Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini

J. Alev[1], M. A. Farinati[2], T. Lambre[3] & A. L. Solotar[2]

Abstract : Let G be a finite subgroup of $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ acting by automorphisms in the Weyl algebra $A_n(\mathbf{C})$. We compute the Hochschild homology and cohomology groups of the invariant algebra $A_n(\mathbf{C})^G$.

Ce texte est consacré au calcul de l'homologie et de la cohomologie de Hochschild des invariants de l'algèbre de Weyl $A_n = A_n(\mathbf{C})$ sous l'action d'un sous-groupe fini G d'automorphismes contenu dans le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$. Ce travail complète les calculs de [3], qui traitaient le cas du premier groupe d'homologie de Hochschild. Un exemple d'emploi de ce théorème est proposé en fin d'article.

1. Rappels, notations et résultat principal.

Si G est un groupe fini d'automorphismes de la $\mathbf{C}$-algèbre A, le produit croisé $A * G$ de base G, à coefficients dans A est la $\mathbf{C}$-algèbre définie par $A * G = \oplus_{g \in G} Ag$ dans laquelle le produit est défini par la règle de redressement $ag \cdot bh = ab^{g^{-1}} gh$ pour a, b dans A , g et h dans G.

Soit G un sous-groupe de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$. Le groupe G opère par automorphismes dans l'anneau de polynômes $\mathbf{C}[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots Y_n]$ ainsi que dans l'algèbre de Weyl $A_n = A_n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n]$ définie par les relations $[p_i, p_j] = [p_i, q_j] = [q_i, q_j] = 0$ si $i \neq j$ et $[p_i, q_i] = 1$.

Le théorème principal s'énonce ainsi.

1.1. Théorème. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl A_n. On désigne par A_n^G la sous-algèbre des invariants de A_n sous l'action de G. Pour $j \in \mathbf{N}$, désignons par $a_j(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G ayant la valeur propre 1 avec la multiplicité j. Alors, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a*

$$dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n^G) = dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n^G, A_n^G) = a_j(G).$$

[1] Laboratoire de Mathématiques, UPRESA 6056 du CNRS, Université de Reims, 51100 Reims, France. Courriel : jacques.alev@univ-reims.fr

[2] Dto de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Cdad Univ., Pab I, 1428, Buenos Aires, Argentina. mfarinat@dm.uba.ar, asolotar@dm.uba.ar

[3] Université Paris Sud, département de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay, Cedex, France. Courriel : thierry.lambre@math.u-psud.fr

Ce travail a été partiellement subventionné par le projet ECOS A98E05, le CONICET et la Fundación Antorchas.

Les auteurs sont heureux de remercier Roger Carter, Christian Kassel et Mariano Suarez Alvarez.

En particulier, l'homologie et la cohomologie sont concentrées en degrés pairs et nulles en degrés supérieurs à $2n$.

Preuve : puisque le groupe G est fini et l'algèbre A_n simple, l'algèbre d'invariants A_n^G sous l'action du groupe G est équivalente au sens de Morita à l'algèbre produit croisé $A_n * G$. Le calcul des dimensions $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n^G)$ et $\dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n^G, A_n^G)$ se fait pour le produit croisé $A_n * G$, c'est-à-dire qu'on calcule les dimensions $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G)$ et $\dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G)$. Le théorème 4.1 montre $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G) = a_j(G)$, ce qui termine la preuve de 1.1. □

Dans la suite du texte, les notations sont les suivantes. Soit G un groupe. Nous désignons par $[g]$ la classe de conjugaison de l'élément g et par $[G]$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. Le centralisateur de g dans G est noté $\mathcal{Z}(g)$. Le tore $\mathbf{T}^n \cong (\mathbf{C}^*)^n$ est un sous-groupe abélien de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ via l'inclusion $i : (\mathbf{C}^*)^n \to \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ définie par $i(g_1, \cdots, g_n) = \mathrm{diag}(g_1, g_1^{-1}, \cdots, g_n, g_n^{-1})$.

2. Une suite spectrale à la Grothendieck.

Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre et G un sous-groupe fini de $Aut_{k-Alg}(A)$. Introduisons la catégorie $\mathcal{A}$ des $A * G$-bimodules M se décomposant sous la forme $M = \oplus_{g \in G} M_g$ où M_g sont des groupes additifs tels que $AhM_g = M_{hg}$ et $M_g Ah = M_{gh}$. Prenant $h = e$, on en déduit que pour tout $g \in G$, M_g est un A-bimodule. Ces conditions montrent par ailleurs que pour $x \in G$ et $m_g \in M_g$, on a $x m_g x^{-1} \in M_{xgx^{-1}}$. Le centralisateur $\mathcal{Z}(g)$ de g dans G opère par conjugaison dans M_g.

L'isomorphisme de A-bimodules $Ax \otimes_A M_g \otimes_A Ax^{-1} \cong M_{xgx^{-1}}$ et un contexte de Morita montrent qu'on a $H_j(A, M_g) \cong H_j(A, M_{xgx^{-1}})$. L'algèbre A étant un G-module et M_g un $\mathcal{Z}(g)$-module, on déduit des actions de $\mathcal{Z}(g)$ sur les complexes définissant l'homologie et la cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M_g et par conséquent les groupes $H_j(A, M_g)$ et $H^{2n-j}(A, M_g)$ sont des $\mathcal{Z}(g)$-modules.

2.1. Proposition. *Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre, G un sous-groupe fini de $Aut_{k-Alg}(A)$ et soit M un $A * G$-bimodule appartenant à $\mathcal{A}$.*
i. On a une décomposition $H_*(A * G, M) = \oplus_{[g] \in [G]} H_*(A * G, M)_{[g]}$ ainsi qu'une suite spectrale $E^2_{r,s,[g]} = H_r(\mathcal{Z}(g), H_s(A, M_g)) \Rightarrow HH_{r+s}(A * G, M)_{[g]}$.
ii. On a une décomposition $H^*(A * G, M) = \oplus_{[g] \in [G]} H^*(A * G, M)^{[g]}$; si $[G : \mathcal{Z}(g)]$ est fini, il existe une suite spectrale $E_2^{r,s,[g]} = H^r(\mathcal{Z}(g), H^s(A, M_g)) \Rightarrow H^{r+s}(A * G, M)^{[g]}$.

Preuve : Ces suites spectrales sont des suites spectrales de Grothendieck de composition de deux foncteurs ([5], 2.4.1). Pour le cas homologique, voir [7] ; pour le cas cohomologique, voir [6] ou [8].

3. Calcul de $H_j(A_n, A_n g)$ pour $g \in \mathbf{T}^n$.

Posons $x = 1 \otimes p - p \otimes 1$, $y = 1 \otimes q - q \otimes 1$. Le complexe (W_*) ci-dessous est une A_1^e-résolution libre de l'algèbre de Weyl A_1.

$$0 \longrightarrow A_1^e \xrightarrow{d_2'} A_1^e \oplus A_1^e \xrightarrow{d_1'} A_1^e \xrightarrow{\mu} A_1 \longrightarrow 0,$$

où μ est la multiplication de A_1 et où $d_1'(z_1, z_2) = z_1x + z_2y$, $d_2'(z) = (zy, -zx)$.

3.1. Proposition. *Soit $g \in \mathbf{T}^1$ un automorphisme diagonal de l'algèbre de Weyl A_1. On suppose $g \neq id$. Alors $H_j(A_1, A_1g) = 0$ pour $j > 0$, $H^k(A_1, A_1g) = 0$ pour $k \neq 2$ tandis que $H_0(A_1, A_1g) = H^2(A_1, A_1g) = \mathbf{C}g$.*

Preuve : pour z_1 et z_2 dans A_1, on pose $[z_1, z_2]_g := z_1z_2 - z_2z_1^g$. On a $H_j(A_1, A_1g) = H_j(A_1g \otimes_{A_1^e} W_*)$. L'homologie $H_j(A_1, A_1g)$ est évidemment obtenue en multipliant par g l'homologie du complexe de chaînes $(A_1g \otimes_{A_1^e} W_*)g^{-1}$. Le complexe de Koszul $\mathrm{gr}(A_1g \otimes_{A_1^e} W_*)$ est acyclique en degré strictement positif. On en déduit l'acyclicité en degré strictement positif du complexe $(A_1g \otimes_{A_1^e} W_*)$, soit $H_j(A_1, A_1g) = 0$ pour $j > 0$. L'égalité des dimensions $\dim_{\mathbf{C}} H_j(A_n, M) = \dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n, M)$ montre qu'on a également $H^{2-j}(A_1, A_1g) = 0$ pour $j > 0$. Rappelons que d'après [2], Thm 4, on a $A_1g = [A_1, A_1g] \oplus Cg$, ce qui montre $H_0(A_1, A_1g) = \mathbf{C}g$ et par dualité $H^2(A_1, A_1g) = \mathbf{C}g$.

3.2. Théorème. *Soit $n \geq 1$ un entier et soit $g \in \mathbf{T}^n$ un automorphisme diagonal de l'algèbre de Weyl A_n. Notons $2\mu(g)$ la multiplicité de la valeur propre 1 de g. Alors, on a $H_{2\mu(g)}(A_n, A_ng) = \mathbf{C}g$ et $H_j(A_n, A_ng) = 0$ si $j \neq 2\mu(g)$. En outre, ces modules sont des $\mathcal{Z}(g)$-modules triviaux.*

Preuve : écrivons $g = (g_1, \cdots, g_n) \in \mathbf{T}^n$ avec $g_i \in \mathbf{T}^1$. Le A_n^e-bimodule A_ng est isomorphe à $\otimes_{\ell=1}^n A_1g_\ell$ et la formule de Künneth conduit à

$$H_j(A_n, A_ng) = \oplus_{j_1+\cdots+j_n=j} H_{j_1}(A_1, A_1g_1) \otimes \cdots \otimes H_{j_n}(A_1, A_1g_n).$$

Pour que $H_{j_\ell}(A_1, A_1g_\ell)$ soit non nul, il faut $j_\ell = 2$ et $g_\ell = \mathrm{id}$ ou $j_\ell = 0$ et $g_\ell \neq \mathrm{id}$. Ceci montre que si $H_j(A_n, A_ng) \neq 0$, on a nécessairement $j = \sum j_\ell = 2\mu(g)$ et $H_{2\mu(g)}(A_n, A_ng) = \mathbf{C}g$. $\square$

Remarque : Avec les notations du théorème, on a évidemment $H^{2n-2\mu(g)}(A_n, A_ng) = \mathbf{C}g$ et $H^{2n-j}(A_n, A_ng) = 0$ si $j \neq 2\mu(g)$.

4. Calcul de $HH_j(A_n * G)$.

4.1. Théorème. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ opérant par automorphismes dans l'algèbre de Weyl A_n. Pour $j \in \mathbf{N}$, on désigne par $a_j(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G ayant la valeur propre 1 avec la multiplicité j. Alors on a*

$$dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = dim_{\mathbf{C}} H^{2n-j}(A_n * G, A_n * G) = a_j(G).$$

Preuve : La suite spectrale citée en 2.1 s'écrit

$$E^2_{r,s,[g]} = H_r(\mathcal{Z}(g), H_s(A_n, A_ng)) \Rightarrow HH_{r+s}(A_n * G)_{[g]}.$$

Un lemme de diagonalisation ([3], 3.3) nous assure qu'il existe $x \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ tel que $g' = xgx^{-1}$ appartienne à $\mathbf{T}^n$. Par invariance de Morita, on a un isomorphisme $H_s(A_n, A_n g) \cong H_s(A_n, A_n g')$. Le calcul effectué en 3.2 montre que ce dernier groupe est un $\mathcal{Z}(g)$-module trivial car $\mathcal{Z}(g)$ agit trivialement (par conjugaison) sur $\mathbf{C}g$. On en déduit $E^2_{r,s,[g]} = \mathbf{C}g$ si $(r, s) = (0, 2\mu(g))$ et $E^2_{r,s,[g]} = 0$ sinon. En particulier, la suite spectrale dégénère, ce qui conduit à $HH_j(A_n * G)_{[g]} = \mathbf{C}g$ si $j = 2\mu(g)$ et $HH_j(A_n * G)_{[g]} = 0$ sinon. Puisque $HH_j(A_n * G) = \oplus_{[g]\in[G]} HH_j(A_n * G)_{[g]}$, on obtient $\dim_{\mathbf{C}} HH_j(A_n * G) = a_j(G)$. Le calcul cohomologique est rigoureusement identique. ∎

5. Un résultat de dualité.

Soit k un corps de caractéristique nulle et soit A une k-algèbre. L'algèbre A satisfait la condition de dualité de Van den Bergh ([9]) s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et un A-bimodule inversible $U \in Pic(A)$ tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout A-bimodule M, on a un isomorphisme de k-modules $\varphi_j : H_j(A, U \otimes_A M) \to H^{d-j}(A, M)$.

Supposons de plus que G soit un groupe opérant dans A et M. Alors, il existe des opérations canoniques de G dans $H_j(A, U \otimes_A M)$ et $H^{d-j}(A, M)$ pour lesquelles φ_j est une application G-équivariante. En effet, en choisissant $M = A^e$, on voit que le A-bimodule inversible $U \in Pic(A)$ est nécessairement égal à $Ext^d_{A^e}(A, A^e)$, sur lequel G opère canoniquement. On vérifie ensuite que les isomorphismes introduits par Van den Bergh ([9],p. 1346) dans la preuve de son théorème de dualité sont bien équivariants pour ces opérations.

Proposition 5.1. Soit A une k- algèbre satisfaisant à la condition de dualité ci dessus et soit G un sous-groupe fini de $Aut_k(A)$. Alors, pour tout $A * G$ bimodule M de la catégorie $\mathcal{A}$ et pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme

$$H_j(A * G, (U \otimes_A M)) \cong H^{d-j}(A * G, M).$$

6. L'exemple $\mathcal{D}(\mathfrak{h})^W$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension n et de rang l, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan et W le groupe de Weyl. L'algèbre duale $\mathfrak{h}^*$ est alors une W-représentation. Le groupe W agit par automorphismes linéaires dans les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$, identifiée à $S(\mathfrak{h})$ ainsi que dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{h}^*$ notée $\mathcal{D}(\mathfrak{h}^*)$, isomorphe à l'algèbre de Weyl $A_l(\mathbf{C})$.

L'algèbre des opérateurs différentiels W-invariants sur $\mathfrak{h}^*$ est alors isomorphe à $A_l(\mathbf{C})^G$ et le théorème principal s'applique à cette dernière algèbre. Pour calculer les groupes de (co)homologie de Hochschild, nous aurons besoin des nombres $a_j(W)$ pour W agissant dans la représentation $\mathfrak{h}^*$. Le groupe W s'identifie à un sous-groupe de $\mathbf{Sp}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)$. La multiplicité de la valeur propre 1 d'un élément de W agissant dans la représentation $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ est le double de la multiplicité de la valeur propre 1 du même élément de W agissant dans la représentation $\mathfrak{h}^*$. Cette multiplicité est aussi la dimension du sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ invariant par l'élément considéré. Le théorème principal donne alors :

6.1. Théorème.

On a $dim_{\mathbf{C}} HH_{2j}(\mathcal{D}(\mathfrak{h}^*)^W) = a_j(W)$ *pour* $0 \leq j \leq l$ *et* $dim_{\mathbf{C}} HH_j(\mathcal{D}(\mathfrak{h}^*)^W) = 0$ *sinon.*

R. Carter ([4]) fournit une classification complète des classes de conjugaison des groupes de Weyl des algèbres de Lie simples de dimension finie. On obtient :

Type A_n : $a_j(W) = \#\{\text{partitions de (n + 1) en (j + 1) parts}\}\cdot$
Type B_n, C_n et D_n : Soit (λ, μ) une paire de partitions telle que $\mid \lambda \mid + \mid \mu \mid = n$. La multiplicité de 1 comme valeur propre de la classe de conjugaison correspondante est donnée par le nombre de parts de la première partition.

Type G_2 : $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$.

Type F_4 : $a_0 = 9$, $a_1 = 8$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2$ et $a_4 = 1$.

Type E_6 : $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$ et $a_6 = 1$.

Type E_7 : $a_0 = 12$, $a_1 = 18$, $a_2 = 13$, $a_3 = 9$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$ et $a_7 = 1$.

Type E_8 : $a_0 = 30$, $a_1 = 31$, $a_2 = 24$, $a_3 = 12$, $a_4 = 8$, $a_5 = 3$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$ et $a_8 = 1$.

Bibliographie.

[1], J. Alev, T. H. Hodges & J. D. Velez, Fixed rings of the Weyl algebra $A_1(\mathbf{C})$., *J. Alg.*, **130**, 1990, pp. 83-96.

[2], J. Alev & T. Lambre, Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein, *Algebra and operator Theory, Proccedings of the Colloquium, Tashkent*, Kluwer Academic publishers, 1998, pp. 25-38.

[3], J. Alev & T. Lambre, Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl, *K-Theory*, **18**, 1999, pp. 401-411.

[4], R. Carter, Conjugacy classes in the Weyl group, *Comp. Math.*, **25**-1, 1972, pp. 1-59.

[5], A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, **9**, 1957, pp. 119-221.

[6], A. Guichardet, Suites spectrales à la Hochschild-Serre pour les produits croisés d'algèbres et de groupes, prépublication, 1999.

[7], M. Lorenz, On the homology of graded algebras, *Com. Alg.*, **20**-2, 1992, pp. 489-507.

[8], D. Stefan, Hochschild cohomology on Hopf-Galois extensions, *J. Pure Appl. Alg.*, **103**-2, 1995, pp. 221-233.

[9], M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings, *Proc. Am. Math. Soc.*, **126**-5, 1998, pp. 1345-1348.

[AMA - Algebra Montpellier Announcements - 01-2000][October, 2000]
Received May 2000.