Conjuntos donde se alcanza la norma de Besov

Wilmer ARZOLAY y Julio RAMOS

Resumen

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario complejo y denotemos por $B_p = B_p(\mathbb{D})$, al espacio de Besov, donde $p > 1$. En este artículo damos condiciones necesarias y suficientes para que la norma de funciones $f \in B_p$ se alcance por integración sobre un subconjunto medible G del disco unitario.

1 Introducción

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario en el plano complejo $\mathbb{C}$, para $1 < p < \infty$, el espacio de Besov $B_p = B_p(\mathbb{D})$, es el espacio de las funciones analíticas f sobre $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_{B_p} := \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

donde $dA(z) = \dfrac{1}{\pi} r dr d\theta$, $z = re^{i\theta}$ es la medida bidimensional normalizada de Lebesgue. Es conocido que B_p es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{B_p}.$$

En este artículo damos condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto medible G del disco unitario $\mathbb{D}$ sea *dominante* para el espacio de Besov B_p, $p > 1$, esto es, para que se verifique

$$\|f\|_{B_p}^p < C \int_G \left(1 - |z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z),$$

donde la constante $C > 0$ no depende de las funciones $f \in B_p$.

Nuestro interés proviene de un artículo de D. Luecking [Lu] donde se aborda este tipo de problema para los espacios de Bergman (sin peso) clásico $A^p(\mathbb{D})$; pero bajo otra perspectiva, como lo es tratar de dar condiciones a un conjunto $G \subset \mathbb{D}$ para que el operador $f \mapsto f|_G$ de $A^p(\mathbb{D})$ en $L^p(G)$ tenga rango cerrado.

Hemos seguido el esquema de demostración de Luecking haciendo énfasis en las modificaciones necesarias debido a la presencia de la derivada f' y de la función radial $\left(1-|z|^2\right)^{p-2}$ y hemos caracterizado los conjuntos dominantes en el espacio de Besov B_p con $p>1$. El resultado que tenemos lo podemos formular como sigue, donde $|F|$ denotará la medida normalizada de un subconjunto medible F del disco $\mathbb{D}$.

Teorema 1.1 *Sea G un conjunto medible del disco unitario $\mathbb{D}$, sea $p>1$. Existe una constante $C>1$ tal que*

$$\|f\|_{B_p}^p < C\int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2}|f'(z)|^p\,dA(z)\,, \tag{1}$$

para toda $f\in B_p$, si y sólo si existe una constante $\delta>0$ tal que

$$|G\cap D| > \delta\,|\mathbb{D}\cap D| \tag{2}$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z|=1$.

La demostración del Teorema 1.1 se reparte a lo largo del trabajo. En la Sección 2, esbozamos, a manera de preliminares, algunos lemas donde se establece que la condición (2) es equivalente a condiciones similares pero con discos seudo-hiperbólicos y discos euclídeos $D(a)$ con centro en $a\in\mathbb{D}$ y radio $\eta\,(1-|a|)$ contenidos en $\mathbb{D}$; también se demostrará una acotación integral que nos permitirá concluir el teorema. En la Sección 3 se completa la prueba del teorema donde se hace intervenir la condición (1) propia de los conjuntos dominantes.

2 Preliminares

Sea $a\in\mathbb{D}$ y fijemos $\eta\in(0,1)$, denotaremos por $D(a)$ al conjunto:

$$D(a)=D(a,\eta)=\{z\in\mathbb{D}:|z-a|<\eta\,(1-|a|)\}\,,$$

entonces $D(a)$ es un disco euclídeo totalmente contenido en $\mathbb{D}$ y por tanto, para todo $z\in D(a)$ se cumple $|a|-\eta\,(1-|a|)<|z|<|a|+\eta\,(1-|a|)$; luego, podemos afirmar que existe una constante $C_0=C_0(\eta,p)>0$ tal que

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2}\le C_0\left(1-|z|^2\right)^{p-2} \tag{3}$$

para todo $z\in D(a)$.

Los discos $D(a)$ serán un buen sustituto de los disco con centro en la frontera, tal como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.1 *Supongamos que existe una constante* $\delta > 0$ *tal que*

$$|G \cap D| > \delta \, |\mathbb{D} \cap D| \tag{4}$$

para todo disco D *cuyo centro está sobre* $|z| = 1$*. Entonces existen constantes* $\delta_0 > 0$ *y* $\eta \in (0,1)$*, que dependen sólo de* δ *tal que*

$$|G \cap D\,(a)| > \delta_0 \, |D\,(a)| \tag{5}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$*.*

Demostración. Supongamos que el conjunto G satisface la condición en (4) y sea $a \in \mathbb{D}$. Denotemos por b al punto de la frontera que es extremo del radio que pasa por a y consideremos el disco D con centro en b y radio $\dfrac{\delta}{4\pi}(1 - |a|)$. Sea

$$\eta = 1 - \frac{3\delta}{4\pi},$$

entonces $|D \cap D(a)| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi^2} (1 - |a|)^2$ y $|D \cap \mathbb{D}| \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi^2} (1 - |a|)^2$. De aquí se obtiene $|D \cap \mathbb{D} \setminus D\,(a)| < \dfrac{\delta}{2} |D \cap \mathbb{D}|$, y por tanto

$$\begin{aligned} |G \cap D(a)| &\geq |G \cap D| - |G \cap D \setminus D(a)| \\ &> \delta \, |\mathbb{D} \cap D| - \frac{\delta}{2} |D \cap \mathbb{D}| \\ &= \frac{\delta^2}{8\,(4\pi - 3\delta)^2} \, |D(a)|\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado (4) en la segunda desigualdad. ∎

Sea $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$, definimos el disco seudo-hiperbólico

$$\Delta(a, r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < r \right\},$$

entonces tenemos el siguiente lema que usaremos en la primera parte de la demostración del teorema principal:

Lema 2.2 *Supongamos que existen constantes* $\delta_1 > 0$ *y* $\eta_1 \in (0,1)$*, tal que*

$$|G \cap \Delta\,(a, \eta_1)| > \delta_1 \, |\Delta\,(a, \eta_1)| \tag{6}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$*. Entonces, existe una constante* $\delta > 0$ *tal que*

$$|G \cap D| > \delta \, |\mathbb{D} \cap D| \tag{7}$$

para todo disco D *cuyo centro está sobre* $|z| = 1$*.*

Demostración. Supongamos que existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que (6) se cumple. Sea D un disco con radio r, centro en $|z|=1$ y consideremos $a \in \mathbb{D}$ tal que $\Delta(a,\eta_1)$ está contenido tangencialmente en D. Obsérvese que D tiene radio $r = 1-|C|+R$, donde C es el centro euclídeo de $\Delta(a,\eta_1)$ y R es el radio euclídeo. Por hipótesis podemos escribir

$$\begin{aligned}
|G\cap D| &> |G\cap\Delta(a,\eta_1)| > \delta_1 |\Delta(a,\eta_1)| \\
&= \delta_1\eta_1^2 r^2 \left[\frac{1-|a|^2}{1-\eta_1^2|a|^2-(1-\eta_1^2)|a|+\left(1-|a|^2\right)\eta_1}\right]^2 \\
&> \frac{1}{9}\delta_1\eta_1^2 |D\cap\mathbb{D}| \qquad (8)
\end{aligned}$$

y (7) es cierto con $\delta = \frac{1}{9}\delta_1\eta_1^2$. ∎

Para un subconjunto F del disco $\mathbb{D}$, denotaremos por $\mathbf{1_F}$ a la función característica de F. Otro lema que usaremos repetidamente en la demostración del teorema principal es el siguiente:

Lema 2.3 *Dado $\eta \in (0,1)$, existe una constante $C_1(\eta) > 0$ tal que*

$$I = I(z,\eta) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|D(a)|}\mathbf{1}_{D(a)}(z)dA(a) \le C_1(\eta) \qquad (9)$$

para todo z en $\mathbb{D}$.

Demostración. En efecto, sea $s \in D(a)$, entonces dado que $|1-\overline{a}s| \ge 1-|a|$, $D(a) \subset \Delta(a,\eta)$ y $\mathbf{1}_{D(a)}(z) \le \mathbf{1}_{\Delta(a,\eta)}(z) = \mathbf{1}_{\Delta(z,\eta)}(a)$, donde en la última desigualdad hemos usado que $z \in \Delta(a,\eta)$ si y sólo si $a \in \Delta(z,\eta)$; luego

$$I \le \int_{\Delta(z,\eta)} \frac{1}{|D(a)|}dA(a); \qquad (10)$$

pero si $a \in \Delta(z,\eta)$ entonces de la identidad

$$\frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2} = 1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2,$$

encontramos

$$|D(a)| > \frac{1}{16}\eta^2(1-\eta^2)^2(1-|z|)^2;$$

luego, sustituyendo en (10) obtenemos

$$I < \frac{16}{\eta^2(1-\eta^2)^2}\frac{|\Delta(z,\eta)|}{(1-|z|)^2} < \frac{64}{(1-\eta^2)^4} = C_1(\eta),$$

que da (9). En la última desigualdad hemos usado la acotación

$$|\Delta(z,\eta)| \leq \frac{4\eta^2}{(1-\eta^2)^2}(1-|z|)^2 \tag{11}$$

y la prueba del lema está completa. ∎

3 Demostración del Teorema Principal

Supongamos primero que existe una constante $C > 1$ tal que

$$\|f\|_{B_p}^p < C\int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2}|f'(z)|^p\, dA(z)$$

para toda $f \in B_p$. Dado que $(p-1)\int_{\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) = 1$ podemos seleccionar $0 < \eta_1 < 1$ tal que

$$(p-1)\int_{\Delta(0,\eta_1)}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > 1 - \frac{1}{2C}. \tag{12}$$

Sea $a \in \mathbb{D}$ y hagamos el cambio de variables $z \to \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} = \varphi_a(z)$, entonces la desigualdad en (12) queda

$$(p-1)\int_{\Delta(a,\eta_1)}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > 1 - \frac{1}{2C}; \tag{13}$$

donde se ha usado la identidad

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \left(1-|z|^2\right)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Por otra parte, como

$$(p-1)\int_{\mathbb{D}}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) = 1 \tag{14}$$

(ver [HKZ, pag. 7]) podemos usar la estimación (13) para obtener:

$$(p-1)\int_{\mathbb{D}\setminus\Delta(a,\eta_1)}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) < \frac{1}{2C}. \tag{15}$$

Ahora, aplicando la hipótesis de (1) a la función

$$f(z) = \frac{1-|a|^2}{\overline{a}\,(1-\overline{a}z)},$$

podemos escribir

$$\int_G \frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > \frac{1}{C\,(p-1)},$$

donde hemos usado nuevamente (14). De esta última relación y (15) obtenemos

$$\int_{G\cap\Delta(a,\eta_1)} \frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > \frac{1}{2C\,(p-1)}; \tag{16}$$

pero de la identidad

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2},$$

es fácil deducir que existe una constante $C_2 = C_2(\eta_1, p) > 0$ tal que

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^{p-2}}{|1-\overline{a}z|^{2p-4}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2} \leq C_2 \tag{17}$$

para todo $z \in G \cap \Delta(a, \eta_1)$. Además, dado que $|a| < 1$ se tiene la relación

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \leq \frac{4}{(1-|a|)^2},$$

luego combinando esta última desigualdad, (17) y (16) resulta que

$$\frac{4C_2}{(1-|a|)^2}\,|G\cap\Delta(a,\eta_1)| > \frac{1}{2C\,(p-1)},$$

es decir,

$$|G\cap\Delta(a,\eta_1)| \geq \frac{1}{8CC_2\,(p-1)}(1-|a|)^2 > \delta_1\,|\Delta(a;\eta_1)|,$$

donde hemos usado (11) nuevamente, esto último junto con el Lema 2.2 implica la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$|G\cap D| > \delta\,|\mathbb{D}\cap D|$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z| = 1$. Entonces por el Lema 2.1 existen constantes $\delta_0 > 0$ y $\eta \in (0,1)$ tal que $|G\cap D(a)| > \delta_0\,|D(a)|$ para todo $a \in \mathbb{D}$.

Sea $a \in \mathbb{D}$, dada una función analítica f y $0 < \lambda < 1$, definimos el conjunto

$$G_\lambda(a) = G_\lambda(f, a) = \{z \in D(a) : |f'(z)| > \lambda |f'(a)|\}.$$

Para $f \in B_p$ definimos el operador, de tipo maximal,

$$T_\lambda f(a) = \frac{1}{|G_\lambda(a)|} \int_{G_\lambda(a)} |f'(z)|^p \, dA(z).$$

Entonces podemos descomponer el disco unitario en dos conjuntos disjuntos B y $M = \mathbb{D} \setminus B$, donde

$$B = \left\{ a \in \mathbb{D} : |f'(a)|^p > r_0^3 T_\lambda f(a) \right\},$$

y $r_0 \in (0,1)$ es una constante que seleccionaremos después.

Probaremos que existe una constante C_3 que depende sólo de δ_0 y λ tal que la integral sobre el conjunto B es menor que esa constante por la integral sobre el conjunto dominante G; pero antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.1 *Sea $a \in B$ y $\lambda < r_0^{\frac{6}{\delta_0}}$, entonces*

$$|G_\lambda(a)| > \left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) |D(a)|.$$

Demostración. Dado que la función $\log |f'|$ es subarmónica, por la desigualdad del valor medio y la definición de $G_\lambda(a)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
|D(a)| \, log\, |f'(a)| &\leq \int_{D(a)} log\, |f'(z)| \, dA(z) \\
&\leq (|D(a)| - |G_\lambda(a)|) \, log\, (\lambda |f'(a)|) + \frac{1}{p} |G_\lambda(a)| \, log T_\lambda f(a) \\
&\leq \left(\frac{6}{\delta_0} log\, (r_0) + log\, |f'(a)| \right) |D(a)| \\
&\quad - 3 \left(\frac{\delta_0 + 2p}{p\delta_0} \right) log\, (r_0) \, |G_\lambda(a)|,
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado la concavidad de la función *log*. Luego sin más que despejar obtenemos

$$|G_\lambda(a)| \geq \frac{2p}{\delta_0 + 2p} |D(a)| \geq \left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) |D(a)|$$

y la prueba del lema está completa. ∎

Proposición 3.2 *Existe una constante* $C_3 = C_3(\delta_0, \lambda) > 0$ *tal que*

$$\int_B \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) < C_3 \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z)$$

Demostración. Sea $a \in B$, por el Lema 3.1, podemos escribir

$$|D(a)| - |G_\lambda(a)| < \frac{\delta_0}{2} |D(a)|;$$

luego, dado que $G_\lambda(a) \subset D(a)$, sigue del Lema 2.1 y de esta última desigualdad que para $a \in B$,

$$\begin{aligned} |G \cap G_\lambda(a)| &> \delta_0 |D(a)| - |D(a) \setminus G_\lambda(a)| \\ &> \frac{1}{2}\delta_0 |D(a)|. \end{aligned}$$

Esto es, para $a \in B$ se cumple

$$\begin{aligned} \frac{1}{|D(a)|} \int_G \mathbf{1}_{D(a)}(z) \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \quad &\geq \\ \frac{1}{2C_0} \delta_0 \lambda^p \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p, \end{aligned}$$

donde hemos usado la acotación (3). Integrando sobre B, y usando el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left[\int_B \frac{1}{|D(a)|} \mathbf{1}_{D(a)}(z) dA(a)\right] dA(z) \\ \geq \frac{1}{2C_0} \delta_0 \lambda^p \int_B \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^2 \, dA(a); \end{aligned}$$

por tanto, usando el Lema 2.3, podemos concluir

$$\int_B \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \leq \frac{2C_0 C_1(\eta)}{\delta_0 \lambda^p} \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z)$$

y la prueba de la proposición está completa. ■

Ahora debemos acotar adecuadamente la integral sobre el conjunto M; con este fin lo descomponemos en dos subconjuntos disjuntos M_B y $M_M = M \setminus M_B$, donde

$$M_B = \left\{ a \in M : |f'(a)|^p \leq \frac{r_0}{|D(a)|} \int_{D(a)} |f'(z)|^p dA(z) \right\}.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación de la integral sobre el conjunto M_B:

Proposición 3.3 *Existe una constante $C_4(\eta) > 0$ tal que*

$$\int_{M_B} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq r_0 C_4(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z).$$

Demostración. En efecto, por la acotación (3), para todo $a \in M_B$, se cumple

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p \leq \frac{r_0 C_0}{|D(a)|} \int_{\mathbb{D}} \mathbf{1}_{D(a)}(z) \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

por tanto, integrando sobre M_B y usando Fubini concluimos

$$\begin{aligned} &\int_{M_B} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \\ &\quad \leq r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left(\int_{M_B} \frac{1}{|D(a)|} \mathbf{1}_{D(a)}(z) dA(a)\right) dA(z) \\ &\quad \leq r_0 C_2(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z), \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente el Lema 2.3 en la última desigualdad. ■

En la próxima proposición probaremos una estimación similar a la de la Proposición 3.3 para el conjunto M_M; pero antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.4 *Sea $\lambda < 1/2$, entonces para todo $a \in M_M$, existe una constante universal $C_5 > 0$ tal que*

$$|G_\lambda(a)| \geq C_5 r_0^2 |D(a)|.$$

Demostración. Sea $a \in M_M$ y $R = \frac{1}{32} r_0 \eta (1-|a|)$. Probaremos que $D(a, R) \subset G_\lambda(a)$. En efecto, consideremos $r = \frac{1}{2}\eta(1-|a|)$ y $z \in D(a,R)$ entonces por la fórmula integral de Cauchy, podemos escribir

$$|f'(z) - f'(a)| \leq \frac{1}{8} r_0 C_r, \tag{18}$$

donde $C_r := \sup\{|f'(t)| : |t-a| = r\}$. Dado que $|f'|$ es subarmónica tenemos

$$C_r \leq \frac{4}{|D(a)|} \int_{D(a)} |f'(w)| dA(w),$$

donde hemos usado que $D(t,r) \subset D(a)$, la definición de r, la desigualdad de Hölder y la definición de M_M. Luego, sustituyendo en (18) encontramos

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{1}{2} |f'(a)|$$

para todo $z \in D(a,R)$. Por la desigualdad triangular concluimos

$$|f'(z)| > \frac{1}{2}|f'(a)| > \lambda|f'(a)|$$

para todo $z \in D(a,R)$ y $D(a,R) \subset G_\lambda(a)$. Por tanto, podemos concluir

$$|G_\lambda(a)| \geq |D(a,R)| = \frac{r_0^2}{2^{10}}|D(a)|$$

como lo afirmamos. ∎

Ahora podemos acotar la integral sobre el conjunto M_M.

Proposición 3.5 *Existe una constante $C_6(\eta) > 0$ tal que*

$$\int_{M_M} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq r_0 C_6(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z).$$

Demostración. Sea $a \in M_M$, entonces, en particular $a \in M$ y por tal motivo,

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p \leq \frac{C_0 r_0^3}{|G_\lambda(a)|} \int_{G_\lambda(a)} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

donde hemos usado la estimación (3), luego, integrando sobre M_M y usando Fubini podemos escribir:

$$\begin{aligned}
&\int_{M_M} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \\
&\quad \leq C_0 r_0^3 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left(\int_{M_M} \frac{1}{|G_\lambda(a)|} \mathbf{1}_{G_\lambda(a)}(z) dA(a)\right) dA(z).
\end{aligned}$$

Por tanto, usando el Lema 3.4, $G_\lambda(a) \subset D(a)$ y el Lema 2.3 obtenemos

$$\int_{M_M} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \leq \frac{C_1(\eta) C_0}{C_5} r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

y la prueba de la proposición está completa. ∎

Ahora podemos finalizar la prueba del Teorema 1.1 ya que de las Proposiciones 3.3 y 3.5 tenemos

$$\int_{M} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq (C_4 + C_6)\, r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

por tanto, al seleccionar

$$r_0 \leq \frac{1}{2\,(C_4 + C_6)}$$

y por supuesto, $\lambda < \min\left\{\frac{1}{2}, r_0^{\frac{6}{\delta_0}}\right\}$, encontramos

$$\int_M \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

que junto con la Proposición 3.2 implica la conclusión del teorema. ■

Referencias

[HKZ] Hedenmalm, H., Korenblum B. and Zhu, K., *Theory of Bergman Spaces.* Springer-Verlag, New York, 2000

[Lu] D. Luecking, Inequalities on Bergman spaces, *Illinois J. Math.*, **25**, (1981), 1-11.

WILMER ARZOLAY Y JULIO RAMOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD DE ORIENTE
VENEZUELA