obvious. ■

Corollary 4.4 *$g_{p\{q\}}$ is an accesible tensor norm.*

Proof. It is a direct consequence of the former theorem and proposition 15.6 of [2].■

In the following theorem, related to the approximation property, we have to keep in mind that every $p\{q\}$-absolutely summing operator T is a p-summing operator with the Saphar's tensor norm g_p , and therefore, it is absolutely continuous according to Niculescu's definition.

Theorem 4.5 *Let E, F be Banach spaces such that E' has the approximation property and E does not contain a copy of ℓ_1. Then $\mathcal{F}(E, F)$ is dense in $\mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E, F)$.*

Proof. Let $T \in \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E, F)$. Then, T is absolutely continuous, and by theorem 2.2. in Niculescu [12], as E contains no isomorphic copy of ℓ_1, T is compact. Finally, as E' has the approximation property, by proposition 5.3 (2) in [2], $T \in E' \widehat{\otimes}_\varepsilon F = \overline{\mathcal{F}}(E, F)$. ■

Theorem 4.6 *If F has the approximation property, then $E\widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$, $E\otimes_{g'_{p\{q\}}}F$, $\mathcal{N}_{p\{q\}}(E,F)$, $\mathcal{P}_{p'\{q'\}}(E,F)$ and $\mathcal{I}_{p\{q\}}(E,F)$ are reflexive if and only if E y F are reflexive.*

Proof. The necessity part is evident. For the sufficiency, suppose that E and F are reflexive. As F is reflexive and it has the approximation property, it does not contain a copy of ℓ_1 and by corollary 9 (p. 244) of [3] F' has the approximation property. Then, applying theorems 4.5 and 3.2

$$\left(E\widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F\right)' = \mathcal{P}_{p'\{q'\}}(F,E') = E'\widehat{\otimes}_{g'_{p\{q\}}}F'.$$

By corollary 4 (pg. 82) of [3], it follows that E'' has the Radon-Nikodym property and then, by theorems, 4.2 and 4.3

$$\left(E'\widehat{\otimes}_{g'_{p\{q\}}}F'\right)' = \mathcal{I}_{p\{q\}}(E',F) = \mathcal{SI}_{p\{q\}}(E',F) = \mathcal{N}_{p\{q\}}(E',F).$$

As F has the approximation property, by corollary 1, 22.2 of [2], the equality

$$\mathcal{N}_{p\{q\}}(E',F) = E\widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$$

follows. Then $E\widehat{\otimes}_{g_{p\{q\}}}F$, and therefore, all the spaces, as stated in the theorem, are reflexive. ■

References

[1] Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O.: *Positive operators.* Pure and Applied Mathematics 119. Academic Press, Newe York, (1985).

[2] Defant, A.-Floret, K.: *Tensor norms and operator ideals.* North Holland Math. Studies. North Holland. Amsterdam. 1993.

[3] Diestel, J. and Uhl, J. J. Jr.: *Vector measures.* Mathematical Surveys and Monographs. Number 15. American Mathematical Society. USA. 1977.

[4] Gómez Palacio, P., López Molina, J.A., Rivera, M.J. *Some applications of the lattice finite representability in spaces of measurable functions.* Turk. J. Math. **25**(2001), 475-490.

[5] Haydom, R., Levy, M., Raynaud, Y.: *Randomly normed spaces.* Hermann. 1991.

[6] Heinrich, S.: *Ultraproducts in Banach spaces theory.* J. Reine Angew. Math. 313,72-104. 1980.

[7] Lindenstrauss, J. and Pelczyǹnski., A.: *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications.* Studia Math. 29, 275-326. 1968.

[8] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L.: *Classical Banach spaces I and II.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[9] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.: *The uniform approximation property in Orlicz spaces*, Israel J. Math. 23,2, 142-155,(1976).

[10] López Molina, J.A., Rivera, M. J.: *Characterization of the minimal and maximal operator ideals associated to the tensor norm defined by a sequence space.* (2002).

[11] Maurey, B., Pisier, G.: *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des spaces de Banach*, Studia Math. 58, 45-90, 1976.

[12] Niculescu, C.P.: *Absolute continuity in Banach space theory*, Rev. Roum. Math. pures et appl., XXIV, 3, 413-422, Bucarest, 1979.

[13] Pelczyński, A., Rosenthal, H. P.: *Localization techniques in L^p spaces,* Studia Math. 52,263-289, (1975).

[14] Pietsch, A.: *Operator ideals.* North Holland Math. Library. North Holland. Amsterdam. 1980.

P. Gómez Palacio
Universidad EAFIT
Departamento de Ciencias Básicas
Carrera 49 n- 7 sur-50 Medellín. Colombia.
e-mail: pagomez@eafit.edu.co

J.A. López Molina and M.J. Rivera
Universidad Politécnica de Valencia
E.T.S. Ingenieros Agrónomos
Camino de Vera 46072 Valencia. Spain.
e-mails: jalopez@mat.upv.es, mjrivera@mat.upv.es

On the stability of some fixed point iteration procedures with errors

J. O. Olaleru and A. A. Mogbademu

Abstract. Several results have been obtained on the stability of Mann, Ishikawa and Kirk iteration procedures (without errors) when dealing with different classes of quasi-contractive operators. In this paper, we consider the stability of Mann, Ishikawa and Kirk iteration procedures *with errors* and show that they are *almost stable* with respect to some classes of quasi-contractive maps. The results obviously generalise the results of several authors.

Resumen. Varios resultados se han obtenido sobre la estabilidad del proceso de iteración de Mann, Ishikawa y Kirk (sin errores) cuando se trata con clases diferentes de operadores cuasi-contractivos. En este trabajo, consideramos la estabilidad del proceso de la iteración de Mann, Kirk Ishikawa con errores y se prueba que son semi estable con respecto a algunas clases de mapas cuasi-contractivo. Los resultados, obviamente, generalizar los resultados de varios autores.

1. Introduction

Suppose X is a normed linear space and T is a self map of X. Suppose $x_o \in X$ and $x_{n+1} = f(T, x_n)$ defines an iteration procedure which yields a sequence of points $\{x_n\}$ in X. Suppose $F(T) = \{x \in X | Tx = x\} \neq \phi$ and that $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges strongly to $p \in F(T)$. Suppose $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$is a sequence in X and $\{\epsilon_n\}$ is a sequence in $[0, \infty)$ given by $\epsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|$. If $lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ implies that $lim_{n\to\infty}y_n = p$, then the iteration procedure defined by $x_{n+1} = f(T, x_n)$ is said to be $T - stable$ or *stable* with respect to T. If $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ implies $y_n \to p$, then the iteration procedure is said to be *almost* $T - stable$. Clearly any T-stable iteration procedure is almost T stable, but an almost T-stable iteration procedure may fail to be T-stable.

The stability of several iteration procedures for certain contractive operators has been studied by several authors. Harder and Ricks [2] proved the stability of Picard and Mann iteration procedures for the quasi-contractive operators, called Zamfirescu operators, satisfying the following condition:

2000 AMS Mathematics Classification: 47H10

Let (X, d) be a complete metric space and $T : X \to X$ a map for which there exists the real numbers a, b and c satisfying $0 < a < 1,\ 0 < b,\ c < 1/2$ such that for each pair $x, y \in X$, at least one of the following is true:
(i) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$;
(ii) $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
(iii) $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.
In [13], Rhoades considered the stability of some iteration procedures for the contractive operators satisfying the following definition:
there exists a constant $c \in [0, 1)$ such that for each $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq\ c\ max\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, Tx) + d(y, Ty)], d(x, Ty), d(y, Tx)\}. \quad (0.1)$$

The Zamfirescu operators are independent of the operators satisfying (0.1). However, it was shown by Rhoades, B. E. 1976 [Comments on fixed point iteration methods. J. Math. Anal. Appl., 56:741-750], that if T satisfies (0.1) or if T is a Zamfirescu operator, then for $\delta \in [0, 1)$

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{\delta}{1-\delta} d(x, Tx) + \delta d(x, y). \quad (0.2)$$

Osilike [11] considered a more general contractive definition: there exists $L \geq 0$, $a \in [0, 1)$ such that, for each $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, Tx) + ad(x, y). \quad (0.3)$$

Recently, Imoru and Olatinwo [3] proved the stability of the Picard and the Mann iteration process for the following operator which is more general than the one introduced by Osilike [11]. The operator satisfies the following contractive definition: there exist a constant $q \in [0, 1)$ and a monotone increasing function $\Phi : R_+ \to R_+$ with $\Phi(0) = 0$ such that for each $x, y \in X$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \Phi(\|x - Tx\|) + q\|x - y\|. \quad (0.4)$$

Olaleru [9] also considered the stability of Ishikawa and Kirk iteration procedures when the operator satisfies (0.4).
Osilike [10] proved that the Ishikawa iteration is $almost\ T - stable$ when the operator is a Lipschitz strongly pseudocontractive operator. It is the purpose of this paper to generalise previous results on the stability of iteration procedures in literature by studying the stability of those iteration procedures *with errors* when the operators satisfy (0.4).

2. Preliminaries

The idea of considering fixed point iteration procedures *with errors* comes from practical numerical computations.

Definition 1 [1]. Let K be a nonempty convex subset of a Banach space X and $T : K \to X$ a mapping. The sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ defined iteratively by

$$x_o \in K, \tag{0.5}$$

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \tag{0.6}$$

$$y_n = a'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n, \ n \geq 0 \tag{0.7}$$

where $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ are bounded sequences in K and $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b'_n\}$ and $\{c'_n\}$ are sequences in $[0, 1]$ such that

$$a_n + b_n + c_n = a'_n + b'_n + c'_n = 1, \ n \geq 0 \tag{0.8}$$

is called the *Ishikawa iteration sequence with errors*.

Remark 1. If u_n and v_n are null sequences, then we have the usual Ishikawa iteration [4]. If $b'_n = c'_n = 0$, $n \geq 0$, then the sequence $\{x_n\}$ will be called *Mann iteration with errors*. For recent results on Ishikawa iteration with errors, see [6] and [14]. If in addition, u_n is a null sequence, then we have the usual Mann iteration procedure [7-8].

Definition 2. The Kirk iteration *with errors* is defined as the sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ given iteratively by

$$x_{n+1} = a_o x_n + a_1 T x_n + a_2 T^2 x_n + ... + a_k T^k x_n + w_n u_n, \ n \geq 0 \tag{0.9}$$

where $\{u_n\}$ is a bounded sequence in X, $\{a_n\}$ and $\{w_n\}$ are sequences in [0,1], $k \geq 1$ an integer, $i = 0, 1, ..., k$ such that $a_1 > 0$ and $\sum_{i=0}^{k} a_i + w_n = 1$ for each n.

Remark 2. If u_n is a null sequence, then we have the usual Kirk iteration ([1], [11]).

In the sequel we shall require the following Lemma.

Lemma [1]. *Let $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, and $\{k_n\}$ be sequences of nonnegative numbers satisfying*

$$r_{n+1} \leq (1 - t_n) r_n + s_n + k_n$$

for all $n \geq 0$, where $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$. If $\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$, $s_n = o(t_n)$ and $\sum_{n=o}^{\infty} k_n < \infty$ hold, then $lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

3. Main Results

Theorem 1. *Let X be a normed linear space, $T : X \to X$ a self map of X satisfying* (0.4) *and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$. For arbitrary $x_o \in X$, define sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratively by*

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \ n \geq 0$$

where $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ and $\{c_n\}$ are sequences in [0,1] such that $a_n + b_n + c_n = 1$ and $\{u_n\}$ is a bounded sequence in X. Suppose $\epsilon_n = \|y_{n+1} - (a_n y_n + b_n T y_n + c_n u_n)\|$ and suppose T has a fixed point p. Assume that $M = sup_{n\geq 0}\|u_n - p\|$. If $lim_{n\to\infty} c_n = 0$, then
(i) $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ implies $lim_{n\to\infty} y_n = p$, i.e., the Mann iteration with errors is almost T-stable;
(ii) $lim_{n\to\infty} y_n = p$ implies $lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$.

Proof. (i) Let $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. We shall establish that $lim_{n\to\infty} y_n = p$.
In view of (0.4) and the fact that $\|Ty_n - p\| = \|Ty_n - Tp\|$,

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - p\| &\leq \|y_{n+1} - (a_n y_n + b_n T y_n + c_n u_n)\| \\
&+ \|(a_n y_n + b_n T y_n + c_n u_n) - (a_n + b_n + c_n)p\| \\
&\leq \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n\|Ty_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
&\leq \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n[\Phi\|p - Tp\| + q\|p - y_n\|] \\
&+ c_n\|u_n - p\| \\
&= \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n q\|y_n - p\|] + c_n\|u_n - p\| \\
&= \epsilon_n + (a_n + b_n q)\|y_n - p\|] + Mc_n.
\end{aligned}$$

Thus

$$\|y_{n+1} - p\| \leq (a_n + b_n q)\|y_n - p\| + Mc_n + \epsilon_n. \tag{0.10}$$

In view of the Lemma and considering tha fact that $0 \leq a_n + b_n q < 1$, (0.10) yields $lim_{n\to\infty}\|y_n - p\| = 0$. Consequently, $lim_{n\to\infty} y_n = p$.
(ii) Suppose $lim_{n\to\infty} y_n = p$. Following the same method as above, it is easy to see that,

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &= \|y_{n+1} - (a_n y_n + b_n T y_n + c_n u_n)\| \\
&= \|y_{n+1} - (a_n + b_n + c_n)p + (a_n + b_n + c_n)p \\
&- (a_n y_n + b_n T y_n + c_n u_n)\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + a_n\|y_n - p\| + b_n\|Ty_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + a_n\|y_n - p\| + b_n[\Phi\|p - Tp\| + q\|p - y_n\|] \\
&+ c_n\|u_n - p\| \\
&= \|y_{n+1} - p\| + a_n\|y_n - p\| + b_n q\|y_n - p\|] + c_n\|u_n - p\| \\
&= \|y_{n+1} - p\| + (a_n + b_n q)\|y_n - p\| + Mc_n.
\end{aligned}$$

If $n \to \infty$, it is clear that $\epsilon_n \to 0$ and this completes the proof.
Remark 3. If $c_n \equiv 0$ in Theorem 1(ii), we obtain a corresponding stability result for the Mann iteration procedure in [3] and the corresponding stability result in [11] if specifically, $\Phi(d(x, Tx))$ is $Ld(x, Tx)$, $L \geq 0$.
Example 1. Let X and T be defined as in Theorem 1. Suppose
$\|u_n\| = \frac{1}{n+7}$, $a_n = \frac{1}{n+3}$, $b_n = \frac{n}{n+3}$, $c_n = \frac{2}{n+3}$, $n \geq 0$. Then, Theorem 1 is satisfied.
Theorem 2. *Let X be a normed linear space, $T : X \to X$ a self map of X satisfying* (0.4). *Suppose T has a fixed point p. For arbitrary $x_o \in X$, define*

sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *iteratively by*

$$z_n = a'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n$$

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = a_n x_n + b_n T z_n + c_n u_n, \ n \geq 0$$

where $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b'_n\}$ *and* $\{c'_n\}$ *are sequences in [0,1] such that* $a_n + b_n + c_n = 1$, $a'_n + b'_n + c'_n = 1$ *and* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ *are bounded sequences in* X. *Let* $\{y_n\}$ *be any sequence in* X *and define*

$$s_n = a'_n y_n + b'_n T y_n + c'_n v_n$$

and

$$\epsilon_n = \|y_{n+1} - a_n y_n + b_n T s_n + c_n u_n\|, \ n \geq 0$$

Assume that $M = sup_{n\geq 0}\|u_n - p\|$ *and* $N = sup_{n\geq 0}\|v_n - p\|$. *If* $\forall$ n, $c_n c'_n$ *and* $c'_n \to 0$, *then*
(i) $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ *implies* $lim_{n\to\infty} y_n = p$, *i.e. Ishikawa iteration with errors is almost T-stable;*
(ii) $lim_{n\to\infty} y_n = p$ *implies* $lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$.
Proof. (i) Suppose $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$, we shall establish that $lim_{n\to\infty} y_n = p$. In view of (0.4), it follows that

$$\begin{array}{rcl}
\|y_{n+1} - p\| & = & \|y_{n+1} - (a_n y_n + b_n T s_n + c_n u_n) \\
& + & (a_n y_n + b_n T s_n + c_n u_n) - (a_n + b_n + c_n)p\| \\
& \leq & \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n\|T s_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
& \leq & \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n[\Phi\|p - Tp\| + q\|p - s_n\|] \\
& + & c_n\|u_n - p\| \\
& = & \epsilon_n + a_n\|y_n - p\| + b_n q\|p - s_n\| + c_n\|u_n - p\| \\
& = & \epsilon_n + a_n\|p - y_n\| \\
& + & b_n q\|a'_n y_n + b'_n T y_n + c'_n v_n - (a'_n + b'_n + c'_n)p\| + c_n\|u_n - p\|
\end{array}$$

i.e.

$$\begin{array}{rcl}
\|y_{n+1} - p\| & \leq & \epsilon_n + a_n\|p - y_n\| + b_n q\|(a'_n(y_n - p) + b'_n(T y_n - p) \\
& + & c'_n(v_n - p)\| + c_n\|u_n - p\| \\
& \leq & \epsilon_n + a_n\|p - y_n\| + b_n q a'_n\|y_n - p\| + b_n q b'_n\|T y_n - p\| \\
& + & b_n q c'_n\|v_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
& \leq & \epsilon_n + a_n\|p - y_n\| + b_n q a'_n\|y_n - p\| \\
& + & b_n q b'_n[\Phi(p - Tp) + q\|p - y_n\|] + b_n q c'_n\|v_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
& = & \epsilon_n + a_n\|p - y_n\| + b_n q a'_n\|y_n - p\| \\
& + & b_n q^2 b'_n\|p - y_n\| + b_n q c'_n\|v_n - p\| + c_n\|u_n - p\| \\
& = & \epsilon_n + (a_n + b_n q a'_n + b_n q^2 b'_n)\|p - y_n\| + b_n q c'_n\|v_n - p\| \\
& + & c_n\|u_n - p\| \\
& \leq & (a_n + b_n q)\|y_n - p\| + (M c_n + b_n q c'_n N) + \epsilon_n.
\end{array}$$

Hence

$$\|y_{n+1}-p\| \leq (a_n+b_nq)\|y_n-p\| + (Mc_n + b_nqc'_nN) + \epsilon_n. \tag{0.11}$$

In view of the Lemma, (0.11) yields $lim_{n\to\infty}y_n = p$.
(ii) Suppose $lim_{n\to\infty}y_n = p$.

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon_n & = & \|y_{n+1}-(a_ny_n+b_nTs_n+c_nu_n)\| \\
& = & \|y_{n+1}-(a_n+b_n+c_n)p+(a_n+b_n+c_n)p \\
& - & (a_ny_n+b_nTs_n+c_nu_n)\| \\
& \leq & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|y_n-p\|+b_n\|Ts_n-p\|+c_n\|u_n-p\| \\
& \leq & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|y_n-p\|+b_n[\Phi\|p-Tp\|+q\|p-s_n\|] \\
& + & c_n\|u_n-p\| \\
& = & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|y_n-p\|+b_nq\|p-s_n\|+c_n\|u_n-p\| \\
& = & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|p-y_n\| \\
& + & b_nq\|(a'_ny_n+b'_nTy_n+c'_nv_n-(a'_n+b'_n+c'_n)p\|+c_n\|u_n-p\| \\
& = & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|p-y_n\| \\
& + & b_nq\|(a'_n(y_n-p)+b'_n(Ty_n-p)+c'_n(v_n-p))\|+c_n\|u_n-p\| \\
& \leq & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|p-y_n\|+b_nqa'_n\|y_n-p\| \\
& + & b_nqb'_n\|Ty_n-p\|+b_nqc'_n\|v_n-p\|+c_n\|u_n-p\| \\
& \leq & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|p-y_n\|+b_nqa'_n\|y_n-p\| \\
& + & b_nqb'_n[\Phi(p-Tp)+q\|p-y_n\|]+b_nqc'_n\|v_n-p\|+c_n\|u_n-p\| \\
& = & \|y_{n+1}-p\|+a_n\|p-y_n\|+b_nqa'_n\|y_n-p\| \\
& + & b_nq^2b'_n\|p-y_n\|+b_nqc'_n\|v_n-p\|+c_n\|u_n-p\| \\
& = & \|y_{n+1}-p\|+(a_n+b_nqa'_n+b_nq^2b'_n)\|p-y_n\|+b_nqc'_n\|v_n-p\| \\
& + & c_n\|u_n-p\| \\
& \leq & \|y_{n+1}-p\|+(a_n+b_nq)\|y_n-p\|+Mc_n+b_nqc'_nN.
\end{array}$$

Thus $\epsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Remark 4. If $\Phi(d(x,Tx))$ is $Ld(x,Tx)$, $L \geq 0$ and $\forall\ n,\ c_n = c'_n = 0$, then Theorem 2(ii) gives the corresponding result of [11].

Example 2. Let X and T be defined as in Theorem 2. Suppose $\|u_n\| = \frac{1}{n+7}$, $\|v_n\| = \frac{1}{n+1}$, $a_n = \frac{1}{n+3}$, $a'_n = \frac{n+2}{2n+3}$, $b_n = \frac{n}{n+3}$, $b'_n = \frac{n}{2n+3}$, $c_n = \frac{2}{n+3}$, $c'_n = \frac{1}{2n+3}$, $n \geq 0$. Then, Theorem 2 is satisfied.

Theorem 3. *Let X be a normed linear space and let $T : X \to X$ be a selfmap of X satisfying (0.4). Suppose T has a fixed point p. Let $x_o \in X$ and suppose that*

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = a_ox_n + a_1Tx_n + a_2T^2x_n + ... + a_kT^kx_n + w_nu_n,\ n \geq 0,$$

$k \geq 1$ an integer, where $\{u_n\}$ is a bounded sequence in X, $\{a_n\}$ and $\{w_n\}$ are sequences in [0,1] such that $lim_{n\to\infty}u_n = 0$, $\sum w_n = \infty$, $a_1 > 0$ and $a_o + a_1 + ... + a_k + w_n = 1$ for any $n \geq 0$. Let $\{y_n\}$ be any sequences in X and suppose $\epsilon_n = \|y_{n+1} - \sum_{i=0}^{k} a_iT^iy_n + w_nu_n\|$. If $w_n \to 0$, then

(i) $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ *implies* $lim_{n\to\infty} y_n = p$ *i.e the Kirk iteration with errors is almost T-stable;*
(ii) $lim_{n\to\infty} y_n = p$ *implies* $lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

Proof. (i) Let $\sum_{n=o}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. We shall establish that $lim_{n\to\infty} y_n = p$. It is clear that $\|Ty_n - p\| = \|Tp - Ty_n\| \leq q\|y_n - p\|$ and hence for $i = 1, 2, ..., k$, $\|T^i y_n - p\| \leq q^i \|y_n - p\|$. Thus

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - p\| &\leq \|y_{n+1} - (\textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i T^i y_n + w_n u_n)\| \\ &+ \|\textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i T^i y_n + w_n u_n - p(\sum_{i=0}^{k} a_i + w_n)\| \\ &\leq \epsilon_n + (\textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i)\|T^i y_n - T^i p\| + w_n\|u_n - p\| \\ &\leq (\textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i q^i)\|y_n - p\| + w_n\|u_n - p\| + \epsilon_n. \end{aligned}$$

Since $\sum_{i=0}^{k} a_i q^i < 1$, in view of the Lemma , it follows that $lim_{n\to\infty} y_n = p$.
(ii) If $lim_{n\to\infty} y_n = p$, it follows easily that

$$\epsilon_n = \|y_{n+1} - (\sum_{i=0}^{k} a_i T^i y_n + w_n u_n)\| \leq \|y_{n+1} - p\| + (\sum_{i=0}^{k} a_i q^i)\|y_n - p\| + w_n\|u_n\|$$

and $\epsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. Thus the proof of the Theorem is complete.
Remark 5. If $\Phi(d(x, Tx))$ is $Ld(x, Tx)$, $L \geq 0$ and $w_n \equiv 0$, then Theorem 2(ii) is the same as Theorem 7 of [11].
It is still an open problem to show that our Theorems can be proved for T-stability instead of almost T-stability for the iteration processes with errors.

References

[1] V. Berinde, Iterative approximation of fixed points, Editura Efemeride, Baia Mare, 2002.

[2] A. M. Harder and T. L. Ricks, *Stability results for fixed point iteration procedures*, Math. Japonica 33(1998), No. 5, 693-706.

[3] C. O. Imoru and M. O. Olatinwo, *On the stability of Picard and Mann iteration processes*, Carpathian J. Math. 19(2003), No. 2, 155-160.

[4] S. Ishikawa, *Fixed points by a new iteration method*, Proc. Amer. Math. Soc.44(1974), 147-150.

[5] G. E. Kim, H. Kiuchi, W. Takahashi, *Weak and strong convergence of Ishikawa iterations for asympotically nonexpansive mappings in the intermediate sense*, Sci. Math. Japon. Online 10 (2004), 81-92.

[6] L. Liu, *Ishikawa and Mann iteration processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 194(1995), 114-125.

[7] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. 125(5)(1997), 1363-1366.

[8] J. O. Olaleru, *On the convergence of Mann iteration scheme in locally convex spaces*, Carpathian Journal of Mathematics, 22(2006) No.1-2, 115-120.

[9] J. O. Olaleru, *On the stability of Ishikawa and Kirk iteration processes*, to appear in Nigerian Journal of Mathematics and Applications.

[10] M. O. Osilike, *Stability of the Mann and the Ishikawa iteration procedures for strongly pseudocontractions and nonlinear equations of the strongly accretive type*, J. Math. Anal. Appl. 227 (1998), No.2, 319-334.

[11] M. O. Osilike, *Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of quasi-contractive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. 30 (1999), No. 12, 1229-1234.

[12] B. E. Rhoades, *Some fixed point iteration procedures*, Internat. J. Math. Math. Sci. 14(1991), No. 1, 1-16.

[13] B. E. Rhoades, *Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures*, Indian J. Pure Appl. Math. 24(11), (1993), 691-703.

[14] Y. G. Xu, *Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive operators equations*, J. Math. Anal. Appl. 224 (1998), 91-101.

J. O. Olaleru and A. A. Mogbademu
Mathematics Department, University of Lagos,
Lagos, Nigeria
email: olaleru1@yahoo.co.uk, prinsmo@yahoo.com

OBITUARIO

Esbozo biográfico de un insigne matemático venezolano:
Jesús Salvador González (1930-2008)

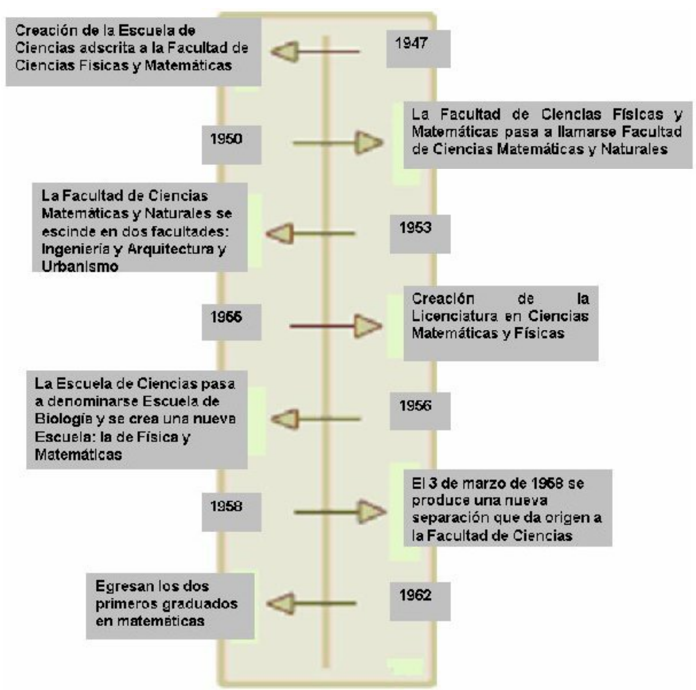
Walter O. Beyer K., Mauricio Orellana Chacín, Sergio Rivas A.

Recientemente la primera Facultad de Ciencias del país arribó a su cincuentenario habiendo egresado de su seno un buen número de matemáticos quienes, entre otras cosas, fueron conformando el plantel profesoral de otras instituciones a lo largo y ancho de la geografía nacional.

La semilla de la cual emergió la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela (UCV) fue la Escuela de Ciencias adscrita a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, creada de acuerdo con el Estatuto Orgánico de las Universidades Nacionales de 1946. A partir de este momento la Universidad Central comienza a otorgar las licenciaturas en Ciencias Naturales.

Este doble rol de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de formar tanto a ingenieros como a científicos hace que en ella ocurran una serie de cambios: modificaciones del nombre de la facultad, la creación de nuevas escuelas y carreras así como la génesis de nuevas facultades las cuales se desprendieron de ésta.

En el siguiente diagrama sintetizamos los sucesivos cambios.



Es justamente en la recién creada Facultad de Ciencias en donde estudia y de la cual es egresado nuestro biografiado, formando parte de la primera promoción egresada en el año 1962.

A pesar de que antes de 1962 se otorgaran algunos títulos en Matemáticas éstos lo fueron por la vía de la reválida y sus primeros egresados, Mauricio Orellana y **Jesús Salvador González**, fueron los primeros en formarse en la nueva facultad.

Su niñez y su adolescencia

Nace Jesús en la isla de Margarita (Estado Nueva Esparta), específicamente en la población de Juan Griego, el 03 de junio de 1930; siendo sus padres Aurora González Granado y Aquiles Leandro Moreno.

Tuvo en total cinco hermanos, cuatro de ellos producto de una segunda unión marital de su padre.

Muy niño, a los 7 años, viene a vivir a Caracas y a los 8 años -después de la muerte de su madre- fue atropellado por un vehiculo lo cual le produjo una grave lesión en su pierna derecha, hecho que cambia radicalmente su vida ya que por mala praxis médica esto devino en osteomelitis, lo cual le impide caminar y además le ameritó unas 14 operaciones a lo largo de su existencia. Como secuela de la lesión tuvo un crecimiento desigual de las piernas con los consecuentes trastornos que esto acarrea. Comenzó a caminar bien a los 18 años. Como ejercitación utilizó una bicicleta en la que repartía propaganda para las películas que se exhibían en el cine de La Pastora, el cual era propiedad de su padre.

Algunos datos de su vida familiar

De su primer matrimonio nacen dos hijos: Mercedes Aurora y Jesús Salvador. Con su segunda esposa procrea tres hijos: Juan Elias, Yamil Jesús y Daniel Jesús, quienes actualmente viven en Francia. Se casó en 1977 en terceras nupcias con Antonieta Caraballo, a quien conoce cuando se desempeñaba como gerente del Instituto de Previsión del Profesorado de la UCV.

Sus primeros estudios

En lo que concierne a su educación, estudió la primaria en las escuelas República del Perú y República de Bolivia y la secundaría en los liceos Fermín Toro y Juan Vicente González, graduándose de bachiller en Ciencias Física y Matemáticas, el 06-10-50.

Era la época en que de acuerdo con el Estatuto Provisional de Educación aprobado en 1949 por la dictadura de Marcos Pérez Jiménez existían los cursos preuniversitarios[1] en el nivel secundario.

Jesús S. González matemático

Sus deseos de superación lo llevaron a iniciar estudios superiores en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN)[2], obteniendo el título de Profesor de Educación Secundaria y Educación Normal en la especialidad de Matemáticas y Física en 1955, en donde adquiere la base inicial sobre la cual habría de sustentar tanto su formación matemática como su formación en el área pedagógica, las cuales configuraban tendencias que desarrollaría y profundizaría a lo largo de su vida.

[1] Es menester aclarar aquí que hasta el año 1955, en el cual se sanciona una nueva Ley de Educación, la educación secundaria estaba estructurada en dos ciclos: el primero de 4 años con fines de cultura general; y el segundo de 1 año de duración con carácter preuniversitario con tres orientaciones: Filosofía y Letras, Ciencias Físicas y Matemáticas, Ciencias Biológicas.

[2] Este instituto ha tenido históricamente varios nombres. La creación de nuevos Institutos Pedagógicos, como el de Barquisimeto (1959), le hicieron cambiar su denominación y su condición. Se convirtió en Instituto Experimental de Educación Superior en 1972. Entre 1975 y 1983 pasó a llamarse Instituto Universitario Pedagógico de Caracas y a partir de 1983 cambió su nombre por Instituto Pedagógico de Caracas, siendo hoy en día bajo esa denominación un núcleo de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

No conforme con esto ingresa posteriormente a la naciente Facultad de Ciencias de la UCV, como alumno en la licenciatura de matemáticas, obteniendo en 1962 el título de Licenciado en Matemáticas.
Es de destacar que para la época los estudios matemáticos ofrecidos en el país tenían una orientación clásica suscitándose diversos cambios con la entrada de un nuevo plan de estudios en 1959-60 con la introducción de un enfoque más moderno que consideraba asignaturas como Topología Algebraica y Variedades Diferenciales, entre otras; lo cual constituía una verdadera novedad.
Con la finalidad de profundizar sus conocimientos matemáticos asistió a las reuniones quinta (1965), sexta (1966) y décima (1975) del Coloquio de Matemática de Poços de Caldas (Brasil), evento organizado por la Sociedad Brasilera de Matemáticas.
Su inquietud por formarse en las ciencias exactas lo conduce a realizar varias estadías en Francia en donde realiza estudios de postgrado.
Para 1969/70 realiza estudios en la Universidad de París cursando asignaturas en las áreas de Topología, Álgebra, Ecuaciones Diferenciales, Análisis, Probabilidades, Geometría Diferencial, Funciones Analíticas, Análisis Funcional y Probabilidades con eminentes matemáticos de esa prestigiosa universidad francesa.
En *l'Université des Sciences et Techniques de Lille* obtiene los títulos A. E. A. y el Diplôme d'Études Approfondies (D. E. A) en Matemáticas Puras en el año 1971 con calificación "Sobresaliente".
En el año académico 1973-1974 lo encontramos inscrito en los estudios doctorales que ofrece la *Université de Paris Sud* (Orsay), donde inició estudios de Doctorado de 3er Ciclo en Matemáticas Puras bajo la tutoría del profesor Pierre Samuel, quien fue un destacado miembro del grupo Bourbaki.
Debe regresar a Venezuela sin haber culminado su tesis doctoral. Retoma su investigación en el país desarrollando la tesis doctoral que se tituló "Espacios $T_u^P(.)$ y relación entre la derivabilidad global y local en L_p" orientada por los destacados matemáticos argentinos Mischa Cotlar y Cora Sadosky para obtener el título de Doctor en Ciencias (Matemáticas) en la UCV en el año 1975, siendo el primero a quien se le otorga este titulo en esta casa de estudios.
Aunque su formación doctoral lo condujo al campo del Análisis sus inquietudes eran múltiples, en gran medida orientadas hacia las aplicaciones de las matemáticas en áreas como los modelos matemáticos y la estadística, así como en lo concerniente a la educación matemática.
De esta amplitud de su pensamiento es muestra que en el año 1979 se dispone a hacer efectivo el disfrute de su año sabático y entre sus planes durante el lapso 1979-1980 estuvo el asistir al *Institut de Statistique des Universités de Paris* para profundizar sus conocimientos en esa área de la matemática. Además, en esa época el Dr. Miguel Casas Armengol, Rector de la Universidad Nacional Abierta (UNA), le solicita su colaboración con esta naciente universidad a los fines de organizar los estudios matemáticos a ser ofrecidos por esa institución.
En lo que respecta a su inquietud hacia el campo de la estadística ya había quedado manifiesta en 1974 cuando introduce una solicitud ante la Universidad Central de Venezuela, para que le sea concedida equivalencia de estudios para seguir la Licenciatura en Estadística que ofrece esta casa de estudios. Tal vez un estímulo fuerte provino de su experiencia de haber dictado clases en la Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales de la UCV.
Asimismo, su afinidad por las áreas aplicadas de la matemática se manifiesta por un lado en su preferencia en dictar cursos de lo que en la Facultad de Ciencias se denomina "El servicio"; es decir, los cursos de matemáticas del plan de estudios de las carreras que ofrece dicha facultad y que estaban a cargo del Departamento de Matemáticas. De igual manera aborda la temática de las aplicaciones matemáticas cuando en 1978 es invitado

por la Sociedad Venezolana de Ciencias Fisiológicas a dictar el curso *Introducción a la formulación matemática de modelos en biología*, curso que se desarrolló desde abril de 1978 hasta febrero de 1979.

Jesús González educador matemático

Su primigenia formación en el campo de la educación matemática la obtuvo en el IPN. Sin embargo, su profunda preocupación por los graves problemas que acosan a la educación matemática en el país lo llevan a profundizar el estudio de esta problemática y aprovecha su estadía en Francia para el año de 1968/69 y trabaja con el profesor André Revuz en el *Instituto de Investigación en Educación Matemática* (I. R. E. M., por sus siglas en francés) de París.

Participa en la década de los años 60 y 70 en varias de las *Conferencias Interamericanas de Educación Matemática* (CIAEM), eventos que fueron en gran medida la puerta de entrada a la Matemática Moderna propulsada por los seguidores de las ideas del Grupo Bourbaki. Así, en 1961 forma parte de la delegación venezolana asistente a la I CIAEM la cual se llevó a cabo en Bogotá. Asimismo, asistió en 1966 a la II CIAEM en Lima y en 1975 a la IV en Caracas.

Ya en 1963, en el Instituto Pedagógico de Caracas, formó parte de un grupo de profesores que realizaban diversas actividades para los docentes, siendo uno de los que dictó el curso de Álgebra en el *Primer Cursillo Nacional sobre Enseñanza de la Matemática*.

En 1965 integra con otros destacados profesores la *Comisión de Matemáticas* del Ministerio de Educación, la cual tenía por finalidad revisar los programas de esa asignatura y de suministrar asesoría a los Liceos de Ensayo en los cuales se experimentaba con el enfoque de la Matemática Moderna.

En gran medida todas estas actividades estaban signadas por el énfasis de difundir la doctrina de la Matemática Moderna y los acuerdos a los cuales se llegó en la I CIAEM.

El Ministerio de Educación, en diferentes oportunidades solicitó sus servicios. Así, en 1972, formó parte de una comisión a la cual le es encomendada la tarea de revisar un libro de matemáticas para el nivel primario. Ese mismo año se pide su colaboración para servir de instructor en un seminario sobre implantación de los programas de matemáticas. Ha de recordarse aquí que para la fecha se estaba produciendo el proceso de implantación de los nuevos programas, proceso que había comenzado con la reforma de la educación secundaria producto del Decreto 120[3] y que en lo concerniente a matemáticas produjo la introducción de la Matemática Moderna.

En 1973 participa y colabora en la organización del Primer Congreso Regional de Matemáticas Upata-Ciudad Bolívar, evento destinado al mejoramiento de la enseñanza de esta disciplina.

Luego, por intermedio de la Dirección de Educación Primaria se le solicita en 1976 su colaboración a los fines de actualizar los programas de 3º a 6º grados.

También la Oficina Regional de Educación Centro Occidental apela a la experiencia de Jesús en el ámbito educativo y solicita al Decano de la Facultad de Ciencias la presencia de Jesús para el dictado de un curso sobre matemáticas para los profesores del Ciclo Diversificado.

En numerosas ocasiones es convocado por el Ministerio de Educación para formar parte de los jurados examinadores de secundaria, figura estipulada en la normativa educativa del momento.

[3] Mediante este Decreto del 13 de agosto de 1969 se reorganiza la educación secundaria estableciendo dos ciclos: uno básico común (3 años) y uno diversificado (mínimo dos años), integrando a este esquema la educación técnica.

En 1976 profundiza su contacto con la comunidad internacional de educadores matemáticos al asistir al III *International Congress on Mathematical Education* (ICME-III) el cual se llevó a cabo en la ciudad de Karlsruhe (Alemania).
En este mismo año una comisión integrada por los profesores Mauricio Orellana, Jesús González y John Abreu presenta un proyecto de opción docente en matemáticas[4] ante las autoridades de la Facultad de Ciencias de la UCV.
En su largo trajinar participa en un sinnúmero de actividades académicas y es solicitada su actuación y colaboración para llevar a cabo diversas iniciativas y proyectos. Así, por ejemplo, es invitado por el Instituto Nacional de Ciencias de la Educación de España para participar en un proyecto de evaluación internacional del área de matemática.
En la Universidad Nacional Abierta organiza la estructuración de una Licenciatura en Educación con mención en Matemática para la formación de docentes para los niveles de la Tercera Etapa de Educación Básica y para la Educación Media, Diversificada y Profesional.
En los inicios de los años 90, conjuntamente con el profesor Eleazar Rojas Boada y otros colaboradores, desarrolla un programa de formación para docentes de educación media en ejercicio que se llamó Proyecto GEM 2000 el cual se llevó a cabo en el Estado Sucre. A tal fin Jesús y el profesor Rojas Boada elaboran un conjunto de materiales y dictan cursos para los profesores.

Su experiencia en las aulas

Jesús durante su vida acumuló una vasta experiencia docente la cual abarcó diferentes niveles e instituciones del ámbito educativo venezolano.
Ejerció el magisterio en el nivel primario en el Colegio Carabobo de La Pastora cuyo Director era el profesor Leandro Matei.
Dio clases en el nivel secundario en varios planteles de Caracas: Colegio América, Colegio Leal, Nuestra Señora del Pilar, Nuestra Señora del Carmen, Instituto Educacional El Peñón y el Liceo Razetti.
Entre 1957 y 1964 se desempeña como profesor en las asignaturas Álgebra y Cálculo en el Instituto Pedagógico de la ciudad de Caracas. En esa misma época, es docente de la UCV en la Facultad de Ingeniería ejerciendo como profesor de Análisis (del I al IV). Asimismo, entre 1962 y 1964 se desempeña como profesor de la Escuela de Economía adscrita a la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la UCV dictando Cálculo y Matemáticas Financieras.
Posteriormente, hasta su jubilación de nuestra máxima casa de estudios, formó parte del plantel de profesores de la Escuela de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV, dictando los cursos de matemáticas correspondientes a las licenciaturas de Biología, Química, Computación así como materias del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas.
Asimismo, ante una emergencia docente suscitada en la Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales de la UCV colabora con esa dependencia dictando entre 1972 y 1973 la asignatura Álgebra Lineal.

La Escuela de Física y Matemáticas en la década de 1960 y el contexto del momento

En los primeros años de la década de 1960 la Escuela de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV apenas estaba en proceso de consolidación.

[4] Previamente, en 1970 el Prof. Ramón Lizardo había presentado un proyecto al respecto y en 1974 en el proceso de cambio de plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas se abordó dicho tema. Finalmente, en 1977 es aprobado un “Plan cooperativo entre la Facultad de Ciencias y la Facultad de Humanidades y Educación” para la formación de docentes en física y en matemáticas.

Expresa Orellana (1980) que se produce la contratación de nuevos profesores y que "la primera consecuencia de la contratación de este personal fue el cambio de los planes de estudio de la Licenciatura buscando la actualización de los mismos". (p. 64)

Para esta época se desempeñaba como Director de Escuela el profesor argentino Manuel Bemporad quien provenía de la Facultad de Ingeniería y se había incorporado al personal docente de la novel facultad. Dicho sea de paso fue el primer Director de la Escuela.

Es de interés conocer algunos de los elementos que conformaron la vida académica de la Escuela de Física y Matemáticas en sus inicios, especialmente lo referente a los diversos planes de estudio que se fueron discutiendo e implementando, por cuanto en una primera etapa fue la situación que vivió Jesús como cursante de la carrera de matemáticas y en un segundo momento ello fue parte de su accionar como Director de Escuela.

El siguiente esquema recoge de manera sintética los diversos cambios de planes de estudio durante la época en que Jesús fue primero estudiante y luego profesor de la Escuela.

Evolución en el tiempo de los planes de estudio de la Licenciatura en Matemáticas (1955-1974)

1955	Plan inicial de la carrera de 4 años. La carrera cuya denominación era Licenciatura en Ciencias Físicas y Matemáticas está adscrita a la Escuela de Ciencias, la cual depende de la Facultad de Ingeniería.
1957	Estudios dependientes de la Escuela de Física y Matemáticas adscrita a la Facultad de Ingeniería. Se propone un plan de manera que a los 4 años se obtendría el título de Profesor de Educación Secundaria y Normal y con 5 años de estudio el de Licenciado en Ciencias Físicas y Matemáticas. El plan de estudios seguía el enfoque de las matemáticas clásicas.
1959/1960	Estudios dependientes de la recién creada Facultad de Ciencias. La Licenciatura en Matemáticas está separada de la de Física. Régimen de estudios semestral. Se introduce un plan moderno con asignaturas novedosas como Topología Algebraica, Variedades Diferenciables, entre otras.
1965	Nuevo cambio de pensum. Hay un Ciclo Básico común para toda la Facultad de Ciencias.
1968	Ocurre otro cambio del plan de estudios. Hay un marcado desplazamiento hacia el análisis matemático.
1974	Cambio del Plan de estudios dentro de un proceso conocido como "La Experiencia" que siguió el modelo de enseñanza de la Universidad de Vincennes (Francia)[5].

[5] Posteriormente se han dado otros cambios en el Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas. Incluso, en su última época como profesor activo de la Facultad de Ciencias, Jesús fue parte de la Comisión de Pensum que estudiaba la modificación del Plan de 1974.

Del anterior recuento de cambios curriculares se observa que hubo en un corto período un buen número de ellos y que tales discusiones conllevaban en muchas ocasiones puntos de vista contrapuestos. Es decir, fue una época de un gran dinamismo y de enormes transformaciones en la concepción que guiaba a quienes estructuraban los planes de estudio, lo cual generó a lo interno de dicha comunidad un alto grado de conflictividad.

Para junio del año 1959 se señalaba que “la razón de efectuar una modificación de los planes vigentes, se debió a que estos últimos fueron elaborados cuando se proyectaba fusionar el Instituto Pedagógico con la Universidad, por lo que enfocaban el estudio de la Física y de las Matemáticas desde un punto de vista completamente diferente al que debe ser de acuerdo a las funciones específicas de la Facultad de Ciencias.”

Por otra parte, la mayor parte del profesorado presente en la joven Escuela de Física y Matemáticas era extranjero, fundamentalmente de origen español o argentino.

La década de los 60 era la época en que empezaban a estar en boga las ideas de la Matemática Moderna aparejadas con la polémica que ellas suscitaban en algunos sectores de la comunidad matemática.

Explica Orellana (1980) que “esta situación de cambio no se llevó a cabo ‘pacíficamente’, la misma condujo a un enfrentamiento entre lo que era el ‘status profesoral’ y los que recién llegaban (la nueva corriente); ocurriendo a la larga el desplazamiento del grupo profesoral estatuido en lo que representaba su concepción académica y su nivel de influencia en las decisiones.” (pp. 64-65) Dicha confrontación se extendió hasta 1964/65.

Señala además Orellana (op. cit.) que “para ese momento de 1964, el personal venezolano que laboraba en el Departamento [de Matemáticas] estaba constituido por los profesores R. Chela, J. González, M. Orellana Chacín, y A. Rodríguez L., y algunos preparadores y auxiliares docentes.” (p. 65)

De izq. A der.: Luis Benito Tugues, Manuel Bemporad (Primer Director de la Escuela de Física y Matemática), Jesús S. González (Director de la Escuela de Física y Matemática), Onofre Rojo Asenjo (fue Director de la Escuela de Física y Matemáticas), Ernesto Foldats Andins, Alberto Sáez, Mauricio Orellana Chacín (Jefe del Departamento de Matemática) [Foto no fechada, aproximadamente es de 1965]

Bajo este contexto de conflicto interno es designado Jesús Director de la Escuela de Física y Matemáticas, cargo que ocupó entre junio de 1964 y agosto de 1968[6]; y el profesor Mauricio Orellana asume la jefatura del Departamento de Matemáticas.

Como puede apreciarse Jesús ejerció siendo bastante joven la difícil tarea de ser Director de la Escuela de Física y Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UCV.

Orellana (1980) puntualiza, refiriéndose a los diversos cambios curriculares, que de esta manera, de una concepción realizada por personal contratado u ordinario procedente de España y Francia, se pasó a planes inspirados por personal docente proveniente de Argentina y luego a otro, nuevamente con influencia de cierta modalidad francesa[7], […] La participación venezolana en todos estos cambios se produjo esencialmente en dos oportunidades, en el plan 1964-65 y en el vigente de 1974." (p. 54).

Habría que agregar que para la época era escaso el número de egresados: Hasta el año lectivo 1975-76 se habían graduado 77 Licenciados en Matemáticas. Era una carrera con poca demanda en sus inicios y con un lento crecimiento matricular. Para el año lectivo 1968/1969 la matrícula ascendía a 150 alumnos.

Adicionalmente hemos de considerar la compleja situación política que en el ámbito nacional e internacional se vivía en aquellos momentos, la cual impactaba de manera directa en el ambiente universitario de la época.

Para entender la confrontación y el conflicto que marcaron la década de los años 60, la cual afectaba la vida universitaria, tomaremos un extracto de la publicación "Hora Universitaria". Se señala allí que "la historia de la Universidad Central de Venezuela ha sido bastante aparatosa en lo que a allanamientos se refiere. De hecho, se considera como uno de los primeros el ocurrido durante el gobierno de Rómulo Betancourt, en octubre de 1960 […] Sin embargo, la ola de allanamientos continuaba y, sin duda alguna, el de mayor envergadura fue el del gobierno de Rafael Caldera, en 1970." (p. 23)

En aquella época se gestó el famoso movimiento promotor de la "Renovación Universitaria".

Jesús González y la Universidad Nacional Abierta (UNA)

Para 1979 hace su solicitud de jubilación ante la UCV y continúa la colaboración con la UNA en la revisión del currículum de lo que sería la carrera de matemática ofrecida por esta universidad la cual había iniciado un poco antes. La calidad del trabajo realizado por Jesús así como el espíritu de conformar eficientes equipos de trabajo que siempre lo embargó le hicieron acreedor de la felicitación del Rector Casas Armengol y formularle la solicitud de que continuase prestando su colaboración a la UNA.

Jesús acepta el reto y lo que se suponía inicialmente iba a ser una simple asesoría y colaboración por un corto espacio de tiempo se convirtió en la ardua tarea de construir un Área de Matemática[8] y a la estructuración de dos carreras: una licenciatura en matemáticas con dos menciones y una licenciatura en educación con mención matemáticas para la formación de profesores para la educación media, fungiendo por varios años como Coordinador de esta dependencia.

Jesús, una vez jubilado de la UCV, cambia la faceta de una colaboración iniciada en 1978 a una plena dedicación a las actividades académicas y organizativas en la UNA.

Jesús apela para ello a su amplia experiencia como organizador la cual había adquirido en la Escuela de Física y Matemáticas de la UCV cuando fue Director de la misma; a su capacidad gerencial adquirida como gerente del Instituto de Previsión del Profesorado en la UCV; a su conocimiento de las ciencias matemáticas y de la didáctica de la disciplina adquiridas tanto en sus estudios formales como en su larga experiencia como docente en

---

[6] Entre junio y agosto de 1964 fue Director Encargado.
[7] La alusión es aquí al plan de 1974.
[8] Denominación que dentro de la estructura de la UNA juega un papel análogo al de los Departamentos de Matemáticas en las universidades tradicionales.

diversos niveles educativos; se fundamenta además en sus vínculos con la comunidad matemática y con la de educadores matemáticos del país adquirida sobre la base de su prestigio personal y profesional, logrando estructurar un equipo de trabajo conformado por profesores de planta de la UNA, jóvenes e inexpertos en su mayoría; complementado con un equipo externo de asesores y colaboradores con gran experiencia y alta formación académica, equipo que en su conjunto se convirtió en una ágil y fuerte maquinaria de producción de materiales instruccionales para la educación a distancia y que además estructuró los respectivos diseños curriculares de las carreras a cargo del Área de Matemática.

Valga como anécdota que en un momento dado estábamos presentes a la vez cuatro generaciones: Narciso Rodríguez Ortega quien había sido profesor de Jesús en el Instituto Pedagógico, el propio Jesús, alumnos suyos como Arturo Reyes y quienes habíamos sido alumnos de sus alumnos. Ello es indicativo del poder de convocatoria que tuvo Jesús.

Como antes se señaló, buscó la colaboración de profesores destacados de esta disciplina, de distintas universidades del país, para la elaboración de los textos de matemática de la UNA. Los colaboradores eran personal académico de las principales casas de estudios superiores: Universidad Central de Venezuela (UCV), Universidad Simón Bolívar (USB), Universidad de Carabobo (UC), Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA). También hubo colaboración de personal adscrito al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC) y del Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC).

Fruto de este trabajo colectivo, bajo la sabia y eficiente dirección de Jesús, es la creación de dos carreras y la producción de una amplia bibliografía matemática, hechos que comentaremos de seguidas.

No sólo es remarcable lo extenso de la obra producida la cual suma más de 40 textos de Matemática para las distintas carreras de la UNA[9], hecho jamás realizado en el país y obras acerca de la enseñanza/aprendizaje de esta disciplina; sino que además él mismo participó como coautor en alrededor de 20 de estos textos. Dicha labor requirió superar un buen número de dificultades técnicas para poder materializarse.

También hay que destacar el que fomentó y organizó la licenciatura en Matemática en la UNA con una visión de futuro, al considerar dos menciones: Análisis Numérico y Probabilidades y Estadística.

Siempre tuvo en mente la calidad y excelencia de estás carreras, para lo cuál promovió distintos procesos de selección del personal de la universidad y la realización de cursos y reuniones de los profesores de matemática de la institución donde se discutían diversos aspectos de esta ciencia y de su enseñanza.

Su permanencia en la UNA se prolonga hasta el año de 1995 cuando sus múltiples problemas de salud le impiden continuar en esta labor.

Publicaciones resaltantes

En este rubro se encuentran varios escritos fruto de su labor investigativa en matemáticas en los cuales aborda temas de topología, teoría de distribuciones y teoría de números.

Además de los producidos en la UNA, cabe resaltar que en 1966 produce un Curso de Álgebra.

Estando en la Escuela de Matemática de la UCV escribió con el matemático japonés Jiro Tamura, con quien lo unió grandes lazos de amistad, el libro *Matemáticas Generales I*, publicado en dos partes en 1967-1968.

[9] La UNA ofrecía las carreras de: Matemática (con menciones en Análisis Numérico y en Probabilidades y Estadística), Ingeniería de Sistemas, Ingeniería Industrial, Administración, Contaduría y Educación (con menciones en Matemática, Preescolar y Dificultades del Aprendizaje).

Además elaboró un libro de matemática para el Séptimo Grado de Educación Básica, publicado en Caracas en 1987.

Algunos rasgos de su personalidad y otras facetas

Los problemas de salud signaron gran parte de la vida de este matemático quien a pesar de estas vicisitudes luchó contra ellas imponiendo su férrea voluntad para superarlas. Además de su lesión en la pierna tuvo que enfrentar otros problemas de salud: estomacales, cardíacos, oculares, los cuales nunca le amilanaron ni hicieron que mermara la calidad de su trabajo y el compromiso que mostraba en cada una de las actividades en las cuales se envolvía era de entrega total, mostrando además con su ejemplo el que se podían lograr cosas que para muchos de los que le acompañamos en algunas de estas iniciativas nos parecían casi imposibles de lograr.

Jesús mostraba además una disposición a trabajar en equipo y también su exultante entusiasmo y su disciplina eran transmitidos a sus colaboradores y compañeros de labores.

Otra característica resaltante de nuestro biografiado es su afición por los oficios manuales, especialmente la carpintería y los trabajos en metal, en los cuales más allá de ser un pasatiempo por el cual sintió especial predilección llegó a crear un pequeño taller en su casa logrando interesantes realizaciones.

Con respecto a sus concepciones políticas cabe destacar que su pensar era progresista abrazando el ideario de la izquierda. Ello le llevó a ser activista del Partido Comunista de Venezuela en la época de la dictadura de Marcos Pérez Jiménez, actividad que desarrollaba a la par de sus estudios y de ser docente de aula en diversas instituciones. Tuvo un fuerte nexo de amistad con el destacado dirigente comunista Pedro Ortega Díaz (fallecido en 2002) y su compromiso lo llevó a salvaguardar y enconchar a dirigentes políticos perseguidos.

Mantuvo en alto hasta el final de sus días sus ideales los cuales fueron también su guía para la acción.

Pero los aspectos vinculados a las luchas gremiales tampoco le fueron ajenos. Durante el período que corre entre noviembre 1976 y abril de 1978 se desempeñó en el ámbito gremial como representante de la Facultad de Ciencias ante la Asociación de Profesores de la UCV, siendo para 1977 vocal de la Junta Directiva de ese gremio.

Asimismo, dedicó tiempo a labores de corte gerencial: fue Gerente del Instituto de Previsión del Profesorado de la UCV.

Desafortunadamente, sus cerca de 30 intervenciones quirúrgicas no le permitieron seguir el ritmo de trabajo al cual estaba acostumbrado, viéndose obligado a retirarse de su vida académica en 1995.

Podemos concluir diciendo que a pesar de sus problemas de salud, con su pierna, estomacales y cardiacos, Jesús fue un hacedor y un luchador nato, que supo superar las dificultades que se le presentaron en la vida.

Reconocimientos recibidos

Además de diversas condecoraciones, como la *Orden 27 de junio* y la *Orden José María Vargas*, Jesús recibió el reconocimiento más preciado: el de sus alumnos, el cual se materializó entre otras manifestaciones siendo padrino de las promociones de profesores de matemáticas del Instituto Pedagógico de Caracas de los años 1964 y 1967.

El pasado seis de febrero de 2008 falleció Jesús S González, en la ciudad de Caracas, dejando un legado imperecedero para las futuras generaciones.

La Universidad Nacional Abierta, con la masiva asistencia de familiares, ex-alumnos, colegas y amigos, le rindió un sentido tributo *post mortem*. Asimismo, posteriormente su viuda acompañada por un grupo de amigos y colegas develó una placa en su honor a las puertas del Área de Matemática de la Universidad Nacional Abierta.

Homenaje post mortem realizado en la UNA (01/04/2008)
en el marco de la Cátedra "Mario Briceño Iragorry"

Placa homenaje develada frente al Área de Matemática de la UNA (13/06/2008)

Bibliografía

Cortés, Luis. (1974). Informe que presenta el Decano de la Facultad a la Asamblea de la Facultad. Caracas: Mimeo.

Escalona, Iván. (1979). Informe que presenta el Director a la Asamblea de Facultad. Escuela de Física y Matemática: Mimeo.

Escalona, Iván. (1981). Informe presentado por el Director de la Escuela de Física y Matemática al final de su gestión (abril 1979-junio 1981). Escuela de Física y Matemática: Mimeo.

Facultad de Ciencias. Correspondencia.

Facultad de Ciencias. (1970). Folleto Informativo. Caracas: Publicaciones del Servicio de Orientación.
Facultad de Ciencias. (1978). Prospecto de Estudios. Caracas: Publicaciones del Servicio de Orientación.
González, Jesús y Tamura, Jiro. (1967-1968). *Matemáticas Generales I (1ª Parte y 2ª Parte). Dos volúmenes.* Ciclo Básico, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
González, Jesús. (1984). Currículum Vitae. Caracas: Autor.
González, Jesús. (1987). *Matemáticas para 7º Grado*. Caracas: Editorial Interamericana de Venezuela, C. A.
González, Jesús. Documentos varios. Archivo personal.
ICME-3. (1976). Programa. Parte II. Karlsruhe: Autor
Leal, Ildefonso. (1981). Historia de la UCV 1721-1981. Caracas: Ediciones del Rectorado de la UCV.
Lindorf, Helga. (2008). *Primeros tiempos de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela*. Caracas: Fundación Amigos de la Facultad de Ciencias-Fondo Editorial de la Facultad de Ciencias.
Los allanamientos a la UCV. Hora Universitaria, Año 26, Nº 200, p. 23. Noviembre 2007.
Orellana, Mauricio. (1980). Dos décadas de matemática en Venezuela. Caracas: Universidad Nacional Abierta.
Orellana, Mauricio. (1984). Discurso homenaje del Prof. Jesús S. González. III Encuentro de Profesores de Didáctica de la Matemática de Institutos de Educación Superior. CENAMEC.

Walter O. Beyer K.,
Departamento de Matemáticas.
Universidad Nacional Abierta

Mauricio Orellana Chacín,
Departamento de Matemáticas.
Universidad Central de Venezuela

Sergio Rivas A.
Departamento de Matemáticas.
Universidad Nacional Abierta

INFORMACIÓN NACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda & Jos H. Nieto S.

En esta oportunidad reseñaremos la actividad olímpica de Enero a Mayo de 2009. Comenzamos por destacar el gran éxito alcanzado en nuestro evento nacional, el Programa de Olimpiadas Matemáticas, que consta de dos versiones, la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, para estudiantes de la Tercera Etapa de Educación Básica y los dos años de Educación Media y Diversificada y la Olimpiada Recreativa de Matemáticias, ORM, para niños de tercero a sexto grado de Educación Básica. Ambas competencias tienen al Canguro Matemático como su primera ronda. La participación en el Canguro Matemático superó por segundo año los 155.000 alumnos, provenientes de 23 estados del país, 59.000 de ellos pertenecientes a la OJM y el resto a la ORM. Esto nos hace ocupar una posición destacada entre los 41 países que este año organizaron el Canguro en todo el mundo. La prueba fue aplicada el 19 de Marzo, y en el caso de la Olimpiada Juvenil, el 10 % de los participantes en el Canguro clasificó para la segunda ronda. Una información interesante del Canguro Matemático se puede ver en `www.math-ksf.org`, o en `www.acm.org.ve`

Un mes después del Canguro Matemático, se llevó adelante la segunda fase de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, una prueba conformada por cinco problemas de desarrollo. En esta ronda los participantes reciben medallas de oro, plata y bronce en sus estados y los ganadores de medalla de oro participarán en la Final Nacional el día 6 de Junio en Margarita.

Manteniendo la tradición de los últimos años, hemos contado con el aporte de la Fundación Empresas Polar, Acumuladores Duncan, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, MRW, Casio, la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, y las universidades, UCV, USB, ULA, LUZ, URU, UDO, UNIMAR, UPEL, UC, UNEXPO y UCOLA.

Para finalizar mostramos los exámenes de la Prueba Regional de la OJM. La duración de la prueba es de tres horas y cada problema vale seis puntos.

Olimpiada Juvenil de Matemática – Prueba Regional
Séptimo y Octavo Grados de Educación Básica

Problema 1
Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un cuadrado. Si el área del cuadrado es 36m^2, ¿cuánto mide el lado del triángulo?

Problema 2
Un barril está lleno de agua. Lo vacías a la mitad y después le añades un litro de agua. Después de hacer esta operación (vaciar la mitad de lo que hay y añadir un litro) cinco veces seguidas, te quedan 3 litros de agua en el barril. ¿Cuántos litros de agua había en el barril inicialmente?

Problema 3
En un gran corral hay 2009 cabras, cada una de las cuales tiene piel oscura o clara. Un pastor compara las alturas de las cabras y encuentra que hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 8 de las de piel oscura, hay otra cabra de piel clara que es más alta que exactamente 9 de las de piel oscura, otra cabra de piel clara es más alta que exactamente 10 de las de piel oscura, y así sucesivamente, hasta llegar a la última cabra de piel clara, que es más alta que todas las de piel oscura. ¿Cuántas cabras de piel clara hay?

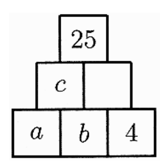
Problema 4
¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de nueve y tienen todos sus dígitos impares y diferentes?

Problema 5
Simón escribe una lista de números. El primero es 25, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, y el tercero es $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

Noveno Grado de Educación Básica

Problema 1
En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los *caballeros*, que siempre dicen la verdad, y los *pícaros*, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidos tres nativos de la isla llamados Apu, Bop y Cip. Apu dice “Los tres somos pícaros”. Bop dice “Exactamente uno de nosotros es caballero”. Cip no dice nada. ¿Qué es cada uno de ellos?

Problema 2
La suma de los números de dos cuadrados consecutivos (horizontalmente) es igual al número del cuadrado que está arriba de ellos, por ejemplo, $a + b = c$. Si la suma de los números en la fila inferior es 17, ¿cuál es el valor de a?

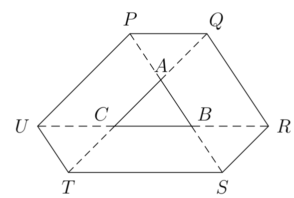


Problema 3
Tengo un número *abcd* de cuatro dígitos. Invierto el orden de los dígitos y tengo el número *dcba*. Al mayor le resto el menor y obtengo un número de cuatro dígitos donde tres de ellos son 1, 7 y 9. ¿Cuál es el dígito que falta?

Problema 4
Ana y Bruno juegan del siguiente modo: Ana tiene inicialmente 7 barajitas, de

las cuales debe descartar al menos una y a lo sumo la mitad, y pasarle las que queden a Bruno. Bruno hace lo mismo, es decir, descarta al menos una y no más de la mitad de las barajitas que recibió, y le pasa las que queden a Ana. Continúan jugando alternadamente de la misma manera hasta que uno de los dos reciba una sola barajita, en cuyo caso no puede continuar el juego y pierde. Pruebe que Bruno puede ganar siempre este juego, haga lo que haga Ana.

Problema 5
Los lados del triángulo ABC se prolongan por ambos lados hasta los puntos P, Q, R, S, T y U, de tal manera que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BS}$, $\overline{TC} = \overline{CA} = \overline{AQ}$ y $\overline{UC} = \overline{CB} = \overline{BR}$. Si el área de ABC es 1 cm^2, ¿cuál es el área del hexágono $PQRSTU$?



Primero y Segundo de Diversificado

Problema 1
Un arqueólogo estudia una antigua civilización que usaba un sistema de numeración posicional similar al nuestro, pero de base 5. Los símbolos para los dígitos eran $\triangle$, $\Diamond$, $\Box$, $\bigstar$ y $\triangledown$, que corresponden en algún orden a nuestros 0, 1, 2, 3 y 4. Por ejemplo, el número $\Diamond\triangledown\bigstar\Box$ debe interpretarse como $\Diamond \cdot 5^3 + \triangledown \cdot 5^2 + \bigstar \cdot 5 + \Box$, el problema es que no se conoce la correspondencia exacta entre símbolos y dígitos. Sin embargo, el arqueólogo descubrió que los tres números $\bigstar\triangledown\Diamond\Box$, $\bigstar\triangledown\Diamond\triangle$ y $\bigstar\triangledown\bigstar\triangledown$ son consecutivos y están ordenados de menor a mayor.
Halle el valor de cada símbolo y el de los tres números consecutivos.

Problema 2
Considere todos los números posibles de 8 cifras diferentes no nulas (como, por ejemplo, 73451962).

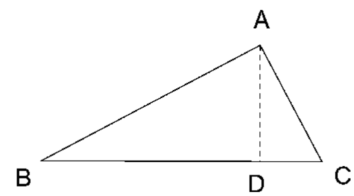
(a) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 5?
(b) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 9?

Problema 3
Si a y b son números distintos tales que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a+10b}{b+10a} = 2$, ¿cuánto vale $\dfrac{a}{b}$?

Problema 4
En una reunión de matemáticos, uno de ellos dijo: “Somos 9 menos que el doble

del producto de los dos dígitos de nuestro número total.” ¿Cuántos matemáticos había en la reunión?

Problema 5
Un triángulo ABC es rectángulo en A con $AB/AC = 3/2$. Si D es el pie de la altura trazada desde A y se sabe que $BD - DC = 5$, calcule el área del triángulo ABC.



Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

Jos H. Nieto S.
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. LUZ.
jhnieto@gmail.com

Encuentro de Matemáticas en honor al Prof. Lázaro Recht

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la Universidad Simón Bolívar

Caracas, 15 al 19 de junio de 2009

Tenemos el placer de anunciar el Encuentro de Matemáticas en honor al Profesor Lázaro Recht, a celebrarse en la Universidad Simón Bolívar, del 15 al 19 de junio de 2009.

Para el evento han sido invitados destacados investigadores, vinculados académicamente con el Profesor Recht, quienes dictarán cinco minicursos, en idioma español, dirigidos a estudiantes de matemáticas de pre y postgrado de las distintas universidades y centros de investigación a nivel nacional. Habrá, además, un espacio para carteles (posters) y charlas cortas de veinte minutos, destinado a contribuciones en Análisis y Geometría, áreas en las que el Profesor Recht ha realizado los aportes más significativos de su dilatada trayectoria académica.

Conferencistas Invitados:

- **Juan Carlos Álvarez**, Université de Lille, Francia. (Geometría).
- **Esteban Andruchow**, Instituto Argentino de Matemáticas (CONICET), Argentina. (Análisis)
- **Pedro Berrizbeitia**, Universidad Simón Bolívar, Venezuela. (Teoría de Números)
- **Gustavo Corach**, Instituto Argentino de Matemáticas (CONICET), Argentina. (Análisis)
- **Luis Mata Lorenzo**, Universidad Simón Bolívar, Venezuela; University of New Mexico, EEUU. (Conferencia plenaria)
- **Santiago R. Simanca**, University of New Mexico, EEUU. (Geometría)

Mini Cursos:

- La teoría de conexiones como la geometría de curvas en el grasmaniano, dictado por Juan Carlos Álvarez.

- Ideales de operadores, dictado por Esteban Andruchow
- Ciclotomía y algoritmos de primalidad, dictado por Pedro Berrizbeitia.
- Proyecciones oblicuas y aplicaciones a problemas de interpolación y muestreo de señales, dictado por Gustavo Corach.
- Geometría y topología, dictado por Santiago R. Simanca.

Para mayor información, visite la página web del evento:
`http://www.ma.usb.ve/~emlr2009`

Comité Organizador: Pedro Berrizbeitia (pedrob@usb.ve), María Rosa Brito (brito@usb.ve), Aurora Olivieri (olivieri@usb.ve) y Alfredo Ríos (alfrios@usb.ve) de la Universidad Simón Bolívar.

Comité Científico: Stefania Marcantognini (stefania@usb.ve) de IVIC/USB, José Carlos Martín (jmartin@usb.ve) de USB, Luis Mata (lmata@math.unm.edu) de USB/ University of New Mexico, y María Dolores Morán (mmoran@usb.ve) de UCV/USB. Carteles y Charlas Cortas: A los interesados en presentar un trabajo en Análisis o Geometría agradecemos enviar un mensaje a emlr2009@ma.usb.ve, con el título y un resumen del trabajo, antes del 30 de abril del 2009. El Comité Científico destinará cada trabajo para charla corta o cartel en función de la disponibilidad de tiempo.

Inscripción: El costo de la inscripción es de Bs.F. 200. Podrá ser cancelado en los primeros días del evento, al registrarse. No podemos aceptar pagos con tarjetas de crédito o cheque en moneda extranjera.

Preinscripción: Para proyectar el número de asistentes, solicitamos a los interesados confirmar su intención enviando un mensaje a emlr2009@ma.usb.ve. Incluir nombre, universidad de procedencia e indicar si es estudiante de postgrado, pregrado o profesor.

Financiamiento: Se dispone de fondos para ayudar a un número reducido de estudiantes de postgrado de universidades venezolanas. Los interesados en solicitar dichas ayudas podrán someter la solicitud enviando un mensaje a emlr2009@ma.usb.ve.

XXII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Mérida, 9 al 15 de septiembre de 2009

Cursos

1. Introducción a los sistemas dinámico parcialmente hiperbólicos.
   Martín Sambarino (Universidad de La República, Uruguay)

2. Polinomios ortogonales no estándar. Propiedades algebraicas y analíticas.
   Francisco Marcellán Español (Universidad Carlos III de Madrid) y Yamilet Quintana (Universidad Simón Bolívar)

3. Tópicos en variación regular.
   Philippe Soulier (Paris X- Nanterre)

4. Semigrupos de operadores en la teoría de espacios de Banach
   Manuel González (Universidad de Cantabria, Santander-España) y Antonio Martínez-Abejón. (Universidad de Oviedo, España)

Organización

Comité Organizador

- Neptalí Romero , Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
  nromero@uicm.ucla.edu.ve

- Oswaldo Araujo, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  araujo@ula.ve

- Carlos A. Di Prisco, Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
  cdiprisc@ivic.ve

Comité Cientfico

- Stella Brassesco, IVIC, Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
  sbrasses@ivic.ve

- Marisela Dominguez, Universidad Central de Venezuela
  marisela.dominguez@ciens.ucv.ve
- Neptalí Romero, Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
  nromero@uicm.ucla.edu.ve
- Carlos Uzcátegui, Universidad de Los Andes
  uzca@ula.ve
- Domingo Quiroz, Universidad Simón Bolívar
  dquiroz@usb.ve
- Ennis Rosas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
  erosas@sucre.udo.edu.ve

Comité Organizador Local

- Oswaldo Araujo (Coordinador), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes *araujo@ula.ve*
- María Luisa Colasante, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  marucola@ula.ve
- Ramón Pino, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  pino@ula.ve
- Giovanni Calderón, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  giovanni@ula.ve
- Blasdimir Ruiz
  bladismir@ula.ve
- Carlos Uzcátegui, Universidad de Los Andes
  uzca@ula.ve

XI CLAPEM

Club Puerto Azul– Naiguatá–Venezuela

1 al 6 de noviembre de 2009

El próximo Congreso Latinoamericano de Probabilidad y Estadística Matemática, XI CLAPEM se llevará a cabo en Venezuela con el auspicio de la Sociedad Latino Americana de Probabilidad y Estadística Matemática (SLAPEM), Capítulo Regional Latinoamericano de la Sociedad Bernoulli. El programa de esta edición incluye cursos, conferencias plenarias, sesiones temáticas y sesiones de comunicaciones orales y posters.

El Comité Científico está integrado por: José Rafael León (coordinador, Universidad Central de Venezuela), Jean-Marc Azaïs (Université Paul Sabatier, Toulouse, France), Jean Bertoin (Université Paris VI), Peter Bickel (University of California, Berkeley), David Elworthy (Warwick University, UK), Ricardo Fraiman (Universidad de la República, Uruguay), Graciela Gonzalez Farías (CIMAT, Mexico), Raul Gouet (Universidad de Chile), Jorge A. León (CINVESTAV, IPN, México), Carlos Matrán (Universidad de Valladolid, España), Alexandra M. Schmidt (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil) y Maria Eulália Vares (Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Brasil).

El Comité Organizador Local está integrado por: Stella Brassesco (coordinadora, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas), Carenne Ludeña (Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas), José Gregorio Marcano (Universidad de Carabobo), José Rafael León (Universidad Central de Venezuela), Lelys Bravo (Universidad Simón Bolívar) y Saba Infante (Universidad de Carabobo).

Cursos:

- **Distribuciones casi–estacionarias.** Prof. Servet Martnez, Universidad de Chile.
- **Calsificación y análisis de** *clusters* **para datos funcionales.** Prof. Ricardo Fraiman, Universidad de San Andrés, República Argentina y Universidad de la República, Uruguay.

Conferencistas:

Peter Bickel (University of California, Berkeley)
Peter Bühlmann (ETH, Zürich)
David Donoho (Stanford University)
Luis Gorostiza (CINVESTAV, IPN, México)

Greg Lawler (University of Chicago)
Peter Hall (University of Melbourne)
Marta Sanz–Solé (Universitat de Barcelona)
Vladas Sidoravicius (CWI/IMPA, Rio de Janeiro–Brasil)

Sesiones temáticas:

Probabilidades aplicadas a la biología, organizada por Sylvie Méléard
Modelaje del mar, organizada por Georg Lindgren
Estadística Bayesiana, organizada por Alicia Carriquiry
Estadística ambiental– auspiciada por TIES, organizada por Alexandra Schmidt y Lelys Bravo
Movimiento Browniano fraccionario, organizada por Cipriam Tudor
Procesos de Lévy, organizada por M. Emilia Caballero y Víctor Rivero
Mecánica estadística y sistemas de partículas, organizada por Pablo Ferrari
Medios aleatorios, organizada por Alejandro Ramírez
Interfase entre Probabilidades y Estadística, oganizada por Gabor Lugosi
Estadística Robusta, organizada por Alfonso Gordaliza
Estadística en tecnología de manufactura, organizada por Vijay Nair
Sesión en honor a Mario Wschebor, oganizada por J-M Azaïs
Matemáticas financieras, organizada por Jean-Charles Rochet
Probabilidad Cuántica, organizada por Roberto Quezada.
Análisis estocástico, organizada por Yves Le Jan
Estadística y Petróleo, organizada por Fran cois Wahl y Fabrice Gamboa.

Fechas importantes:

Recepción de resúmenes para presentación de comunicaciones orales o posters: **20 de marzo al 30 de junio**
Recepción de planillas de inscripción y reserva de alojamiento: **20 de marzo al 30 de septiembre**

Sitio electrónico: http://www.cesma.usb.ve/xiclapem/
contacto: xiclapem@gmail.com

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsability of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: http://boletinamv.ma.usb.ve/

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVI, Número 1, Año 2009