Uma classe de séries infinitas envolvendo termos de seqüências generalizadas

João Luiz Martins e Adilson J. V. Brandão

Resumen

In this article we introduce a recurrence formula for certain infinite series whose terms include factors that belong to a generalized Horadam-type sequence. This recurrence formula is used to calculate the sum of the series $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n$ without the need of derivatives and at a lower computational cost. Some results are apresented below which were obtained by numerical implementation of the recurrence formula for some particular values of k and x.

1 Introdução

Neste artigo, considera-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \tag{1}$$

em que x é um número real, k é um inteiro não-negativo e $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ é uma seqüência numérica arbitrária. Aplicando-se o critério da razão [6] a (1), observa-se que sua convergência está diretamente ligada ao caráter (comportamento) da seqüência $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Uma questão que se coloca é a seguinte: a partir da escolha de seqüências $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ que venham possibilitar que expressões do tipo $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sejam seqüências convergentes, é possível obter uma fórmula para a soma da série (1)?

A finalidade deste trabalho é responder essa questão para o caso em que $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$, são seqüências dadas recursivamente por

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n\,, \quad n \geq 0; \tag{2}$$

sendo $W_0 = 0$, $W_1 = 1$ valores iniciais, p e q inteiros arbitrários.

Usando-se a forma de Binet [3] e o método das diferenças finitas [1], mostra-se, mediante o fato de que $p^2 \geq 4q$ que a seqüência $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para o limite $\alpha_+ = (p + \sqrt{p^2 - 4q})/2$ se $p > 0$ e para $\alpha_- = (p - \sqrt{p^2 - 4q})/2$ se $p < 0$.

Em seguida, obtém-se a identidade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n = \frac{x}{1 - px + qx^2} \tag{3}$$

sempre que $x \in (-1/\alpha_\pm, 1/\alpha_\pm)$.

É possível encontrar uma fórmula de recorrência para a soma da série (1), mediante a utilização da identidade (3), do desenvolvimento binomial de Newton [6] e de alguns rearranjos dos termos dessa série.

A importância da fórmula para a soma dessa série está no fato de que a implementação numérica fica facilitada pela sua característica de recursividade. Algumas somas para a série (1), utilizando-se essa fórmula, são apresentadas para os casos especiais em que os coeficientes são as seqüências de Fibonacci, Pell, das Médias Aritméticas e dos Naturais.

2 Preliminares

Considere a seqüência $\{W_n = W_n(0, 1, p, q)\}_{n=0}^{\infty}$, estabelecida em [3], [4] e [5], dada pela fórmula de recorrência

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n; \tag{4}$$

onde p e q são inteiros arbitrários.

A forma de Binet [3] para W_n é dada por,

$$W_n = \left(\alpha_+^n - \alpha_-^n\right)/\sqrt{\Delta}; \tag{5}$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$,

$$\alpha_+ = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_- = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{6}$$

são as raízes distintas da equação $x^2 - px + q = 0$.

Considerando $p^2 \geq 4q$ e fazendo uso das expressões (5) e (6), é fácil ver que a seqüência

$$\left\{\frac{W_{n+1}}{W_n}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{7}$$

converge para α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$.

A próxima seção é destinada ao estabelecimento de uma fórmula de recorrência para a soma da série

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k W_n x^n; \tag{8}$$

sendo $\{W_n\}$ a seqüência (4), x um número real e k um inteiro não-negativo.

3 Fórmula de Recorrência

Antes de apresentarmos a soma da série (8), vamos estabelecer alguns resultados que deverão ser úteis na especificação dessa soma.

A série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n x^n, \tag{9}$$

converge sempre que $|x| < 1/\alpha_{\pm}$ (α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$).

Além disso, sua soma é a função

$$S(x) = \frac{x}{1 - px + qx^2}. \tag{10}$$

De fato, a convergência da série (8) pode ser vista mediante o uso do teste da razão [6] e do fato de (7) ter como limite $\alpha_{\pm}$. Para mostrar que (10) é a soma de (9), considere

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n \\ &= W_1 x + W_2 x^2 + \ldots + W_n x^n + \ldots . \end{aligned} \tag{11}$$

Multiplicando (11) por $-px$, obtém-se

$$-pxS(x) = -pW_1x^2 - \ldots - pW_n x^{n+1} - \ldots . \tag{12}$$

Depois, multiplicando (11) por qx^2, tem-se

$$qx^2 S(x) = qW_1 x^3 + qW_2 x^4 + \ldots + qW_n x^{n+2} - \ldots . \tag{13}$$

Finalmente, somando as expressões (11), (12) e (13) e fazendo uso da fórmula de recorrência (4), obtém-se

$$S(x) = \frac{x}{1 - px + qx^2}\,, \tag{14}$$

que é a soma da série (9).

É óbvio que, dentro do intervalo de convergência, a série (8) pode ser obtida através da aplicação na série (9) do teorema de derivação termo a termo [6].

De fato, tal fórmula é obtida aplicando-se o operador $D = \frac{xd}{dx}$, k vezes na conhecida série (9).

Definindo

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \,, \tag{15}$$

uma fórmula de recorrência pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(x,0) &= \frac{x}{1-px+qx^2}, \\ S(x,j) &= D[S(x,j-1)] \quad j = 1,2,\ldots,k. \end{aligned} \tag{16}$$

O problema do algoritmo (16) é o alto custo de, em cada passo, obter a derivada de uma função. Por isso, encontrar uma soma para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nW_n}{2^n}$ não parece difícil, a partir do algoritmo (16). Entretanto, para determinar a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}W_n}{2^n}$, aplicando-se esse algoritmo, a obtenção do resultado torna-se bem exaustivo e computacionalmente muito caro.

Um dos propósitos deste artigo é obter uma outra fórmula de recorrência para a série (8) sem o uso de derivadas e a um custo computacional mais baixo.

Inicialmente, apresenta-se uma expressão para a soma

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} W_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n - \sum_{n=1}^{k-1} W_n x^n. \tag{17}$$

Utilizando a identidade (9), tem-se

$$\begin{aligned} R(x,k) &= \frac{x}{1-px+qx^2} - \\ &- (W_1 x + W_2 x^2 + W_3 x^3 + \ldots + W_{k-1} x^{k-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

Efetuando a soma em (18) e usando a fórmula (4), obtém-se

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} W_n x^n = \frac{W_k x^k + W_{k-1} x^{k+1}}{1-px+qx^2}. \tag{19}$$

Através do uso do teste da razão [6] e do fato estabelecido em (5), (6) e (7), é fácil ver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \tag{20}$$

converge sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_\pm}$.

Com o intuito de obter uma fórmula de recorrência para a série (8), considera-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \sum_{r=1}^{+\infty} n^k W_r x^r \\ &= 1^k W_1 x + 2^k W_2 x^2 + \ldots + n^k W_r x^r + \ldots . \end{aligned} \tag{21}$$

Mas,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k)(W_1 x + W_2 x^2 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &+ (2^k - 1^k)(W_2 x^2 + W_3 x^3 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &+ (3^k - 2^k)(W_3 x^3 + W_4 x^4 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k)(W_k x^k + \ldots + \ldots). \end{aligned} \tag{22}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k)\sum_{r=1}^{+\infty} W_r x^r + \\ &+ (2^k - 1^k)\sum_{r=2}^{+\infty} W_r x^r + \\ &+ (3^k - 2^k)\sum_{r=3}^{+\infty} W_r x^r + \ldots + \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k)\sum_{r=n}^{\infty} W_r x^r + \ldots . \end{aligned} \tag{23}$$

Utilizando a identidade (19), segue então que

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[n^k - (n-1)^k](W_n x^n + W_{n-1} x^{n+1})}{(1 - px + qx^2)} \tag{24}$$

sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_{\pm}}$.

Separando (24) em duas séries e utilizando uma mudança de variável na segunda série do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \\ &= \frac{1}{1-px+qx^2}\sum_{n=1}^{+\infty}[n^k-(n-1)^k]W_nx^n \\ &+ \frac{1}{1-px+qx^2}\sum_{r=0}^{+\infty}[(r+1)^k-(r)^k]W_rx^{r+2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Usando o desenvolvimento binomial e rearranjando os termos integrantes de (25), encontra-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \frac{1}{1-px+qx^2} \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}n^{k-j}W_nx^n+\right. \\ &+ \left. x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}n^{k-j}W_nx^n\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Portanto,

$$S(x,k) = \frac{1}{1-px+qx^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}[(-1)^{j+1}+x^2]S(x,k-j)\right) \tag{27}$$

sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_{\pm}}$.

A fórmula de recorrência (27) permite obter a soma de séries do tipo (8) a um custo computacional pequeno em comparação ao algoritmo (16).

4 Somas de Séries Especiais

Esta seção tem a finalidade de apresentar a soma de séries do tipo (8) em que $\{W_n\} = \{F_n\}$, $\{W_n\} = \{P_n\}$, $\{M_n = W_n = (W_{n-1} + W_{n-2})/2\}$ e $\{N_n = W_n = 2W_{n-1} - W_{n-2}\}$, que são as seqüências de Fibonacci, Pell, das médias aritméticas e dos naturais, [2], [3], [4] e [7], respectivamente.

<u>**Soma da Série de Fibonacci**</u>. A seqüência de Fibonacci $\{F_n\}$ é obtida de (4), tomando $p = 1$ e $q = -1$. Para obter a soma da série de Fibonacci

$$S_F(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k F_n x^n, \tag{28}$$

basta substituir $p = 1$ e $q = -1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_F(x,k) = \frac{1}{1-x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_F(x, k-j), \tag{29}$$

válido para $|x| < \frac{1}{\phi}$; com $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>**Soma da Série de Pell**</u>. A seqüência de Pell $\{P_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = 2$ e $q = -1$. A soma da série de Pell

$$S_P(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P_n x^n \tag{30}$$

é dada a partir da substituição de $p = 2$ e $q = -1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_P(x,k) = \frac{1}{1-2x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_P(x, k-j) \tag{31}$$

sempre que $|x| < \frac{1}{\gamma}$; com $\gamma = 1 + \sqrt{2}$.

<u>**Soma da Série das Médias**</u>. A seqüência das Médias aritméticas $\{M_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$. A soma da série das Médias aritméticas

$$S_M(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k M_n x^n \tag{32}$$

é dada a partir da substituição de $p = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$ em (27). O resultado é dado por

$$S_M(x,k) = \frac{2}{2-x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_M(x, k-j) \tag{33}$$

sempre que $|x| < 1$. Observa-se que, mesmo que p e q sejam números não inteiros, ainda assim é possívell obter uma fórmula de recorrência para a soma da série (1).

Soma da Série dos Naturais. A seqüência dos Naturais $\{N_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = 2$ e $q = 1$. A soma da série dos Naturais

$$S_N(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k N_n x^n \tag{34}$$

é dada a partir da substituição de $p = 2$ e $q = 1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_N(x,k) = \frac{1}{1-2x+x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_N(x, k-j) \tag{35}$$

sempre que $|x| < 1$.

5 Implementação Numérica

Esta seção tem por finalidade introduzir alguns exemplos númericos gerados pelos algoritmos (29), (31), (33) e (35). As Tabelas (I), (II), (III) e (IV), apresentam certos resultados de somas envolvendo esses algoritmos, para alguns valores especiais de k e de x dentro dos seus respectivos intervalos de convergências.

Tabela (I): Somas da Série de Fibonacci

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	1.041	6.288×10^2	1.656×10^{73}	4.105×10^{175}
$1/3$	1.2	9.688×10^2	6.526×10^{74}	5.932×10^{178}
$1/e$	1.692	2.752×10^3	4.667×10^{78}	2.549×10^{186}
$1/5$	0.360	2.598×10	2.893×10^{61}	2.130×10^{152}
$-1/3$	-0.247	-0.349×10	-1.01×10^{54}	-3.639×10^{137}

Tabela (II): Somas da Série de Pell

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	5.104	1.271×10^5	3.835×10^{93}	1.105×10^{216}
$1/3$	7.5	4.036×10^5	7.042×10^{97}	3.074×10^{224}
$1/e$	25	1.522×10^7	1.771×10^{111}	1.062×10^{251}
$1/5$	0.663	2.848×10^2	1.150×10^{71}	2.749×10^{171}
$-1/3$	-0.153	-0.784	-7.970×10^{48}	-3.594×10^{127}

Tabela (III): Somas da Série das Médias Aritméticas

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	0.561	0.684×10^2	5.417×10^{64}	5.858×10^{158}
$1/3$	0.612	0.898×10^2	5.236×10^{65}	5.232×10^{160}
$1/e$	0.745	1.655×10^3	9.320×10^{67}	1.495×10^{165}
$1/5$	0.268	0.741×10	3.561×10^{56}	3.681×10^{142}
$-1/3$	-0.30	-0.678×10	-1.986×10^{56}	-1.197×10^{142}

Tabela (IV): Somas da Série dos Naturais

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	1.623	2.914×10^3	1.374×10^{79}	2.340×10^{187}
$1/3$	1.875	4.431×10^3	4.596×10^{80}	2.425×10^{190}
$1/e$	2.616	1.169×10^4	1.559×10^{84}	2.345×10^{197}
$1/5$	0.507	1.031×10^2	9.715×10^{66}	2.138×10^{163}
$-1/3$	-0.11	-0.003×10^2	-3.34×10^{46}	-8.275×10^{122}

6 Observações Finais

O leitor pode observar que aplicou-se a fórmula de recorrência (27) para obter a soma da série (32), mesmo sabendo-se que p e q não eram inteiros. Na verdade, estamos investigando novas fórmulas de recorrências para seqüências do tipo (4) em que p e q estejam em outros domínios e as condições iniciais sejam as mais gerais possíveis. Além disso, alguns resultados análogos aos obtidos anteriormente, mediante o uso da seqüência com a notação (4), bem como, séries cujos coeficientes sejam as seqüências Tribonacci, Tetrabonacci, dentre outras, deverão ser objetos de futuros trabalhos.

Referencias

[1] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira, Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Harbra Ltda, 1988.

[2] R. A. Dunlap, The Golden Ration and Fibonacci Numbers, World Scientific, 1997.

[3] P. Filipponi, Evaluation of Certain Infinite Series Involving Terms of Generalized Sequences. *The Fibonacci Quarterly* **38.4** (2000): 310-316.

[4] N. Gauthier, Identities for Class of Sums Involving Horadam's Generalized Numbers $\{Z_n\}$. *The Fibonacci Quarterly* **36.4** (1998): 295-304.

[5] A.F.Horadam, Basic Properties of a certain generalized sequence of numbers. The Fibonacci Quarterly **3.2** (1965): 161-176.

[6] K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, Dover Publications Inc, New York, 1990.

[7] G. Ledin, On a Certain Kind of Fibonacci Sums. The Fibonacci Quarterly **5.1** (1967): 45-58.

[8] E. L. Lima, Curso de Análise, IMPA (Projeto Euclides), 1976.

João Luiz Martins e Adilson J.V. Brandão
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto,MG, Brasil
jmartins@iceb.ufop.br