# COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE TRIANGULAIRE ET APPLICATIONS

**B. Bendiffalah — D. Guin**

Laboratoire GTA, UMR 5030
Département de Mathématiques, case 051
Université Montpellier II
place Eugène Bataillon
34 095 MONTPELLIER CEDEX 5, FRANCE.

## Abstract

We study the Hochschild cohomology (and homology) $H^*(T,\Lambda)$ of the triangular algebra $T = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$, with $A$ and $B$ unital algebras, $M$ a $A \otimes B^o$-module and $\Lambda$ a $T$-bimodule. We describe $H^*(T,\Lambda)$ as the cohomology of the cone complex of a morphism, simple to construct. In this way we not only recover immediatly the classical exact sequences of the field, but also, under the hypothesis that $M$ is projective over $A$ (or $B^o$), more precise exact sequences giving better insights for $HH^*(T) = H^*(T,T)$ ; in particular when $B^o = End_A(M)$ we get that $HH^*(T) \cong HH^*(A)$ as graded algebras. For instance, we get an isomorphism $HH^*(T) \cong HH^*(\phi!)$, where $\phi : T \longrightarrow B$ is the canonical morphism and $\phi!$ is the algebra introduced by Gerstenhaber and Shack to study its deformations [**GS**].

## Résumé

Soient $K$ un anneau commutatif, deux $K$-algèbres associatives et unitaires $A$ et $B$ ainsi qu'un $A \otimes B^o$-module $M$ ; $A$, $B$ et $M$ sont, dans cet article, $K$-projectifs. L'algèbre "triangulaire" associée à ces données est le $K$-module $T = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ muni de la loi multiplicative $\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1m_2 + m_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$. On note $H^*(T,\Lambda)$ la cohomologie de Hochschild de $T$ à coefficients dans un $T$-bimodule $\Lambda$. En exprimant $H^*(T,\Lambda)$ comme cohomologie du complexe cône d'un morphisme dont la construction est simple, nous obtenons, non seulement de manière immédiate les suites exactes connues sur le sujet, mais de plus, sous l'hypothèse que $M$ est projectif sur $A$ (ou sur $B^o$), des suites exactes plus précises permettant de mieux comprendre $HH^*(T) = H^*(T,T)$ ; en particulier lorsque $B^o = End_A(M)$, nous avons un isomorphisme d'algèbres graduées $HH^*(T) \cong HH^*(A)$.

Nous remercions le rapporteur de nous avoir signaler une erreur dans [**BG**, 4.2.9].

---

**Keywords :** Hochschild Cohomology, Deformation Theory, Morphism Algebra, Relative Cohomology, Triangular Algebras, One-Point Extension. **Classification :** 16E40 – 16S99 – 18A30.

## §1. Le théorème général

Si l'homologie de Hochschild de l'algèbre $T$ à coefficients dans un $T$-bimodule $\Lambda$ est bien comprise, il n'en est pas de même pour la cohomologie de Hochschild $H^*(T,\Lambda)$. Le premier exemple "calculé" est celui où $T$ est une *extension ponctuelle* (*one-point extension*) (*i.e.*, $B=K$ est un corps), on note alors $T=A[M]$, auquel cas on a une suite exacte longue ($*\geq 1$, *cf.* **[H]**) :

$$(1.1)\qquad \cdots \longrightarrow HH^*(A[M]) \longrightarrow HH^*(A) \longrightarrow Ext^*_A(M,M) \longrightarrow HH^{*+1}(A[M]) \longrightarrow \cdots$$

Rappelons que la donnée d'un $T$-bimodule $\Lambda$ est équivalente à celle de bimodules $X_1$, $X_2$, $Y_1$ et $Y_2$ (des modules sur $B\otimes A^o$, $B\otimes B^o$, $A\otimes A^o$ et $A\otimes B^o$, respectivement) et de morphismes de bimodules $f_1 : M\otimes_B X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : M\otimes_B X_2 \longrightarrow Y_2$, $\varphi_X : X_1\otimes_A M \longrightarrow X_2$ et $\varphi_Y : Y_1\otimes_A M \longrightarrow Y_2$, tels que le diagramme de $A\otimes B^o$-modules suivant commute

$$(1.2)\qquad \begin{array}{ccc} M\otimes_B X_1\otimes_A M & \xrightarrow{M\otimes_B \varphi_X} & M\otimes_B X_2 \\ {\scriptstyle f_1\otimes_A M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2} \\ Y_1\otimes_A M & \xrightarrow{\varphi_Y} & Y_2 \end{array}$$

Il est plus commode d'employer la notation matricielle $\Lambda = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ : l'on retrouve alors la commutation de 1.1 dans l'associativité des actions "matricielles" (bilatères) de $T$ sur $\Lambda$. De plus, l'écriture matricielle de $T$ est cohérente avec sa structure de $T$-bimodule. La suite exacte (1.2) se généralise à toute algèbre triangulaire $T$ en une suite exacte longue (**[C1]**,**[MP]**) :

$$(1.3)\quad \cdots\longrightarrow H^*(T,\Lambda)\longrightarrow H^*(A,Y_1)\oplus H^*(B,X_2)\longrightarrow Ext^*_{A\otimes B^o}(M,Y_2)\longrightarrow H^{*+1}(T,\Lambda)\longrightarrow\cdots$$

Pour le cas général, nous pensons que l'obstruction à l'explicitation de $H^*(T,\Lambda)$ est concentrée dans le bicomplexe ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
{\scriptstyle \partial^A}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes B^o}\big\downarrow & & {\scriptstyle \partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 2}}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 3}}\big\downarrow \\
A^{\otimes 2}\otimes M & \xleftarrow{A^{\otimes 2}\otimes\partial^{B^o}} & A^{\otimes 2}\otimes M\otimes B^o & \xleftarrow{A^{\otimes 2}\otimes\partial^{B^o}} & A^{\otimes 2}\otimes M\otimes (B^o)^{\otimes 2} & \xleftarrow{A^{\otimes 2}\otimes\partial^{B^o}} & A^{\otimes 2}\otimes M\otimes (B^o)^{\otimes 3}\cdots \\
{\scriptstyle \partial^A}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes B^o}\big\downarrow & & {\scriptstyle \partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 2}}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 3}}\big\downarrow \\
A\otimes M & \xleftarrow{A\otimes\partial^{B^o}} & A\otimes M\otimes B^o & \xleftarrow{A\otimes\partial^{B^o}} & A\otimes M\otimes (B^o)^{\otimes 2} & \xleftarrow{A\otimes\partial^{B^o}} & A\otimes M\otimes (B^o)^{\otimes 3}\cdots \\
{\scriptstyle \partial^A}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes B^o}\big\downarrow & & {\scriptstyle \partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 2}}\big\downarrow & & {\scriptstyle -\partial^A\otimes(B^o)^{\otimes 3}}\big\downarrow \\
0 & \xleftarrow{\partial^{B^o}} & M\otimes B^o & \xleftarrow{\partial^{B^o}} & M\otimes (B^o)^{\otimes 2} & \xleftarrow{\partial^{B^o}} & M\otimes (B^o)^{\otimes 3}\cdots
\end{array}$$

où $\partial^A$ et $\partial^{B^o}$ dénotent les différentielles des bar-résolutions de $M$ (vu comme module sur $A$ ou sur $B^o$). En effet, si l'on note $C_*^{A,B^o}(M)$ son complexe total et $C^*_{tri}(M,Y_2) =$

$Hom_{A\otimes B^o}(C_*^{A,B^o}(M), Y_2)$, le théorème général que nous obtenons est une équivalence d'homotopie entre le complexe de Hochschild $C^*(T,\Lambda)$ et le cône d'un certain morphisme surjectif de complexes, naturellement attaché à $\Lambda$,

$$C^*(A,Y_1)\oplus C^*_{tri}(M,Y_2)\oplus C^*(B,X_2)\xrightarrow{\lambda^*} C^*(A,Hom_{B^o}(M,Y_2))\oplus C^*(B,Hom_A(M,Y_2))\ .$$

Nous renvoyons à **[BG]** pour plus de détails sur ce résultat et la définition de $\lambda^*$. Remarquons que cette approche mène immédiatement à la suite exacte 1.3. et que nous avons également une version homologique de ces résultats.

L'intéret de cette démarche est, d'une part, la facilité de sa mise en oeuvre (par rapport a l'étude des suites spectrales associées au bicomplexe) et, d'autre part, de fournir, dans le cas où $M$ est "partiellement projectif", une seconde suite exacte longue, beaucoup plus précise que 1.3.

## §2. La seconde suite exacte longue.

Pour tout $T$-bimodule $\Lambda$ (notations de §**1**), introduisons le morphisme de $A$-bimodules $\tilde{f} : X_2 \longrightarrow Hom_A(M,Y_2)$, adjoint de $f_2$. Il induit un morphisme de complexes de Hochschild $C^*(B,\tilde{f})$, dont nous notons cône$^*(\tilde{f})$ le cône (*cf.* **[B]**).

**Théorème.** *Si $M$ est $A$-projectif, nous avons une suite exacte longue*

$$\cdots\longrightarrow H^*(T,\Lambda)\longrightarrow H^*(A,Y_1)\longrightarrow H^{*+1}[\textit{cône}^*(\tilde{f})]\longrightarrow H^{*+1}(T,\Lambda)\longrightarrow\cdots$$

*où le morphisme $H^*(T,\Lambda)\longrightarrow H^*(A,Y_1)$ est la restriction d'un des morphismes de 1.1.*

On considère maintenant le cas $\Lambda = T$. La structure bimodulaire de $M$ définit un morphisme d'algèbres $\beta : B \longrightarrow (End_A M)^o$ qui joue le rôle de $\tilde{f}$. Le théorème ci-dessus se traduit alors de la manière suivante.

**Corollaire 1.** *Si $M$ est $A$-projectif, on a une longue suite exacte*

$$\cdots\longrightarrow H^*(\textit{cône}^*(\beta))\longrightarrow HH^*(T)\longrightarrow HH^*(A)\longrightarrow H^{*+1}(\textit{cône}^*(\beta))\longrightarrow\cdots$$

En particulier : si $B=(End_A M)^o$, $\beta$ est un isomorphisme (l'identité), donc $H^*(\textit{cône}^*(\beta)) = 0$. D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 2.** *Si $M$ est $A$-projectif de type fini et si $B = (End_A M)^o$, nous avons un isomorphisme d'algèbres graduées : $HH^*(T)\simeq HH^*(A)$.*

**Remarques. 1)** L'hypothèse que $M$ est de type fini sur $A$ n'est là que pour assurer que $End_A(M)$ est un $K$-module projectif. En particulier, elle n'est pas nécessaire si $K$ est un anneau semi-simple. **2)** En dualisant la preuve du théorème, ou en utilisant l'isomorphisme d'anneaux $T^o \cong \begin{pmatrix} B^o & M \\ 0 & A^o\end{pmatrix}$, on obtiendrait des résultats similaires si $M$ était $B^o$-projectif. **3)** Par exemple : *si $M$ est $B^o$-projectif de type fini et $A=End_{B^o}(M)$,*

$$HH^*(T)\simeq HH^*(B)\ .$$

**Un calcul :** les matrices triangulaires "par blocs" (l'exemple de Wodzicki [**W**]). Soit une suite d'entiers strictement positifs $\nu = (n_1, \dots, n_d)$ et $n = n_1 + \cdots + n_d$. L'algèbre $T_\nu(A)$ est representée par la matrice $n \times n$ triangulaire par blocs

$$T_\nu(A) = \begin{pmatrix} M_{n_1n_1}(A) & M_{n_1n_2}(A) & \cdots & M_{n_1n_d}(A) \\ 0 & M_{n_2n_2}(A) & \cdots & M_{n_2n_d}(A) \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{n_dn_d}(A) \end{pmatrix} .$$

Montrons que $HH^*(T_\nu(A)) \simeq HH^*(A)$.

Nous procédons par récurrence : si $d = 1$, $T_\nu(A) = M_{nn}(A)$ et est Morita-équivalente à l'algèbre $A$, d'où $HH^*(T_\nu(A)) \simeq HH^*(A)$. Supposons $d > 1$ : nous avons un isomorphisme $T_\nu(A) = \begin{pmatrix} T_{\nu'}(A) & M \\ 0 & M_{n_dn_d}(A) \end{pmatrix}$, où $\nu' = (n_1, \dots, n_{d-1})$ et $M = M'^{n_d}$, où $M'$ est une copie de la dernière colonne de $T_{\nu'}(A)$. Donc, comme $M'$, $M$ est un $T_{\nu'}(A)$-module projectif de type fini. L'écriture matricielle de l'algèbre $T_{\nu'}(A)$ est une décomposition de Peirce relativement à $n_1 + \cdots + n_{d-1}$ idempotents orthogonaux ; donc, pour chaque module projectif $P$ défini par une colonne, l'on trouve $(End_{T_{\nu'}(A)}P)^o$ à l'intersection avec la diagonale : l'on obtient ainsi l'isomorphisme $(End_{T_{\nu'}(A)}M')^o \cong A$ et, pour $M = M'^{n_d}$. Nous en déduisons l'isomorphisme $(End_{T_{\nu'}(A)}M)^o \cong M_{n_dn_d}(A)$. Avec la remarque 3, nous obtenons $HH^*(T_\nu(A)) \cong HH^*(T_{\nu'}(A))$ et, de là, la conclusion. ■

## §3. Applications.

Nous donnons deux exemples d'algèbres triangulaires $T$, où l'hypothèse de projectivité partielle est naturelle.

**Extensions séparables.** Nous nous intéressons à l'hypothèse $HH^*(B) = 0$ pour $* \geq 1$. Elle est vérifiée, en particulier, si $B = K$ ou si $B$ est une $K$-algèbre séparable ; mais aussi : si $B$ est l'algèbre d'incidence d'un ensemble partiellement ordonné dont le carquois est un arbre (*cf.* [**C2**]) ou ayant un seul élément maximal (ou minimal, *cf.* [**GR**]). Si, de plus, nous supposons que $M$ est $B^o$-projectif, la remarque 3 donne des isomorphismes :

$$HH^i(T) \simeq H^i(\text{cône}^*(\alpha)) \ , \quad i \geq 2 \ ,$$

où $\alpha : A \longrightarrow End_{B^o}(M)$ est le morphisme canonique d'algèbres. La longue suite exacte du cône associée à $C^*(A, \alpha)$ donne alors la proposition suivante.

**Proposition 1.** *Nous avons une suite exacte longue ($* \geq 2$) :*

$$\cdots \longrightarrow H^{*-1}(A, End_{B^o}M) \longrightarrow HH^*(T) \longrightarrow HH^*(A) \longrightarrow H^*(A, End_{B^o}M) \longrightarrow \cdots$$

La suite exacte ci-dessus est une généralisation de 1.2 ([**H**]) puisque, si $K$ est un corps, $H^*(A, End_{B^o}M) \simeq Ext^*_A(M, M)$ ([**CE**], Prop. 4.3, p.170).

**Déformations de morphismes.** Dans l'étude des déformations de diagrammes d'algèbres, Gerstenhaber et Shack ([**GS**]) ont montré que, si $\phi : B \longrightarrow A$ est un morphisme d'algèbres, ses déformations sont contrôlées par la cohomologie de Hochschild de l'algèbre

$$\phi! = \begin{pmatrix} A & A_\phi \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A_\phi = A$ est muni de la structure de $A \otimes B^o$-module donnée par la structure naturelle de $A$-module à gauche et celle de $B$-module à droite induite par $\phi$.

**Proposition 2.** *Soient un morphisme surjectif d'algèbres $\phi : C \longrightarrow D$ et un idempotent $e \in C$, tels que $Ker\,\phi = eC$, alors $HH^*(\phi!) \cong HH^*(C)$.*

Cette proposition renverse le point de vue de Gerstenhaber et Shack : *la cohomologie de Hochschild de toute algèbre triangulaire $T = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est celle de l'algèbre du morphisme canonique $T \longrightarrow B$.* En particulier : toute extension ponctuelle $A[M]$ possède une coünité canonique $\phi : A[M] \longrightarrow K$, $\phi\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & k \end{pmatrix} = k$, et nous obtenons un isomorphisme :

$$HH^*(A[M]) \cong HH^*(\phi!)\ .$$

## Références bibliographiques


[**BG**] B. Bendiffalah, D. Guin : *Cohomologie de l'Algèbre Triangulaire et Applications*, Prépublication Dépt. Sci. Maths. Montpellier 14, 2002.

[**B**] N. Bourbaki, *ALGÈBRE Ch. X, Algèbre homologique*, MASSON, Paris, 1980.

[**C1**] C. Cibils, *Tensor Hochshild homology and cohomology.* Proceedings of the Euroconference "Interaction between ring theory and representations of algebras", Murcia, 1998. Lecture Notes in Applied and Pure Mathematics, Vol. 210, pp.35–51, 2000.

[**C2**] C. Cibils, *On the Hochschild cohomology of finite dimensional algebras,* Comm. in Algebra, 16, pp.645–649, 1988.

[**CE**] H. Cartan & S. Eilenberg, *Homological Algebra.* Princeton Mathematical Series, Princeton university press, 1956.

[**GR**] M.A. Gatica and M.J. Redondo, *Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras.* Comm. in Algebra, 29(5), pp.2269-2283, 2001.

[**GS**] M. Gerstenhaber and S.D. Shack, *On the Cohomology of an Algebra Morphism.* Journal of Algebra, Vol. 95, pp.245–262, 1985.

[**H**] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite dimensional algebras.* Springer Lecture Notes in Math. 1404, pp.108–126, 1989.

[**MP**] S. Michelena and M. I. Platzeck, *Hochschild Cohomology of Triangular Matrix Algebra.* Journal of Algebra, Vol.233, pp.502–525, 2000.

[**W**] M. Wodzicki, *Excision in Cyclic Homology and in Rational Algebraic K-Theory.* Annals of Math., Vol.129, pp.591–639, 1989.