

# Sistemas de numeración, sistemas dinámicos substitutivos y fractales de Rauzy

Víctor F. Sirvent

## 1 Introducción

En este trabajo se presenta una introducción a la representación geométrica de sistemas dinámicos substitutivos. Estas representaciones geométricas se basan en sistemas de numeración *ad hoc* asociados a la substitución. Y se obtienen unos conjuntos fractales, conocidos como fractales de Rauzy. El objetivo de este trabajo es mostrar como estos tres conceptos están relacionados. Se comienza con dos ejemplos representativos, el caso Fibonacci y el caso Tribonacci, donde se exponen las ideas principales que luego son usadas en el caso general, el cual se presenta en la última sección.

Los sistemas dinámicos substitutivos o substituciones están muy ligados con la teoría de *tilings*, la cual no se expone aquí. Para ello ver [71, 67, 66]. Tampoco se presentan aquí los aspectos relacionados con la teoría ergódica asociada a este tipo de sistemas dinámicos.

## 2 El caso Fibonacci

Considere los números de Fibonacci  $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$  con  $f_0 = 1, f_1 = 1$ . A cada número natural  $n$  se le puede representar de manera única como suma de números de Fibonacci, siempre que no haya dos números de Fibonacci consecutivos. Es decir:

**Proposición 2.1 ([76])** *Dado  $n$  existe  $n_{i_0}, \dots, n_{i_k}$  tal que  $n = f_{n_{i_0}} + \dots + f_{n_{i_k}}$  con  $n_{i_j} > n_{i_{j-1}} + n_{i_{j-2}}$ , con  $2 \leq j \leq k$ .*

A esta representación de los números naturales se le llama *representación de Zeckendorff*.

Esto nos permite, escribir  $n = \sum_{i \geq 0} \epsilon_i(n) f_i$  donde  $\epsilon(n) = \epsilon_0(n) \epsilon_1(n) \dots$  es una sucesión infinita en  $\{0, 1\}$  tal que no contiene dos “1” consecutivos y su cola consiste de “0”. Consideremos la clausura de estas sucesiones en la topología producto de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  esto nos da el espacio:

$$\mathcal{F} = \{\underline{a} = a_0 a_1 \dots \mid a_i \cdot a_{i+1} = 0 \forall i\}.$$

Aquí  $\cdot$  es el producto usual de números enteros.

La relación de recurrencia de los números de Fibonacci está asociada a la ecuación polinómica  $x^2 = x + 1$ . La cual tiene como raíces  $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$ , la razón dorada, y  $\alpha = -1/\lambda$ .

**Proposición 2.2** Sea  $J = [-1, -1/\alpha]$ . Entonces

$$\left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i \mid a_0 a_1 \dots \in \mathcal{F} \right\} = J$$

**Demostración:** Como  $\alpha$  es negativo, se tiene que  $\sum_0^\infty \alpha^{2i} = -1/\alpha$  es la cota superior y  $\sum_0^\infty \alpha^{2i+1} = -1$  la cota inferior, por lo que

$$\left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i \mid a_0 a_1 \dots \in \mathcal{F} \right\} \subset [-1, -1/\alpha].$$

Por otro lado, considere las transformaciones  $h_1, h_2 : J \rightarrow J$ ,

$$h_1(x) = \alpha x \quad h_2(x) = \alpha^2 x + 1$$

Debido a que la unión de  $h_1(J)$ ,  $h_2(J)$  es  $J$  y sus interiores son disjuntos, a cada elemento  $x$  de  $J$  se le puede escribir de la forma:

$$x = \bigcap_{n \geq 1} h_{x_1} \cdots h_{x_n}(J)$$

para una cierta sucesión  $x_1 x_2 \dots$ , donde  $x_i = 1$  ó  $2$ . Debido a las expresiones de  $h_1, h_2$ , el elemento de  $\bigcap_{n \geq 0} h_{x_1} \cdots h_{x_n}(J)$  es de la forma  $\sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i$ , para un cierto  $\underline{a} \in \mathcal{F}$ .

Más aún, si se definen  $f_0, f_1 : J \rightarrow J$ ,

$$f_0(x) = \alpha x, \quad f_1(x) = \alpha x + 1$$

al elemento  $x = \sum a_i \alpha^i$ , se le expresa de la forma

$$x = \bigcap_{n \geq 0} f_{a_0} \cdots f_{a_n}(J).$$

Como  $h_1 = f_0$  y  $h_2 = f_1 \circ f_0$ , este hecho nos da la relación entre  $\underline{a}$  y la sucesión  $x_1 x_2 \dots$ . ■

A continuación se hará un paréntesis, en esta discusión, ya que se requiere introducir unos conceptos básicos de fractales.

**Definición 2.3** Un sistema iterativo de funciones o IFS (por sus siglas en inglés: *iterated function system*) consiste en un espacio métrico completo  $(X, d)$  junto con un conjunto finito de contracciones  $f_i : X \rightarrow X$  con constante de contracción  $0 \leq c_i < 1$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Se dice que el factor de contracción del IFS es  $c = \max\{c_i \mid i = 1, \dots, n\}$ .

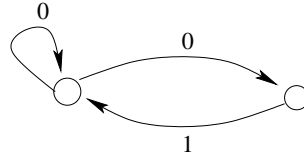


Figura 1: Grafo Fibonacci

Denotaremos por  $\mathcal{H}(X)$  el conjunto formado por todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . Este espacio tiene una distancia natural, la métrica de Hausdorff:

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta \mid A \subset B_\delta \text{ y } B \subset A_\delta\}$$

donde  $A_\delta = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \delta \text{ para algún } \delta\}$ . Si  $(X, d)$  es completo entonces  $(\mathcal{H}(X), d_H)$  también es completo.

**Teorema 2.4 (Hutchinson)** *Sea  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un IFS con factor de contracción  $c$ . Entonces la transformación  $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  definida por*

$$F(E) = \bigcup_{i=1}^n f_i(E)$$

para todo  $E \in \mathcal{H}(X)$ , es una contracción en  $(\mathcal{H}(X), d_H)$  con factor  $c$ .

Para la demostración del teorema véase [11, 20].

**Definición 2.5** *Al único punto fijo de la contracción del teorema 2.4 se le llama atractor del IFS.*

Este tipo de conjuntos fue introducido originalmente por Moran [35] y sin embargo su definición fue modificada posteriormente por Hutchinson [27].

En el caso que se presenta en la demostración de la Proposición 2.2, el par  $\{h_1, h_2\}$  forma un IFS y el intervalo  $J$  es su atractor. La relación entre las funciones  $h_i$  y  $f_i$ , nos permite presentar el IFS  $\{h_1, h_2\}$  de la siguiente manera: Considere el grafo dirigido, de la figura 1.

Note que todos los elementos de  $\mathcal{F}$  se obtienen como caminos infinitos en el grafo anterior. Como para cada elemento  $x$  de  $J$  existe un  $\underline{a} \in \mathcal{F}$  tal que  $x = \bigcap_{n \geq 0} f_{a_0} \cdots f_{a_n}(J)$ .

El par  $\{f_0, f_1\}$  junto con el grafo dirigido, es un ejemplo de un GIFS, teniendo a  $J$  como atractor.

Sea  $E = \{1, \dots, k\}$  y  $G_E$  un grafo dirigido primitivo con etiquetas en  $E$ . Sea  $\{h_1, \dots, h_k\}$  un IFS en un espacio métrico completo  $(X, d)$  y

$$\Sigma_{G_E} = \{a_0 a_1 \dots \in E^{\mathbb{N}} \mid a_0 a_1 \dots a_n \text{ es un camino en } E \forall n\}.$$

Se define la aplicación  $\pi : \Sigma_{G_E} \rightarrow X$ , donde  $\pi(\underline{a})$  es el único elemento de  $\bigcap_{i \geq 0} h_{a_i}(X)$ . El IFS  $\{h_1, \dots, h_k\}$  junto con  $\Sigma_{G_E}$  se le denomina *sistema iterativo de funciones controlado por el grafo dirigido* o simplemente GIFS, por sus siglas en inglés *graph-directed iterated function system*. Al conjunto formado por la imagen de  $\Sigma_{G_E}$  bajo  $\pi$ , se le denomina el atractor del GIFS.

En general, no todo atractor de un GIFS se puede presentar como el atractor de un IFS.

En  $\mathcal{F}$  se puede definir un sistema dinámico de la siguiente manera: cualquier elemento en  $\mathcal{F}$ , cuya cola consiste en “0”, corresponde a un número natural, por lo tanto se puede definir su consecutivo. Esto induce por continuidad una transformación continua  $T$  en  $\mathcal{F}$ . Al sistema dinámico  $(\mathcal{F}, T)$  se le denomina *sistema ádico de Fibonacci*. El cual es minimal, es decir toda órbita es densa en  $\mathcal{F}$ .

Sea la transformación

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{F} &\longrightarrow J \\ \underline{a} &\longmapsto \sum_{i \geq 0} a_i \alpha^i. \end{aligned}$$

La cual es sobreyectiva y continua. De la demostración anterior se tiene que  $\xi(\underline{a}) = \bigcap_{n \geq 0} f_{a_0} \dots f_{a_n}(J)$ . Más aún el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{T} & \mathcal{F} \\ \xi \downarrow & & \downarrow \xi \\ J & \xrightarrow{f} & J \end{array} \quad (2-1)$$

donde  $f(x) = x + 1 \pmod{J}$ .

Al sistema simbólico  $(\mathcal{F}, T)$  se le asocia el sistema “geométrico”  $(J, f)$ , de manera tal que existe una estrecha relación entre la estructura de las órbitas de ambos sistemas. Como la transformación  $\xi$  es sobreyectiva, el sistema  $(\mathcal{F}, T)$  tiene una estructura de órbitas más rica que  $(J, f)$ . Se dice que el sistema dinámico  $(J, f)$  es una realización geométrica del sistema ádico  $(\mathcal{F}, T)$ .

Esta dinámica tiene una estructura autosimilar. Nótese que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_{10}$  donde  $\mathcal{F}_0 = \{\underline{a} \in \mathcal{F} : a_0 = 0\}$  y  $\mathcal{F}_{10} = \{\underline{a} \in \mathcal{F} : a_0 = 1, a_1 = 0\}$ . Lo cual se puede expresar de la forma:  $\mathcal{F}_0 = \tau(\mathcal{F}_{10})$  y  $\mathcal{F}_{10} = T\tau^2(\mathcal{F})$ , donde  $\tau : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\tau(a_0 a_1 \dots) = 0 a_0 a_1 \dots$ . Es decir  $\mathcal{F}$  es el punto fijo del IFS:  $\{\tau, T\tau^2\}$ . Esta

estructura se refleja en la dinámica. Sea  $\tilde{T}$  la transformación inducida por  $T$  en  $\mathcal{F}_0$ , es decir,  $\tilde{T}(\underline{a}) = T^{N(\underline{a})}(\underline{a})$  donde  $N(\underline{a}) = \min\{n : T^n(\underline{a}) \in \mathcal{F}_0\}$ . Como el conjunto  $\mathcal{F}$  admite la partición  $\mathcal{F}_{00} = \tau(\mathcal{F}_0)$ ,  $\mathcal{F}_{010} = T\tau^2(\mathcal{F}_0)$ . Se tiene que  $\tilde{T}$  es  $T$  en  $\mathcal{F}_{010}$  y sobre  $\mathcal{F}_{00}$  es igual a  $T^2$ .

Esta estructura autosimilar se traduce en el intervalo  $J$  de la siguiente forma. Sea  $h : J \rightarrow J$  definido por  $h(x) = \alpha x$  y  $J_0 = h(J)$ ,  $J_{10} = fh^2(J)$ . Note que  $h = h_1$ ,  $fh = h_2$ , donde  $h_1, h_2$  son las transformaciones definidas en la demostración de la proposición 2.2. Como se mencionó anteriormente el par  $\{h, fh^2\}$  forma un IFS, cuyo atractor es el intervalo  $J$ .

**Substitución de Fibonacci:** Considere el alfabeto  $\mathcal{A} = \{a, b\}$  y  $\mathcal{A}^* = \cup_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$  el conjunto de palabras finitas en dicho alfabeto. Sea la transformación  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  dada por  $a \rightarrow ab, b \rightarrow a$ . La aplicación  $\zeta$  induce una transformación en  $\mathcal{A}^*$ , por juxtaposición de palabras:  $\zeta(UV) = \zeta(U)\zeta(V)$  y esta a su vez induce otra transformación en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . La cual se seguirá denotando por  $\zeta$ . Esta transformación es la *substitución de Fibonacci*. Note que la longitud de la palabra  $\zeta^i(a)$  es igual al número de Fibonacci  $f_i$ .

Esta transformación tiene un único punto fijo:

$$\mathbf{u} = \zeta^\infty(a) = abaababaaba \dots$$

Sea  $\sigma$  el “shift” en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ :  $\sigma(v_0v_1v_2\dots) = v_1v_2\dots$ , donde  $v_0v_1v_2\dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Se define

$$\Omega = \overline{\{\sigma^N(\underline{u}) : N \in \mathbb{N}\}}.$$

El sistema  $(\Omega, \sigma)$  se llama sistema dinámico asociado a la substitución  $\zeta$ . Es fácil verificar que dicho sistema dinámico es minimal.

Los sistemas dinámicos  $(\Omega, \sigma)$  y  $(\mathcal{F}, T)$  son isomorfos. El isomorfismo viene dado por el siguiente hecho. Sea  $U_N = u_0u_1\dots u_{N-1}$ , la palabra formada por los  $N$  primeros símbolos del punto fijo. Si la representación de Zeckendorff del número  $N$  es  $\sum_{j=0}^L \epsilon_j f_j$ , para un  $L$ . Entonces se tiene

$$U_N = \zeta^L(\delta(\epsilon_L)) \cdots \zeta(\delta(\epsilon_1))\delta(\epsilon_0)$$

donde  $\delta(0) = \emptyset$ , la palabra vacía y  $\delta(1) = a$ .

Por lo mencionado anteriormente se tiene que el sistema dinámico  $(J, f)$  es una realización geométrica del sistema simbólico  $(\Omega, \sigma)$ .

Se dice que el sistema dinámico simbólico  $(\Sigma, \sigma)$  se realiza *geométricamente* si existe un sistema dinámico  $(X, f)$  donde  $X$  es una estructura geométrica, por ejemplo una variedad diferenciable, y una aplicación  $\psi : \Sigma \rightarrow X$  continua y sobreyectiva tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array} \tag{2-2}$$

Al sistema  $(X, f)$  se le llama una *realización geométrica* de  $(\Sigma, \sigma)$ .

El tener una realización geométrica de un sistema simbólico nos permite codificar las órbitas del sistema geométrico, de manera tal que el itinerario de las órbitas viene dado por el sistema simbólico. Veamos como la codificación de las órbitas del sistema  $(J, f)$  viene dado por las sucesiones que se encuentran en  $\Omega$ . Sea  $\nu : J \rightarrow \{1, 2\}$ , dada por  $\nu(x) = i$  si  $x \in J_i$ , donde  $J_i = h_i(J)$ , para  $i = 1, 2$ . Aquí se considera a  $J, J_1, J_2$ , semiabiertos, cerrados a izquierda, para que  $\nu$  esté bien definida. Los intervalos  $J_i$  son los intervalos de continuidad de  $f$ . El itinerario o codificación de la órbita (futura), bajo  $f$ , del punto  $x$  de acuerdo con esta partición viene dado por la sucesión  $\{\nu(f^n(x))\}_{n \geq 0}$ , la cual denotaremos por  $\theta(x)$ .

Veamos que el itinerario de la órbita de  $x = 0$ , viene dado por  $\mathbf{u}$  el punto fijo de la substitución. Sea  $\tilde{f}$  la transformación inducida por  $f$  en  $J_1$ . Como  $J_1$  admite la partición dada por  $h(J_1), h(J_2)$ , el itinerario común de todos los puntos de  $h(J_1)$ , bajo  $f$ , es "12", mientras que bajo  $\tilde{f}$  es "1"; y para  $h(J_2)$  es "1" y "2" para  $f$  y  $\tilde{f}$  respectivamente. Así se tiene que la relación entre la codificación de la órbita de  $f$  y  $\tilde{f}$ , en  $J_1$ , viene dada precisamente por la substitución  $\zeta$ . Si ahora se continúa este proceso de inducción en  $h(J_1)$ , luego en  $h^2(J_1)$  y así sucesivamente, se tiene que en la etapa  $k$ -ésima el itinerario común de los puntos de  $h^k(J_1)$ , bajo  $f$ , es  $\zeta^{k+1}(1)$ . Mientras que bajo la transformación inducida en  $h^k(J_2)$ , es "1". En  $h^k(J_2)$  es  $\zeta^{k+1}(2)$  y "2" para  $f$  y la transformación inducida, en  $h^k(J)$ , respectivamente. Así la relación entre el itinerario de los puntos en  $h^k(J)$ , bajo  $f$  y la transformación inducida viene dada por  $\zeta^k$ . Como  $\bigcap_{k \geq 0} h^k(J) = \{0\}$ , se tiene que  $\theta(0) = \zeta^\infty(1) = \mathbf{u}$ .

Esto nos permite tener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 J & \xrightarrow{f} & J \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\
 \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega
 \end{array} \tag{2-3}$$

Resulta ser que la transformación  $\theta$  no es sobreyectiva, debido a la elección de intervalos semiabiertos en la partición de  $J$ . A cada elemento de  $J$ , su itinerario viene dado por un elemento de  $\Omega$ .

### 3 El caso tribonacci y el fractal de Rauzy

El caso tribonacci sigue las mismas ideas expuestas en la sección anterior, sin embargo hay ciertas diferencias, que se expondrán. Los números de tribonacci se obtienen de la relación de recurrencia:  $g_{k+3} = g_{k+2} + g_{k+1} + g_k$  con  $g_0 = 1, g_1 = 2$  y  $g_2 = 4$ . De manera similar al caso Fibonacci, existe una representación de

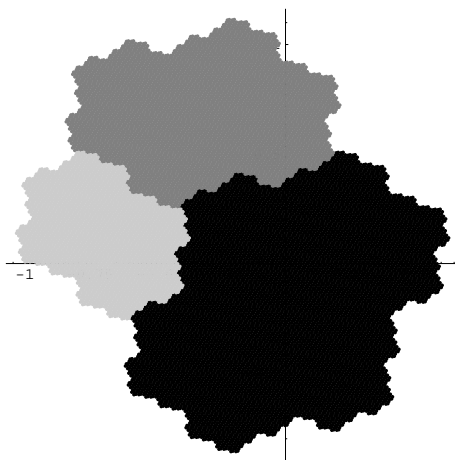


Figura 2: El fractal de Rauzy y su descomposición autosimilar.

Zeckendorff, asociada a esta familia de números. Lo cual nos permite representar  $n = \sum_{i \geq 0} \epsilon_i(n)g_i$ , aquí  $\epsilon(n) = \epsilon_0(n)\epsilon_1(n)\dots$  es una sucesión infinita en  $\{0, 1\}$  tal que no contiene tres “1” consecutivos y su cola está formada por “0”. Así obtenemos, la clausura de tales sucesiones:

$$\mathcal{T} = \{\underline{a} = a_0a_1\dots \mid a_i \cdot a_{i+1} \cdot a_{i+2} = 0 \forall i\}.$$

En el espacio  $\mathcal{T}$  se define una dinámica ádica  $T$ , siendo el sistema dinámico  $(\mathcal{T}, T)$  minimal.

La ecuación asociada a esta relación de recurrencia es  $x^3 = x^2 + x + 1$ , la cual tiene como raíz real  $\lambda$  y  $\beta, \bar{\beta}$  como raíces complejas. Al conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \beta^i \mid a_0a_1\dots \in \mathcal{T} \right\}$$

se le llama el *Fractal de Rauzy*. Este objeto geométrico fue introducido originalmente por G. Rauzy en [49].

El conjunto  $\mathcal{R}$  es compacto, conexo, simplemente conexo [49]. Su frontera es fractal, con dimensión de Hausdorff no entera, la cual ha sido estudiada en [28, 57, 33].

De manera similar a la expuesto en la demostracion de la proposición 2.2, el fractal de Rauzy es el atractor del IFS, formado por las transformaciones  $\{h_1, h_2, h_3\}$ , las cuales están definidas en el plano complejo de la siguiente manera:

$$h_1(z) = \beta z \quad h_2(z) = \beta^2 z + 1 \quad h_3(z) = \beta^3 z + \beta^2 + 1.$$

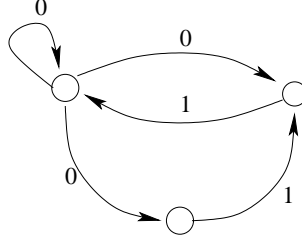


Figura 3: Grafo tribonacci

Esto nos da la siguiente estructura autosimilar en  $\mathcal{R}$ , sean  $\mathcal{R}_1 = h_1(\mathcal{R})$ ,  $\mathcal{R}_2 = h_2(\mathcal{R})$  y  $\mathcal{R}_3 = h_3(\mathcal{R})$ . Estos conjuntos tienen interior disjuntos y su unión nos da todo  $\mathcal{R}$ . Más adelante mostraremos la relevancia dinámica de esta descomposición autosimilar.

Este IFS, se puede presentar como un GIFS. Considere el grafo dirigido, de la figura 3

Todos los elementos de  $\mathcal{T}$  se obtienen como caminos infinitos en este grafo. Sean las transformaciones:  $f_0(z) = \beta z$ ,  $f_1(z) = \beta z + 1$ . Como  $h_1 = f_0$ ,  $h_2 = f_1 f_0$ ,  $h_3 = f_1^2 f_0$ , se tiene que el IFS  $\{h_1, h_2, h_3\}$  se obtiene del GIFS dado por el grafo anterior y las transformaciones  $\{f_0, f_1\}$  y su atractor es precisamente el fractal de Rauzy  $\mathcal{R}$ .

La dinámica ádica se realiza geoméricamente de la siguiente manera. Sea

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{R}} : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ \underline{a} &\longmapsto \sum_{i \geq 0} a_i \beta^i. \end{aligned}$$

Como en el caso Fibonacci, se tiene  $\xi_{\mathcal{R}}(\underline{a}) = \bigcap_{n \geq 0} f_{a_0} \cdots f_{a_n}(\mathcal{R})$ . Esta aplicación es sobreyectiva y continua, y genera el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{T} & \mathcal{T} \\ \xi_{\mathcal{R}} \downarrow & & \downarrow \xi_{\mathcal{R}} \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{F} & \mathcal{R} \end{array} \quad (3-4)$$

donde la transformación  $F$  intercambia tres subregiones autosimilares de  $\mathcal{R}$ , descritas anteriormente [49]. Obviamente esta transformación  $F$  no es continua.



Sin embargo, resulta ser que  $\mathcal{R}$  es un dominio fundamental para el toro 2-dimensional,  $\mathbb{T}^2$ , y la transformación  $F$  se convierte en una translación definida por un vector con componentes racionalmente independientes [49], en el toro. Obteniendo de esta manera el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \xrightarrow{T} & \mathcal{T} \\
 \widehat{\xi}_{\mathcal{R}} \downarrow & & \downarrow \widehat{\xi}_{\mathcal{R}} \\
 \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \mathbb{T}^2
 \end{array} \tag{3-5}$$

Donde  $\widehat{\xi}_{\mathcal{R}}$  y  $\widehat{F}$ , son las transformaciones que se obtienen de  $\xi_{\mathcal{R}}$  y  $F$ , al tomar el cociente bajo el lattice que convierte a  $\mathcal{R}$  en un dominio fundamental de  $\mathbb{T}^2$ .

Se pueden definir subconjuntos dinámicos de  $\mathcal{R}$ , prohibiendo ciertas subpalabras finitas en  $\mathcal{T}$ . En estos conjuntos se tiene una dinámica inducida. Las propiedades dinámicas y geométricas de estos sistemas han sido estudiadas en [54, 56, 61]

Veamos ahora como esta dinámica está relacionada con substituciones.

**Substitución Tribonacci:** Considere el alfabeto  $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$  y  $\mathcal{A}^* = \cup_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$  el conjunto de palabras finitas en dicho alfabeto. Sea la transformación  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  dada por  $a \rightarrow ab, b \rightarrow ac, c \rightarrow a$ . Como se explicó en el caso Fibonacci, esta transformación induce otra en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , la cual tiene un único punto fijo:  $\mathbf{u} = \zeta^{\infty}(a)$ . A él se le asocia el sistema dinámico minimal  $(\Omega, \sigma)$ , donde  $\Omega$  es la clausura bajo el “shift”,  $\sigma$ , del punto fijo  $\mathbf{u}$ . Este sistema dinámico se relaciona con el sistema ádico de manera similar al caso Fibonacci. Teniendo que  $(\Omega, \sigma)$  y  $(\mathcal{T}, T)$  son isomorfos. Por lo que  $(\mathbb{T}^2, \widehat{F})$  es una realización geométrica de  $(\Omega, \sigma)$ .

Por la construcción anterior si se codifica la órbita del origen bajo  $\widehat{F}$ , usando las regiones  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ , se obtiene  $\mathbf{u}$ , el punto fijo de la substitución. Más aún el itinerario de la órbita de cada punto bajo  $\widehat{F}$ , usando la partición anterior nos da un elemento de  $\Omega$ .

**k-bonacci substituciones:** Las construcciones expuestas anteriormente para los caso Fibonacci y tribonacci se generalizan de manera inmediata para el caso k-bonacci. Los números k-bonacci son aquellos que se obtienen de la relación de recurrencia de grado k:  $g_{n+k} = g_{n+k-1} + \dots + g_{n+1} + g_n$ , para  $n \geq 0$ , con  $g_j = 2^j$  para  $j = 0, \dots, k - 1$ . A ellos se le asocia el sistema ádico  $(\mathcal{T}(k), T)$ , donde  $\mathcal{T}(k)$  es, como antes, la clausura de las sucesiones de “0” y “1” asociada a la representación de Zeckendorf:

$$\mathcal{T}(k) = \{ \underline{a} = a_0 a_1 \dots \mid \prod_{j=0}^{k-1} a_{i+j} = 0 \forall i \}.$$

Y también se les asocia las siguientes substitutiones:

$$\zeta_k : \begin{cases} 1 & \rightarrow 12 \\ 2 & \rightarrow 13 \\ & \vdots \\ k-1 & \rightarrow 1k \\ k & \rightarrow 1. \end{cases}$$

El polinomio asociado la relación de recurrencia de  $k$ -bonacci es  $x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1$ . El cual tiene una única raíz real mayor que 1, en valor absoluto,  $\lambda$ . En el caso  $k$  impar las otras raíces son  $\beta_1, \overline{\beta_1}, \dots, \beta_l, \overline{\beta_l}$ , en el caso  $k$  impar las raíces son  $\beta_1, \overline{\beta_1}, \dots, \beta_l, \overline{\beta_l}, \omega$  donde las  $\beta_j$  son complejas no reales y  $w$  real. Todos ellas tienen norma menor que 1.

El fractal de Rauzy asociado a la substitution  $\zeta_k$  es el objeto en  $\mathbb{C}^l \approx \mathbb{R}^{2l} = \mathbb{R}^{k-1}$ , si  $k$  es impar, o en  $\mathbb{C}^l \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{2l+1} = \mathbb{R}^{k-1}$ , si  $k$  es par; definido por:

$$\mathcal{R}(k) = \left\{ \left( \sum_{i \geq 0} a_i \beta_1^i, \dots, \sum_{i \geq 0} a_i \beta_l^i, \sum_{i \geq 0} a_i \omega^i \right) \mid \underline{a} \in \mathcal{T}(k) \right\}.$$

Este conjunto es compacto, conexo y es igual a la clausura de su interior [67]. También tiene una estructura autosimilar, que nos da una partición natural en  $k$  sub-regiones. El IFS que nos da esta estructura autosimilar, es una generalización inmediata del IFS, definido en el caso tribonacci.

En  $\mathcal{R}(k)$  se define una transformación que intercambia los  $k$  subregiones autosimilares. Más aún  $\mathcal{R}(k)$  es un dominio fundamental para el toro  $(k-1)$ -dimensional, y la transformación de intercambio de subregiones se convierte en una traslación dada por un vector con componentes racionalmente independientes.

Estas  $k$  regiones nos dan que la codificación de las órbitas de la traslación vienen dadas por elementos del sistema dinámico asociado a  $\zeta_k$ .

## 4 Caso general

Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto finito y  $\zeta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  una substitution. La cual induce una transformación en el espacio de sucesiones infinitas (hacia un lado) sobre  $\mathcal{A}$ , tal como se explicó en los casos particulares estudiados anteriormente. Se está interesado en los puntos fijos de  $\zeta$  o de  $\zeta^k$  para algún  $k$ . Estos siempre existen, cuando la longitud de la palabra  $\zeta^n(a)$  va a infinito, para todo  $a$  del alfabeto  $\mathcal{A}$ , cuando  $n$  crece. Si se remueven del alfabeto los símbolos que no aparecen en el punto fijo, se tiene que existe un símbolo que se denotará por 1, tal que  $\zeta(1)$  comience por 1. Bajo estas condiciones se tiene  $\mathbf{u}$  un punto fijo de la substitution  $\zeta$ , tal que  $\mathbf{u} = \zeta^\infty(1)$ . A esta sucesión se le asocia el sistema

dinámico  $(\Omega, \sigma)$  tal como se describió en los ejemplos anteriores. Este sistema dinámico es minimal si y sólo si para todo  $a \in \mathcal{A}$  existe un  $k$  tal que  $\zeta^k(a)$  contiene el símbolo 1.

Un ejemplo de importancia histórica es la substitución de Thue-Morse:

$$\zeta : \begin{cases} 0 \rightarrow 01 \\ 1 \rightarrow 10. \end{cases}$$

Esta substitución tiene dos puntos fijos:  $\zeta^\infty(0) = 01101001\dots$  y  $\zeta^\infty(1) = 10010110\dots$ . Nótese que se obtiene una sucesión de la otra intercambiando 0 por 1 y viceversa. Esta sucesión ha aparecido en varias áreas de la matemática. Originalmente surgió en el año 1851 en [46], estudiando potencias de números, luego fue introducida por Thue [73] al estudiar sucesiones no periódicas y posteriormente por Morse [36] al estudiar flujos geodésicos sobre superficies de curvatura negativa. Existe una amplia bibliografía sobre esta substitución. A diferencia de los ejemplos estudiados en las secciones anteriormente. Esta substitución es de longitud constante, es decir, la longitud de la palabra imagen de cada símbolo del alfabeto es la misma.

A la substitución  $\zeta$  se le asocia su *matriz de incidencia*  $M = M(\zeta)$ , donde sus elementos  $M_{ij}$  es el número de veces que aparece el símbolo  $i$  en  $\zeta(j)$ .

Se dice que una matriz  $M$  es *positiva* si sus elementos son enteros no-negativos.  $M$  es *primitiva* si existe un número positivo  $k$  tal que  $M^k$  es positiva.

**Teorema 4.1 (Perron-Frobenius)** *Sea  $M$  una matriz positiva primitiva. Entonces  $M$  admite un autovalor estrictamente positivo  $\lambda$ , tal que  $\lambda > |\beta|$  para cualquier otro autovalor  $\beta$  de  $M$ . El autovalor  $\lambda$  es simple. Más aún, existe un autovector estrictamente positivo que corresponde con  $\lambda$ .*

Al autovector  $\lambda$  y al correspondiente autovector positivo del teorema anterior se le conoce como autovalor y autovector de Perron-Frobenius, respectivamente.

Se dice que la substitución  $\zeta$  es primitiva si su matriz  $M = M(\zeta)$  es primitiva. La substitución  $\zeta$  es *Pisot unimodular* si  $|\det(M)| = 1$ , el polinomio característico de  $M$  es irreducible en  $\mathbb{Q}$  y este tiene una raíz real mayor que 1 y sus otras raíces tienen norma estrictamente menor que 1. La raíz mayor es el autovalor de Perron-Frobenius de la matriz  $M$ . Toda substitución de Pisot unimodular es primitiva [14].

La frecuencia con que aparecen los símbolos en la sucesión viene dada por el autovector de Perron-Frobenius de la matriz de incidencia. Muchas otras propiedades métricas del sistema dinámico substitutivo, vienen del autovalor de Perron-Frobenius y su correspondiente autovector.

Una propiedad importante de los sistemas dinámicos substitutivos es que

son auto-inducidos, es decir el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\
 \zeta \downarrow & & \downarrow \zeta \\
 \zeta(\Omega) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \zeta(\Omega)
 \end{array} \tag{4-6}$$

donde  $(\Omega, \sigma)$  es el sistema que proviene de la substitución  $\zeta$ , y  $\tilde{\sigma}$  es la transformación inducida de  $\sigma$  en  $\zeta(\Omega)$ , o sea  $\tilde{\sigma}(\mathbf{v}) = \sigma^{n(\mathbf{v})}(\mathbf{v})$ , donde  $n(\mathbf{v})$  es el tiempo de retorno de  $\mathbf{v}$  en  $\zeta(\Omega)$ . La transformación  $\zeta : \Omega \rightarrow \zeta(\Omega)$  es continua y sobreyectiva. Esta propiedad de las substituciones induce una estructura autosimilar en el espacio  $\Omega$ .

#### 4.1 Sistemas de numeración y autómatas de Prefijos asociados a substituciones

Sea  $\zeta$  una substitución primitiva con un único punto fijo  $\mathbf{u} = \zeta^\infty(1)$  tal que  $u_0 = 1$ . A estas substituciones se le puede asociar un sistema de numeración basado en el autómata de prefijos.

**Definición 4.2** *Un autómata es una quintupla  $(S, L, t, i, f)$  donde  $S$  es el conjunto de estados,  $L$  las etiquetas,  $t : S \times S \rightarrow L$  la función de transición,  $i$  los estados iniciales y  $f$  los estados finales del autómata.*

Al autómata se representará por un grafo dirigido con etiquetas, donde los vértices están dados por  $S$ , las etiquetas por  $L$ , las transiciones por la función  $t$ . Se considerarán los caminos sobre el autómata que comiencen en los estados iniciales y terminen en los estados finales. En [18] se encuentra descrita la teoría general de autómatas.

El autómata de prefijos de  $\zeta$  se define en [50] de la siguiente manera:

- El conjunto de los estados es el alfabeto  $\mathcal{A}$ .
- El conjunto de etiquetas está formado por los prefijos propios de las palabras obtenidas al aplicar  $\zeta$  a cada elemento del alfabeto. Se admite la palabra vacía  $\emptyset$  como prefijo propio. Este conjunto se denotará por Pref.
- Transiciones: Si  $p, q$  son estados del autómata y  $W$  una palabra de Pref entonces existe una transición de  $p$  a  $q$  etiquetada por  $W$ , si y sólo si la palabra  $Wq$  es prefijo de  $\zeta(p)$ .
- El estado inicial es “1”.
- Todos los estados son estados de salida o finales.

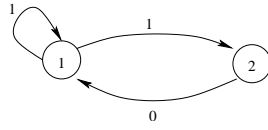


Figura 4: Autómata de prefijos asociado a la sustitución de Fibonacci

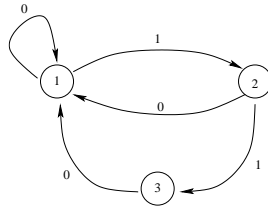


Figura 5: Autómata de prefijos asociado a la sustitución de Tribonacci

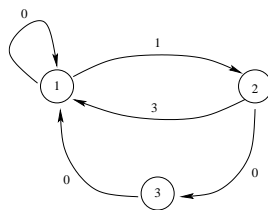


Figura 6: Autómata de prefijos asociado a la sustitución  $1 \rightarrow 12$ ,  $2 \rightarrow 13$ ,  $3 \rightarrow 1$

Estos autómatas tienen la propiedad:

**Teorema 4.3 ([50])** *Sea  $U$  un prefijo no vacío de  $\mathbf{u}$ , el punto fijo de la substitución  $\zeta$ . Entonces existe un único camino en el autómata de prefijos, comenzando por el estado 1 y etiquetado por  $(W(n), W(n-1), \dots, W(0))$  tal que  $W(n) \neq \emptyset$ , la palabra vacía, y  $U = \zeta^n(W(n))\zeta^{n-1}(W(n-1)) \dots W(0)$ .*

*Recíprocamente, a cualquiera de estos caminos le corresponde un prefijo de  $\mathbf{u}$ , dado por la fórmula anterior.*

De acuerdo con este teorema, se puede escribir  $u_0 \dots u_{n-1}$  los primeros  $n$  símbolos de  $\mathbf{u}$  así:  $u_0 \dots u_{n-1} = \zeta^k(W(k))\zeta^{k-1}(W(k-1)) \dots W(0)$ . Por lo tanto  $n = |\zeta^k(W(k))| + |\zeta^{k-1}(W(k-1))| + \dots + |W(0)|$  donde  $|W|$  denota la longitud de la palabra  $W$ . De esta forma se tiene un sistema de numeración basado en el autómata de prefijos. Como se vió en las secciones anteriores, si se toma la substitución de Fibonacci, el sistema de numeración que se obtiene es el sistema de Zeckendroff, similarmente en el caso  $k$ -bonacci.

De manera análoga se puede definir el autómata de sufijos y se tiene el mismo sistema de numeración [50, 51].

En [17] se encuentra una versión general del Teorema 4.3 y en [22] un estudio general de sistemas de numeración basados en relaciones de recurrencia y en autómatas. Con los sistemas de numeración basados en substituciones se pueden definir operaciones binarias en los naturales que dan origen a semigrupos aritméticos que son representaciones de la estructura autosimilar de los sistemas dinámicos asociados a las substituciones, para detalles véase [55, 58]. Otra operación binaria en los naturales asociada a substituciones es la multiplicación de Fibonacci, la cual ha sido estudiada en [30, 7, 34]. En [21, 44] se pueden ver otros semigrupos aritméticos.

## 4.2 Sistemas ádicos

El sistema dinámico  $(\Omega, \sigma)$  asociado a la substitución  $\zeta$ , admite una representación equivalente llamada sistema ádico. Sea

$$\mathcal{N} = \{ \underline{a} = a_0 a_1 \dots \in \text{Pref}^{\mathbb{Z}^+} \mid a_n \dots a_0 \text{ es un camino en Aut para todo } n \in \mathbb{Z}^+ \}$$

donde Aut es el autómata de prefijos de  $\zeta$ .

Como todos los caminos finitos en Aut corresponden a números naturales, se puede definir una transformación continua  $T$  en  $\mathcal{N}$ , que es la extensión de la adición por 1 en los enteros. De esta forma se tiene el sistema dinámico  $(\mathcal{N}, T)$ , el cual es llamado sistema ádico de  $\zeta$ . Este sistema también es llamado odómetro o máquina de sumar. Para más detalles sobre sistemas ádicos véase [74, 24].

Toda substitución minimal es isomorfa a su transformación ádica ([26]).

### 4.3 Representación geométrica de $(\Omega, \sigma)$

Sea  $\mathcal{A}^*$  el monoide generado sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$  donde está definida la substitución  $\zeta$ , la cual satisface las propiedades requeridas en la sección anterior, y  $(G, +)$  un grupo topológico dotado de una distancia. Sea  $\Delta : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  una transformación tal que  $\Delta(UV) = \Delta(U) + \Delta(V)$  y que  $\Delta(\zeta^n(U))$  converge exponencialmente a cero. Sea  $a_n \dots a_0$  un camino finito en el autómata de prefijos de  $\zeta$ . Por el teorema 4.3 existe  $W \in \mathcal{A}^*$  tal que  $W = \zeta^n(a_n) \dots a_0$  por lo tanto  $\Delta(W) = \Delta(\zeta^n(a_n)) + \dots + \Delta(a_0)$ . Esto nos permite introducir la transformación:  $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow G$ , donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de donde esta definido el sistema ádico. La cual está definida así:  $\Phi(\underline{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta(\zeta^i(a_i))$  se observa que no tiene problemas de definición por la propiedad de convergencia. Sea  $\mathbf{u} = \zeta(\mathbf{u}) = U_n \sigma^n(\mathbf{u})$  se define la transformación  $\delta : \Omega \rightarrow G$  de la siguiente manera  $\delta(\mathbf{u}) = \Delta(U_n) + \delta(\sigma^n(\mathbf{u}))$ . Como  $\mathbf{u} = \zeta^\infty(1)$  se define  $\delta(\mathbf{u}) = 0$ , por lo tanto  $\delta(\sigma^n(\mathbf{u})) = -\Delta(U_n)$ . Sea  $\mathbf{v}$  un elemento de  $\Omega$ , se puede escribir  $\mathbf{v} = v_0 \sigma(\mathbf{v})$  por lo que  $\delta(\sigma(\mathbf{v})) = \delta(\mathbf{v}) - \Delta(v_0)$ . Por lo que podemos resumir que al *shift*  $\sigma$  en  $\Omega$  le corresponde una translación en un número finito de pedazos, en  $G$ . La naturaleza del grupo  $(G, +)$  y de la aplicación  $\Delta$  depende del tipo de substitución, en particular de  $M = M(\zeta)$  la matriz asociada a la substitución.

Sea  $\zeta$  una substitución de longitud constante, se define  $\Delta(U) = |U|$  la longitud de la palabra de  $U$ , es decir la distancia  $p$ -ádica, la cual tiene la propiedad  $\Delta(\zeta(U)) = p\Delta(U)$ , donde  $p$  es la longitud de la substitución. Por lo tanto

$$\Phi(\underline{a}) = |a_0| + p|a_1| + \dots + p^n|a_n| + \dots$$

La dinámica del *shift* se realiza como una translación en  $-1$  sobre los números  $p$ -ádicos. En el caso de la substitución de Thue-Morse, ésta se realiza como una translación en  $-1$  sobre los números 2-ádicos [23].

En caso que  $\zeta$  sea Pisot unitaria en un alfabeto de  $k$  elementos se toma  $G = \mathbb{R}^{k-1}$  y

$$\Delta(U) = |U| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(U) \\ \vdots \\ r_{k-1}(U) \end{pmatrix}, \tag{4-7}$$

donde  $(v_1, \dots, v_k)$  es el autovector positivo de Perron-Frobenius de la matriz  $M$  y  $r_i(U)$  es el número de veces que se encuentra el símbolo  $i$  en la palabra  $U$ . Esta aplicación tiene la propiedad  $\Delta(UV) = \Delta(U) + \Delta(V)$  y  $\Delta(\zeta(U)) = B\Delta(U)$  donde  $B$  es la restricción de la matriz  $B$  al autoespacio contractivo de  $M$  [49]. Por lo que  $\Phi(\underline{a}) = \sum_{i \geq 0} B^i \Delta(a_i)$ . Esta suma converge ya que los autovalores de  $B$  están todos en el interior del círculo unitario y los  $a_i$  son finitos ya que son prefijos propios de la substitución. De esta manera

$$\delta(\Omega) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} B^i \Delta(a_i) \mid \underline{a} \in \mathcal{N} \right\}$$

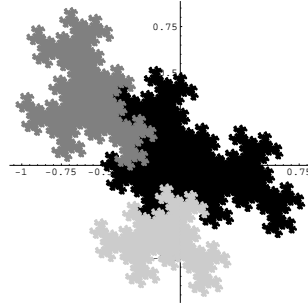


Figura 7: El fractal de Rauzy de la sustitución  $1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ .

A este conjunto se le conoce como el *Fractal de Rauzy* asociado a la sustitución  $\zeta$ .

Como se vió antes

$$\begin{aligned} \delta(\sigma(\mathbf{v})) &= \delta(\mathbf{v}) - \Delta(v_0) \\ &= \delta(\mathbf{v}) - \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} + e_{v_0} \end{aligned}$$

donde  $e_j = (0, \dots, 0)$  si  $j = k$  y en el caso  $j \neq k$  es el vector canónico en la dirección  $j$ -ésima. Por lo que *shift* se puede realizar como una translación en  $k$  direcciones en  $\mathbb{R}^{k-1}$ , lo cual es un intercambio de  $k$  pedazos en  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Más aún el conjunto  $\delta(\Omega)$  es un dominio fundamental del toro  $(k-1)$ -dimensional y el shift se realiza como una translación sobre el toro,  $\mathbb{T}^{k-1}$ . [49, 70, 15]. La translación viene dada por el vector  $(v_1, \dots, v_k)$ , cuyas componentes son racionalmente independientes.

Se puede cambiar la definición de  $\Delta$ , cambiando coordenadas. Si  $\Delta(U) = |U|(w_1 + \dots + w_{k-1})$  donde  $w_1, \dots, w_{k-1}$  es una base del espacio contractivo de  $M$ , se tiene que  $\Delta(UV) = \Delta(U) + \Delta(V)$  y  $\Delta(\zeta(U)) = A\Delta(U)$ , donde  $A$  es una matriz equivalente a  $B$ . Por lo tanto se puede escribir a la transformación  $\Phi$  de la siguiente manera:

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} \sum_{i \geq 0} \beta_1^i \Delta(a_i) \\ \vdots \\ \sum_{i \geq 0} \beta_l^i \Delta(a_i) \end{pmatrix}$$

donde  $\beta_1, \dots, \beta_l$  son los autovalores de norma menores que uno de la matriz  $M$ .

En el ejemplo de la sustitución tribonacci, esta es la construcción presentada en la sección anterior.



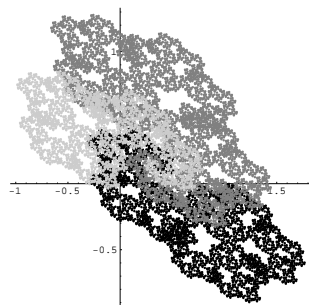


Figura 8: El fractal de Rauzy de la substitución  $1 \rightarrow 32, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2$ .

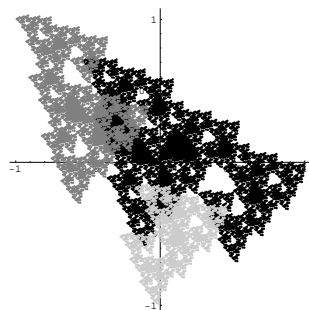


Figura 9: El fractal de Rauzy de la substitución  $1 \rightarrow 12, 2 \rightarrow 31, 3 \rightarrow 1$ .

Los fractales de Rauzy son conjuntos cerrados, de interior no vacío y coinciden con la clausura de su interior [67].

Por otro lado los fractales de Rauzy se pueden obtener como atractores de GIFS, donde el grafo asociado es el grafo del automata de prefijos donde los lados que unen vértices, se le ha dado la orientación opuesta. Para más detalles ver [26, 67].

## Referencias

- [1] R. Adler, Symbolic dynamics and Markov Partition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **35**, (1998), 1-56.
- [2] V. Afraimovich, Pesin's dimension for Poincaré recurrences, *Chaos*, **7** (1997), 12-20.
- [3] V. Afraimovich, Poincaré recurrences of couple subsystems in synchronized regimes, *Taiwanese J. of Math.* **3** (1999), 139-161.
- [4] V. Afraimovich, A. Maass and J. Urias, Symbolic dynamics for sticky sets in Hamiltonian systems, *Nonlinearity*, **13** (2000), 617-637.
- [5] V. Afraimovich, J. Schmeling, E. Ugalde and J. Urias, Spectra of dimensions for Poincaré recurrences, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **6**, (2000), 901-914.
- [6] V. Afraimovich and G.M. Zaslavsky. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincaré recurrences, *Physical Review E* **55** (1997), 5418-5426.
- [7] P. Arnoux, Some remarks about Fibonacci multiplication, *Appl. Math. Lett.* **2** (1989), 319-320.
- [8] P. Arnoux, *Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques*, Habilitation, Université D'Aix-Marseille II, 1991.
- [9] P. Arnoux and S. Ito, Pisot substitutions and Rauzy fractals, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **8** (2001), 181-207.
- [10] P. Arnoux and G. Rauzy, Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$ , *Bull. Soc. Math. France*, **119**, (1991), 199-215.
- [11] M.F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Second Edition, Academic Press Professional, London, 1993.
- [12] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, Wiley, 1965, New York.
- [13] H. Bruin, Dimensions of recurrence times and minimal subshifts. *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, 117-124, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

- 
- [14] V. Canterini and A. Siegel, Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), 353–369.
- [15] V. Canterini and A. Siegel, Geometric Representation of primitive substitution of Pisot type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353** (2001), 5121–5144
- [16] F.M. Dekking, Recurrent Sets, *Adv. Math.* **44** (1982), 78–104.
- [17] J.M. Dumont et A. Thomas, Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions, *Theoretical Computer Science*, **65** (1989), 153–169.
- [18] S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Academic Press, New York, 1974.
- [19] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985, Cambridge.
- [20] K. Falconer, *Fractal Geometry - Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, 1990, Chichester.
- [21] A.S. Fraenkel, H. Porta and K.B. Stolarsky, Some arithmetic semigroups, in *Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Paul T. Bateman*, edited by B.C. Berndt et al., Birkhauser: Boston 1990, 255–264.
- [22] C. Frougny, Representations of numbers and finite automata, *Math. Systems Theory*, **25** (1992), 37–60.
- [23] W.H. Gottschalk, Substitution minimal sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **109**, (1963), 467–491
- [24] P.J. Grabner, P. Liardet and R. Tichy, Odometers and systems of numeration, *Acta Arithmetica*, **70** (1995), 103–123.
- [25] C. Holton and L. Zamboni, Geometric realization of substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, **126** (1998), 149–179.
- [26] C. Holton and L. Zamboni, Directed graphs and substitutions. *Theory Comput. Sys.* **34** (2001), 545–564.
- [27] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana U. Math. J.* **30** (1981), 713–747.
- [28] S. Ito and M. Kimura, On the Rauzy fractal, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **8** (1991), 461–486.
- [29] D.E. Knuth, *The art of computer programming*, Vol 2, Seminumerical Algorithms, Addison–Wesley, Reading MA, 1981.
- [30] D.E. Knuth, Fibonacci multiplication, *Appl. Math. Lett.*, **1** (1988), 57–60.
- [31] D. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.

- [32] R.D. Mauldin and S.C. Williams, Hausdorff dimension in graph directed constructions, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* **309** (1988), 811-829.
- [33] A. Messaoudi, Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe, *Acta Arith.* **95** (2000), 195-224.
- [34] A. Messaoudi, Tribonacci multiplication. *Appl. Math. Lett.* **15** (2002), no. 8, 981-985.
- [35] P.A.P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **42**, (1946), 15-23.
- [36] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **22**, (1921), 84-110.
- [37] M. Morse, *Symbolic Dynamics, Lectures of 1937-38*, Notes by Rufus Oldenburger, The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1966.
- [38] M. Morse and G. Hedlund, Symbolic dynamics, *Amer. J. of Math.*, **60**, (1938), 286-303.
- [39] M. Morse and G. Hedlund, Symbolic dynamics II: sturmian trajectories, *Amer. J. of Math.*, **62**, (1940), 1-42
- [40] S. Ngai, V.F. Sirvent, J.J.P. Veerman and Y. Wang, 2-Reptiles in the Plane, *Geometriae Dedicata*, **82** (2000), 325-344.
- [41] V. Penné, B. Saussol and S. Vaienti, Dimensions for recurrence times: topological and dynamical properties, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **5** (1999), 783-798.
- [42] C. Petronio, Thurston's solitaire tilings of the plane. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **26** (1994) 261-295.
- [43] Y.B. Pesin, *Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications*. Chicago Lectures in Mathematics, The University Chicago Press (1997).
- [44] H. Porta and K.B. Stolarsky, Wythoff pairs as semigroup invariants, *Advances in Math.*, **85** (1991), 69-82.
- [45] B. Praggastis, Numeration systems and Markov partitions from self-similar tilings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 3315-3349.
- [46] E. Prouhet, Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **33**, (1851), 31.
- [47] Pytheas Fogg *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics* Editors: V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, et al., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1794, Springer Verlag 2002

- 
- [48] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems -Spectral Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1294, Springer-Verlag, 1987, Berlin.
- [49] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), 147-178.
- [50] G. Rauzy, Sequences Defined by Iterated Morphisms, in *Sequences* (Napoles/Positano, 1988), Edited by R.M. Capocelli, Springer, New York, 1990, 275-286.
- [51] G. Rauzy, Rotations sur les groupes, nombres algébriques et substitutions, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* **21** (1988), 1-12.
- [52] G. Rauzy, Numbers and automata. *Formal properties of finite automata and applications* (Ramatuelle, 1988), 176-185, Lecture Notes in Comput. Sci., 386, Springer, Berlin, 1989.
- [53] V.F. Sirvent, Properties of Geometrical Realizations of Substitutions associated to a Family of Pisot Numbers, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1993.
- [54] V.F. Sirvent, Relationships between the dynamical systems associated to the Rauzy substitutions, *Theoret. Comput. Sci.* **164** (1996), 41-57.
- [55] V.F. Sirvent, A semigroup associated with k-bonacci numbers with dynamic interpretation, *The Fibonacci Quarterly*, **35** (1997), 335-340.
- [56] V.F. Sirvent, On some dynamical subsets of the Rauzy Fractal, *Theoret. Comput. Sci.* **180** (1997), 363-370.
- [57] V.F. Sirvent, Identifications and dimension of the Rauzy Fractal, *Fractals* **5** (1997), 281-294.
- [58] V.F. Sirvent, Semigroups and the self-similar structure of the flipped tribonacci substitution, *Applied Mathematics Letters*, **12** (1999), 25-29.
- [59] V.F. Sirvent, *Modelos geométricos asociados a substituciones*, Trabajo de ascenso, Universidad Simón Bolívar, 1998.
- [60] V.F. Sirvent, Geodesic laminations as geometric realizations of Pisot substitutions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* (2000), **20**, 1253-1266.
- [61] V.F. Sirvent, The common dynamics of the tribonacci substitutions, *Bull. Belgian Math. Soc.* **7**, (2000), 571-582.
- [62] V.F. Sirvent, The Arnoux semi-conjugacy is Hölder continuous, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2001), **259**, 357-367.
- [63] V.F. Sirvent, Spectra of recurrence dimension for adic systems. *Stochastics and Dynamics*, **2** (2002), 599-608.

- [64] V.F. Sirvent, Geodesic laminations as geometric realizations of Arnoux-Rauzy sequences, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **10** (2003), 221-229.
- [65] V.F. Sirvent, Hilbert's Space Filling Curves and Geodesic Laminations, *Mathematical Physics Electronic Journal*, **9** (2003)
- [66] V.F. Sirvent and B. Solomyak, Pure Discrete Spectrum for One-dimensional Substitution Systems of Pisot Type . *Canad. Math. Bull.*, **45** (2002), 697-710.
- [67] V.F. Sirvent and Y. Wang, Self-Affine Tiling Via Substitution Dynamical Systems and Rauzy Fractals. *Pacific Journal of Mathematics*, **206** (2002), 465-485.
- [68] B. Solomyak, A dynamical system with a discrete spectrum (Russian), *Uspekhi Mat. Nauk* **41** (1986), 209-210. English translation: *Russian Math. Surveys* **41** (1986), 219-220.
- [69] B. Solomyak, Substitutions, adic transformations, and beta-expansions, *Symbolic dynamics and its applications*(New Haven, CT, 1991), 361-372, *Contemp. Math.*, **135**, AMS, Providence, 1992.
- [70] B. Solomyak, *On the spectral theory of adic transformations*, *Advances in Soviet Mathematics*, **9** (1992), 217-230.
- [71] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17**, (1997), no. 3, 695-738.
- [72] W. Thurston, Groups, tilings, and finite state automata, *AMS Colloquium Lecture Notes*, unpublished, 1889.
- [73] A. Thue, Uber unendliche Zeichenreihen (1906), *Selected mathematical papers of Axel Thue*, Universitetsforlaget, 1977.
- [74] A.M. Vershik, Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators, *Soviet. Math. Dokl.*, **24** (1981), 97-100.
- [75] A.M. Vershik, Arithmetic Isomorphism of Hyperbolic Toral Automorphisms and Sofic Shifts, UDC 519.56, 517.919.
- [76] E. Zeckendorf, Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **3-4**, 1972, 179-182.

VÍCTOR SIRVENT  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS,  
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR,  
APARTADO 89000, CARACAS 1086-A, VENEZUELA.  
sirvent@ma.usb.ve