ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 40 (2004), 129 – 159

EXTENSIONS PUREMENT INSÉPARABLES D'EXPOSANT NON BORNÉ

MUSTAPHA CHELLALI ET EL HASANE FLIOUET

Résumé: Dans [12], Sweedler a caractérisé les extensions purement inséparables K/k d'exposant fini qui sont produit tensoriel d'extensions simples. En vue d'étendre ce résultat aux extensions d'exposants non bornés, L. Kime dans [8] propose les extensions $k(x^{p^{-\infty}}) = k(x^{p^{-1}}, x^{p^{-2}}, \dots)$ comme généralisation d'extensions simples. Dans ce travail, on propose d'autres généralisations naturelles. Ceci nous a permis de décrire explicitement toutes les extensions purement inséparables K/k lorsque le degré d'imperfection de k est ≤ 2. Dans [5] J. K. Deveney a construit une extension purement inséparable K/k infinie ayant toutes ses sous-extensions propres L/k finies et telle que pour tout entier n, $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{2n}$ (p étant la caractéristique de k). Cet exemple s'est avéré fort utile pour notre travail. On construit pour tout entier j une extension purement inséparable K/k infinie ayant toutes ses sous-extensions propres L/k finies et telle que pour tout entier n, $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{jn}$. Soit K/k une extension purement inséparable, M/k la plus petite sous-extension de K/k telle que K/M est modulaire, on montre que si le degré d'imperfection de k est fini, alors M est non triviale ($M \neq K$); si le degré d'imperfection de k est infini on donne un contre-exemple où $M = K$.

1. Introduction

Soit K/k une extension purement inséparable finie de caractéristique $p \neq 0$; on a:

1. K/k est composée d'extensions simples, c'est-à-dire il existe une suite d'extensions:

$$K_0 = k \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$$

avec K_{i+1}/K_i simple (c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(\theta), \theta \in K_{i+1}$).

2000 *Mathematics Subject Classification*: 12F15.
Key words and phrases: corps parfait, degré d'imperfection, degré d'irrationalité, exposant, extension simple, modulaire, purement inséparable, relativement parfaite.
Received January 21, 2002.

2. Contrairement aux groupes abéliens finis (plus précisement aux p-groupes abéliens), K/k n'est pas produit tensoriel d'extensions simples. Dans [12] Sweedler a montré que cette propriété est vérifiée si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^{p^n} et k sont linéairement disjoints.

Une extesion K/k est dite modulaire si pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^{p^n} et k sont linéairement disjoints. En vue de trouver l'analogue de 2 pour les extensions infinies, L. Kime dans [8] propose comme généralisation d'extensions simples de k, les extensions de k de la forme $k(x^{p^{-\infty}}) = k(x, x^{p^{-1}}, x^{p^{-2}}, \dots)$; ensuite l'auteur donne un contre-exemple d'extension modulaire infinie qui n'est pas produit tensoriel d'extensions simples au nouveau sens. Dans ce travail on propose comme généralisation d'extensions simples les extension K/k pour lesquelles l'ensemble des corps intermédiaires de K/k est totalement ordonné par inclusion (cela équivaut à ce que toute sous-extension propre de K/k est simple au sens ordinaire); cette définition contient strictement la définition de L. Kime (cf. section 5), nous montrons alors que si le degré d'imperfection $\log_p([k, k^p])$ de k est ≤ 2, alors toute extension (modulaire) K/k est produit tensoriel d'extensions simples à notre sens. Dans [5], J. K. Deveney construit un exemple d'extension modulaire K/k tel que toute sous-extension propre de K/k est finie, et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{2n}$. Il est facile de voir que cette extension n'est pas produit tensoriel d'extensions simples au nouveau sens (cf. section 5). Dans la section 6, on construit pour tout $j \in \mathbf{N}$, une extension K/k vérifiant:

- Toute sous-extension propre de K/k est finie;
- $\forall n \in \mathbf{N}, \qquad [k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{jn}$.

Améliorant ainsi le contre-exemple de J. K. Deveney, une telle extension n'est pas produit tensoriel d'extensions simples au nouveau sens. De plus, notons $\mathrm{di}\,(k) = \log_p([k, k^p])$ le degré d'imperfection de k; on a alors $\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) = j$ et pour tout corps intermédiaire L de K/k on a $\mathrm{di}\,(L) = \mathrm{di}\,(k)$ ou $\mathrm{di}\,(L) = \mathrm{di}\,(K)$; remarquablement le degré d'imperfection saute donc de $\mathrm{di}\,(k)$ à $\mathrm{di}\,(k) - j$ sans prendre de valeurs intermédiaires; il y a donc irréductibilité aussi au niveau du degré d'imperfection. Tout ceci nous amène a une deuxième généralisation d'extensions simples, ce sont les extensions relativement parfaites, modulaires et telles que toute sous-extension propre est finie. Cette définition à son tour contient strictement la définition précédente (cf. section 6). On montre que si $\mathrm{di}\,(k)$ est fini, toute extension K/k est composé d'extensions simples. On construit un exemple d'extension modulaire qui n'est pas produit tensoriel d'extension simple au sens de cette deuxième généralisation.

Dans ce travail d'intéressantes propriétés de modularité sont établies (cf. section 4), notamment: Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k) < \infty$; alors la plus petite sous-extension M/k de K/k telle que K/M est modulaire n'est jamais triviale ($M \neq K$). Lorsque $\mathrm{di}\,(k)$ est infini, on donne un contre-exemple d'extension K/k où $M = K$.

Dans la suite on aura besoin des notations et terminologies suivantes. Soit K/k une extension finie de caractéristique p. Une partie G de K est dite r--générateur de K/k si $K = k(G)$; si de plus $|G|$ est minimum, G est dite r--base de K/k. Une partie A de K est dite r-libre sur k, si c'est une r-base de $k(A)/k$; dans le cas contraire A est dite r-liée sur k. On note, $\operatorname{di}(K/k) = |G|$, ($G$ une r-base de K/k); $\operatorname{di}(K/k)$ sera appellé le degré d'irrationalité de K/k. Il est connu [10] que si L/L' est une sous-extension de K/k, alors $\operatorname{di}(L/L') \leq \operatorname{di}(K/k)$. Dans la suite de cette section, on suppose K/k purement inséparable finie. Soit $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ une r-base de K/k et x un élément de K. On pose: $o(x/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : x^{p^m} \in k\}$, $o_1(K/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : K^{p^m} \subset k\}$. Alors $\{a_1, \dots, a_n\}$ est dite une r-base canoniquement ordonnée si elle vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $o(a_j/k(a_1, \dots, a_{j-1})) = o_1(K/k(a_1, \dots, a_{j-1}))$. L'entier $o(a_j/k(a_1, \dots, a_{j-1}))\,(1 \leq j \leq n)$, est indépendant du choix de la r-base canoniquement ordonnée G de K/k (cf. [11]); on l'appellera le j-ème exposant de K/k et on le notera $o_j(K/k)$; on pose $o_j(K/k) = 0$, si $j > n$. Dans les sections 2 et 3 ci-après, on étudie systématiquement les propriétés des ces invariants, propriétés dont nous aurons besoin aux sections suivantes. Nous donnons aussi, des généralisations non triviales de ces notions aux extensions infinies K/k telles que le degré d'imperfection de k est fini. On peut appeler de telles extensions, extensions purement inséparables modérement infinies.

2. Degré d'irrationalité d'une extension finie

Dans cette section on suppose que K/k finie de caractéristique $p > 0$.

Définition 1.2. Une partie G de K est dite r-générateur de K/k si $K = k(G)$; si de plus $|G|$ est minimum, G est dite r-base de K/k. Une partie A de K est dite r-libre sur k, si c'est une r-base de $k(A)/k$; dans le cas contraire A est dite r-liée sur k.

On note, $\operatorname{di}(K/k) = |G|$, ($G$ une r-base de K/k) et $\operatorname{di}(K/k)$ sera appellé le degré d'irrationalité de K/k.

D'àprès [10] on a:

Proposition 1.2. *Soit K/k une extension purement inséparable finie. Une partie G de K est une r-base de K/k si et seulement si G est une r-base de $K/k(K^p)$.*

Preuve. On a que K/k est purement inséparable finie; donc il existe $m_1 \in \mathbf{N}$ tel que $K^{p^{m_1}} \subseteq k$. Si G est une r-base de K/k, alors G est un r-générateur de $K/k(K^p)$; s'il existe $x \in G$ tel que $K = k(K^p)(G \backslash \{x\})$, alors $K = k(K^{p^2})(G \backslash \{x\}) = \cdots = k(K^{p^{m_1}})(G \backslash \{x\}) = k(G \backslash \{x\})$. C'est absurde car G est une r-base de K/k. Inversement, si G est une r-base de $K/k(K^p)$, alors $K = k(K^p)(G) = \cdots = k(K^{p^{m_1}})(G) = k(G)$; d'où $\operatorname{di}(K/k) = \operatorname{di}(K/k(K^p))$. □

Remarque. Cette proposition permet de ramener l'étude des propriétés de "r--indépendance" sur k à des propriétés de p-indépendance sur $k(K^p)$ lesquelles sont plus riches (théorème de la base incomplète ...), $K/k(K^p)$ étant de hauteur 1.

Corollaire 1.2. *Si K/k est une extension purement inséparable finie, alors*

$$[K : k(K^p)] = p^{\mathrm{di}\,(K/k)}\,.$$

Proposition 2.2. *Soit L/k une sous-extension d'une extension finie K/k. On a*

$$\mathrm{di}\,(K/k) \leq \mathrm{di}\,(K/L) + \mathrm{di}\,(L/k)\,,$$

avec l'égalité si et seulement si une r-base de L/k se prolonge en une r-base de K/k.

Preuve. Soit A une r-base de L/k, B une r-base de K/L; on a $K = L(B) = k(A)(B) = k(A \cup B)$; donc $\mathrm{di}\,(K/k) \leq |A \cup B| = |A| + |B|$ (car $A \cap B = \emptyset$). S'il y a égalité $|A \cup B| = |A| + |B| = \mathrm{di}\,(K/k)$, alors $A \cup B$ est une r-base de K/k. Inversement, si une r-base A de L/k se prolonge en une r-base $A \cup B$ (avec $A \cap B = \emptyset$) de K/k; il est immédiat que B est une r-base de $K/k(A)$; donc $\mathrm{di}\,(K/k) = |A| + |B| = \mathrm{di}\,(L/k) + \mathrm{di}\,(K/L)$. □

Une application type de cette proposition est: Soit B une r-base de K/k, $A \subset B$; alors A et $B \setminus A$ sont respectivement des r-bases de $k(A)/k$ et $K/k(A)$.

Proposition 3.2. *Soit K/k une sous-extension finie d'une extension Ω/k, L un sous-corps de Ω. On a*

$$\mathrm{di}\,(L(K)/L(k)) \leq \mathrm{di}\,(K/k)\,.$$

Preuve. Il est immédiat qu'une r-base de K/k est r-générateur de $L(K)/L(k)$. □

Soit S/k une sous-extension séparable de k dans K. Par le Théorème de l'élément primitif, il existe $\alpha_1 \in S$ tel que: $S = k(\alpha_1)$. Soient G une r-base de K/S et $\beta \in G$. Il est connu que $\mathrm{di}\,(S(\beta)/k) = 1$. On en déduit: $\mathrm{di}\,(K/k) = \mathrm{di}\,(K/S)$, ce qui permet de ramener l'étude de di à une extension purement inséparable.

Proposition 4.2. *Soient K_1/k et K_2/k des sous-extensions finies d'une extension K/k. On a:*

1. $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/K_2) \leq \mathrm{di}\,(K_1/k)$ *avec l'égalité si K_1 et K_2 sont k-linéairement disjoints.*
2. $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/k) \leq \mathrm{di}\,(K_1/k) + \mathrm{di}\,(K_2/k)$ *avec l'égalité si K_1 et K_2 sont k--linéairement disjoints et K_1/k, K_2/k purement inséparables.*

Preuve. Soit S la clôture séparable de k dans K_1. D'après la remarque ci-dessus, on a: $\mathrm{di}\,(K_1/k) = \mathrm{di}\,(K_1/S)$ et $\mathrm{di}\,(K_1(K_2(S))/S(K_2)) = \mathrm{di}\,(K_1(K_2)/K_2)$. Donc on peut supposer que K_1/k est purement inséparable. Soit G est une r-base de K_1/k; alors $K_1(K_2) = K_2(G)$. Soit $G' \subset G$ vérifiant $K_1(K_2) = K_2(G')$; comme K_1/k et K_2/k sont k-linéairement disjointes, alors $K_1/k(G')$ et $K_2(G')/k(G')$ sont $k(G')$-linéairement disjointes. Il en résulte que $K_1 = K_1 \cap (K_1(K_2)) = K_1 \cap (K_2(G')) = k(G')$. Donc $G = G'$, car G est minimal. Soient G_1 et G_2 des r-bases respectives de K_1/k et K_2/k; on a $K_1(K_2) = k(G_1 \cup G_2)$; donc $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/k) \leq |G_1 \cup G_2| \leq |G_1| + |G_2|$. Soit $G' \subset G_1 \cup G_2$ tel que $K_1(K_2) = k(G')$; on peut écrire $G' = G'_1 \cup G'_2$ avec $G'_1 \subset G_1$ et $G'_2 \subset G_2$; comme K_1/k et K_2/k sont

k-linéairement disjointes, par la transitivité de cette propriété (cf. figure), K_1 et $k(G')$ sont $k(G'_1)$-linéairement disjoints; en particulier $K_1 \cap k(G') = k(G'_1)$. Soit $K_1 = k(G')$; donc $G'_1 = G_1$; de même $G'_2 = G_2$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
& & K_2 & & \\
& k(G'_2) \arrow[ur] \arrow[rr] & & k(G') & \\
k \arrow[ur] \arrow[rr] & & k(G'_1) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K_1
\end{tikzcd}$$

Ce qui suit est le résultat de [1] énoncé d'une façon légèrement améliorée:

Théorème 1.2. *Soit L/L' une sous-extension de K/k. Alors* $\mathrm{di}\,(L/L') \leq \mathrm{di}\,(K/k)$.

Preuve. On se ramène imédiatement au cas $L' = k$.
Cas où K/k est purement inséparable: Par le corollaire 1, on a

$$p^{\mathrm{di}\,(K/k)} = [K : k(K^p)] = \frac{[K : L][L : k(L^p)]}{[k(K^p) : k(L^p)]}\,.$$

Or, $[k(K^p) : k(L^p)] \leq [K^p : L^p] = [K : L]$; donc $p^{\mathrm{di}\,(L/k)} = [L : k(L^p)] \leq p^{\mathrm{di}\,(K/k)}$.
Cas Général: Soit S la clôture séparable de K/k. On a: $L/L \cap S$ est purement inséparable et $S/L\cap S$ est séparable; donc $S/L\cap S$ et $L/L\cap S$ sont $L\cap S$-linéairement disjointes; donc $\mathrm{di}\,(L/k) = \mathrm{di}\,(L/L\cap S) = \mathrm{di}\,(S(L)/S) \leq \mathrm{di}\,(K/S) = \mathrm{di}\,(K/k)$. $\square$

Rappelons qu'on appel le degré d'imperfection d'un corps commutatif k le cardinal d'une p-base de k (une r-base de k/k^p); on le notera $\mathrm{di}\,(k)$.

Exemple. Si P est parfait $\mathrm{di}\,(P(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = n$.

Le théorème suivant est la généralisation naturelle du théorème de l'élément primitif.

Théorème 2.2. *Supposons* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini et k non parfait. Alors pour toute extension finie K de k, on a*

$$\mathrm{di}\,(K/k) \leq \mathrm{di}\,(k)\,.$$

Preuve. En utilisant l'extension normale engendrée et la proposition 4.2, on se ramène à K/k purement inséparable. Soit m tel que $K^{p^m} \subset k$, B une p-base de k; soit dans une clôture purement inséparable de K, A tel que $A^{p^m} = B$. On a $K^{p^m} \subset k = k^p(B) = k^{p^m}(B) = k^{p^m}(A^{p^m})$; d'où $K \subset k(A)$; donc $\mathrm{di}\,(K/k) \leq |A| = \mathrm{di}\,(k)$. $\square$

Ceci amène à regarder de près l'entier $\mathrm{di}\,(k)$. On a (cf. [11]):

Théorème 3.2. *Supposons* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. On a:*
1) *Si K/k est fini* $\mathrm{di}\,(K) = \mathrm{di}\,(k)$.

2) *Si K/k est algébrique séparable,* $\mathrm{di}\,(K) = \mathrm{di}\,(k)$.
3) *Si K/k est purement inséparable infini,* $\mathrm{di}\,(K) < \mathrm{di}\,(k)$.

Preuve. 1) Si K/k est fini on a

$$[K, K^p] = \frac{[K, k][k, k^p]}{[K^p, k^p]} = \frac{[K, k][k, k^p]}{[K, k]} = [k, k^p]\,.$$

2) Si K/k est séparable, $K^p \cap k = k^p$ et $K^p(k) = K$; de plus K^p/k^p est séparable et k/k^p purement inséparable; donc k et K^p sont k^p-linérement disjoint; l'égalité resulte de la proposition 4.2.

3) Soit K/k purement inséparable; soit B une p-base de K, $B_1 \subset B$ finie, $k_1 = k(B_1)$; B_1 est p-libre sur K, donc sur k_1; donc $|B_1| \leq \mathrm{di}\,(k_1) = \mathrm{di}\,(k)$ car k_1/k finie. Par suite $K/K^p(k)$ est fini. Soit B' une r-base de $K/K^p(k)$, $L = k(B')$. On a:

$$[K, K^p] = [K^p(k)(B'), K^p] = [L(K^p), L^p(K^p)]\,.$$

Donc

$$[K, K^p] \leq [L, L^p]\,,$$

avec l'égalité si et seulement si K^p et L sont L^p-linéairement disjoints, c'est-à-dire si et seulement si K/L est séparable, c'est-à-dire si et seulement si $K = L$ (puisque K/L est purement inséparable). □

Corollaire 2.2. *Si K/k est algébrique, on a* $\mathrm{di}\,(K) \leq \mathrm{di}\,(k)$.

Une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus est:

Proposition 5.2. *Soit P le sous-corps parfait maximal de k. On a* $\mathrm{di}\,(k) \leq$ *$d^o tr(k/P)$ avec l'égalité si k/P est de type fini.*

Il existe des contres-exemples à l'égalité. Par rapport à celui de [10] (page 72, remarque 1.85), le suivant a la différence que le corps de base est très régulier.

Soit P un corps parfait (de caractéristique p toujours > 0). On adjoint à $P(X, Y)$ les éléments $T_1, T_2, \ldots,$ tels que $Y = T_1^p X$, $T_1 = T_2^{p^2} X, \ldots, T_i = T_{i+1}^{p^{i+1}} X, \ldots$ Par récurrence on a:

$$S_i = 1 + 2 + \cdots + i = i(i+1)/2\,,$$
$$\sigma_i = 1 + p^{S_1} + p^{S_2} + \cdots + p^{S_{i-1}}\,.$$

Alors,

$$T_i^{p^{S_i}} = \frac{Y}{X^{\sigma_i}}\,.$$

Soit $k = P(X, Y, T_1, T_2, \ldots)$. On a $k = \bigcup_i P(X, T_i)$; par construction $k = k^p(X)$; $X^{p^{-1}} \notin k$ car sinon il existe i tel que $X^{p^{-1}} \in P(X, T_i)$; absurde car X et T_i sont algébriquement libre sur P; P est le plus grand sous-corps parfait de k. En effet, soit $\alpha \in P(X,Y)$ tel que $\alpha^{p^{-\infty}} \in k$; donc il existe j tel que $\alpha^{p^{-S_i}} \in P(X,T_j)$. Comme $P(X,T_j)/P(X,Y)$ est simple il admet une seule sous-extension de degré p^{S_i} qui est $P(X,T_i)$; par suite, $\alpha^{p^{-S_i}} \in P(X,T_i)$; donc $\alpha \in P(X^{S_i}, Y/X^{\sigma_i})$. La théorie du degré lexicographique a toute les bonnes propriétés d'un degré et montre que le degré lexicographique de (la fraction rationnelle) α est de la forme (d_1, d_2) avec:

$$\begin{aligned} d_1 &= ap^{S_i} - b\sigma_i\,, \\ d_2 &= b\,, \end{aligned}$$

ceci pour tout i. Soit σ le nombre p-adique $1 + p^{S_1} + p^{S_2} + \ldots$. On a alors $d_1 + \sigma d_2 = 0$; comme σ est non rationnel (son dévelopement de Hensel étant non périodique), on a: $d_1 = d_2 = 0$; donc $\alpha \in P$.

Nous allons étendre les notions précédentes aux extensions purement inséparables K/k infinies telles que $\mathrm{di}\,(k) < \infty$. Une telle extension est d'exposant fini si et seulement si elle est finie (cf. preuve du théorème 2.2).

Théorème 4.2. *Soit K/k une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini, L/k une sous-extension finie de K/k. On a*

$$\mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k))\,,$$

et la borne du second membre est atteinte.

Remarque. La borne de ce théorème est aussi bonne que celle du théorème 2.2 car

$$\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k)) \leq \mathrm{di}\,(k)\,.$$

Preuve.

1) Supposons d'abord $K = K^p(k)$ (autrement dit, K/k relativement parfaite); k est donc r-générateur de K/K^p; donc il existe $B \subset k$, p-base de K, donc p-libre sur L. Soit $n = \mathrm{di}\,(k)$; on a

$$p^n = [L, L^p] = [L, L^p(k)][L^p(k), L^p]\,.$$

Comme $B \subset L^p(k)$ et B est p-libre sur L, on a $[L^p(k), L^p] \geq p^s$ avec $s = |B| = \mathrm{di}\,(K)$. Donc $[L, L^p(k)] \leq p^{n-s}$, soit par le corollaire 1, $\mathrm{di}\,(L/k) \leq n - s = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$.

2) $K \neq K^p(k)$; soit B une r-base de $K/K^p(k)$; on a $K = K^p(k(B))$; donc $K/k(B)$ est relativement parfaite. Posons $L_1 = L(B)$; on a (par la proposition 2.2)

$$\mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(L_1/k) \leq \mathrm{di}\,(L_1/k(B)) + |B|\,.$$

Comme $K/k(B)$ est relativement parfaite, d'après le 1er cas,

$$\mathrm{di}\,(L_1/k(B)) \leq \mathrm{di}\,(k(B)) - \mathrm{di}\,(K) = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)\,;$$

d'où

$$\mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + |B| = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k))\,.$$

Pour la deuxième affirmation, on a besoin de:

Lemme 1.2. *Soit* $(K_n/k)_{n\geq 1}$ *une suite de sous-extensions d'une extension* Ω/k, *avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini, vérifiant* $K_1 \subset K_2 \subset \dots$. *Soit* $K = \cup K_n$. *Alors il existe* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tel que pour* $n \geq n_0$, *on a* $\mathrm{di}\,(K_n^p(k)/K_n^p) = \mathrm{di}\,(K^p(k)/K^p)$.

Preuve. D'abord $\mathrm{di}\,(K_n^p(k)/K_n^p)$ est finie car c'est une sous-extension d'une extension finie K_n/K_n^p. On a

$$K_{n+1}^p(k)/K_{n+1}^p = K_n^p(k)K_{n+1}^p/K_n^pK_{n+1}^p\,;$$

donc

$$\mathrm{di}\,(K_{n+1}^p(k)/K_{n+1}^p) \leq \mathrm{di}\,(K_n^p(k)/K_n^p)\,.$$

C'est donc une suite décroissantes d'entiers, donc stationnaire pour $n \geq n_0$. S'agissant d'extensions d'exposant 1, on en déduit

$$[K_n^p(k), K_n^p] = [K_{n_0}^p(k), K_{n_0}^p]\,.$$

On sait que l'égalité des degrés $[K_1L, K_2L] = [K_1, K_2]$ (K_1/K_2 finie) a lieu si et seulement si K_1 et K_2L sont K_2-linéairement disjoints. Donc $K_{n_0}^p(k)$ et K_n^p sont $K_{n_0}^p$-linéairement disjoints; donc si B est une r-base de $K_{n_0}^p(k)/K_{n_0}^p$, c'est une r-base de $K_n^p(k)/K_n^p$. Donc $K^p(k) = \cup K_n^p(k) = \cup K_n^p(B) = (\cup K_n^p)(B) = K^p(B)$, et comme B est p-libre sur chaque K_n ($n \geq n_0$) et K_n croissante, B est p-libre sur $\cup K_n = K$. Donc c'est une r-base de $K^p(k)/K^p$. □

Fin de preuve du théorème. Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. Posons $K_n = k^{p^{-n}} \cap K$. On a K_n/k finie et $\cup K_n = K$. Donc par le lemme, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on a $\mathrm{di}\,(K_n^p(k)/K_n^p) = \mathrm{di}\,(K^p(k)/K^p)$, soit

$$\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K_n/k) = \mathrm{di}\,(K) - \mathrm{di}\,(K/K^p(k))\,.$$

□

Remarque 1.2. Le théorème précedent contient le théorème 1.2 (K/k finie) et le théorème 2.2 ($K = k^{p^{-\infty}}$).

Définition 2.2. Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. L'entier

$$\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k))$$

s'appel le degré d'irrationalité de l'extension K/k.

On le note toujours $di(K/k)$; il donne une mesure naturelle de la taille de K/k. Le lemme précédent se traduit par soit $(K_n/k)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'extensions, avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini; si $K = \cup K_n$, alors $\lim(\mathrm{di}\,(K_n/k)) = \mathrm{di}\,(K/k)$. Nous allons retrouver toutes les propriétés du degré d'irrationalité des extension finies.

Proposition 6.2. *Soit* L/k *une sous-extension d'une extension purement inséparable* K/k *avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. On a*

$$\mathrm{di}\,(K/k) \leq \mathrm{di}\,(K/L) + \mathrm{di}\,(L/k)\,,$$

avec l'égalité si et seulement si une p*-base de* L/k *se prolonge en une* p*-base de* K/k.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{di}\,(K/k) &= \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k))\\ &= \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(L) + \mathrm{di}\,(L) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k))\,.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que le degré d'imperfection $di(K/K^p(k))$ est semi-transitif. Soit A une p-base de L/k, A' une p-base de K/L. On a

$$\begin{aligned}L &= L^p(k)(A)\\ K &= K^p(L)(A') = K^p(L^p(k))(A \cup A') = K^p(k)(A \cup A')\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{di}\,(K/K^p(k)) \leq |A \cup A'| \leq |A| + |A'| = \mathrm{di}\,(L/L^p(k)) + \mathrm{di}\,(K/K^p(L))\,.$$

S'il y a égalité, $\mathrm{di}\,(K/K^p(k)) = |A \cup A'|$; donc $A \cup A'$ est une p-base de K/k. Inversement, si A se prolonge en une p-base $A \cup A'$ de K/k avec $A \cap A' = \emptyset$, on a

$$K = K^p(k)(A)(A') = K^p L^p(k)(A)(A') = K^p(L)(A'))\,.$$

Il en résulte que A' est une p-base de K/L; par suite, il y a égalité. □

Proposition 7.2. *Soit K/k une sous-extension d'une extension Ω/k, L un sous-corps de Ω, avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. On a*

$$\mathrm{di}\,(L(K)/L(k)) \leq \mathrm{di}\,(K/k)\,.$$

Preuve. Soit $(K_n/k)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'extensions finies telle que $\bigcup K_n = K$ (exemple $K_n = k^{p^{-n}} \cap K$). On a $\bigcup L(K_n) = L(K)$ et $L(K_n)/L(k)$ finie. Donc

$$\lim(\mathrm{di}\,(L(K_n)/L(k))) = \mathrm{di}\,(L(K)/L(k))\,,$$

et on a (par la proposition 4.2)

$$\mathrm{di}\,(L(K_n)/L(k)) \leq \mathrm{di}\,(K_n/k) \leq \mathrm{di}\,(K/k)\,.$$

□

Proposition 8.2. *Soient K_1/k et K_2/k des sous-extensions d'une extension K/k, avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. On a:*

1. $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/K_2) \leq \mathrm{di}\,(K_1/k)$ *avec l'égalité si K_1 et K_2 sont k-linéairement disjoints.*
2. $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/k) \leq \mathrm{di}\,(K_1/k) + \mathrm{di}\,(K_2/k)$ *avec l'égalité si K_1 et K_2 sont k--linéairement disjoints et K_1/k, K_2/k purement inséparables.*

Preuve. Soit $(K_{1n}/k)_{n\geq 1}$ et $(K_{2n}/k)_{n\geq 1}$ des suites croissante d'extensions finies telles que $\bigcup K_{1n} = K_1$ et $\bigcup K_{2n} = K_2$. Si K_1 et K_2 sont k-linéairement disjoints, par la transitivité de la linéarité disjointe, K_{1n} et K_{2n} sont k-linéairement disjoints. Donc (par la proposition 4.2) $\mathrm{di}\,(K_{1n}(K_2)/K_2) = \mathrm{di}\,(K_{1n}/k)$. Donc $\lim(\mathrm{di}\,(K_{1n}(K_2)/K_2)) = \lim(\mathrm{di}\,(K_{1n}/k))$, soit $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/K_2) = \mathrm{di}\,(K_1/k)$.

On a $\mathrm{di}\,(K_{1n}(K_{2n})/k) = \mathrm{di}\,(K_{1n}/k) + \mathrm{di}\,(K_{2n}/k)$; en passant aux limites on obtient $\mathrm{di}\,(K_1(K_2)/k) = \mathrm{di}\,(K_1/k) + \mathrm{di}\,(K_2/k)$. □

Théorème 5.2. *Soit L/L' une sous-extension d'une extension K/k, avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. Alors:*

$$\mathrm{di}\,(L/L') \leq \mathrm{di}\,(K/k)\,.$$

Preuve. Soit $L_n = k^{p^{-n}} \cap L$ et $K_n = k^{p^{-n}} \cap K$. On a $L_n \subset K_n$. Donc
$$\mathrm{di}\,(L_n/k) \leq \mathrm{di}\,(K_n/k)\,.$$
Par passage aux limites, on obtient $\mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(K/k)$. Donc
$$\mathrm{di}\,(L/L') = \mathrm{di}\,(LL'/kL') \leq \mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(K/k)\,. \qquad \square$$

3. Exposants des extensions purement inséparable

Définition 1.3. Soit K/k une extension purement inséparable finie de caractéristique $p \neq 0$, $x \in K$. Posons: $o(x/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : x^{p^m} \in k\}$, $o_1(K/k) = \inf\{m \in \mathbf{N} : K^{p^m} \subset k\}$. Une r-base $B = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ de K/k est dite canoniquement ordonnée si pour $j = 1, 2, \dots, n$
$$o(a_j/k(a_1, a_2, \dots a_{j-1})) = o_1(K/(a_1, a_2, \dots a_{j-1}))\,.$$

Remarque 1.3. Toute r-base peut être canoniquement ordonnée.

Lemme 1.3. *Si $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k, alors*
$$o(a_s/k(a_1, \dots, a_{s-1})) = \inf\{m \in \mathbf{N} : \mathrm{di}\,(k(K^{p^m})/k) \leq s - 1\}\,.$$

Preuve. Posons $o(a_s/k(a_1, \dots, a_{s-1})) = m_s$ et $m'_s = \inf\{m \in \mathbf{N} : \mathrm{di}\,(k(K^{p^m})/k) \leq s - 1\}$. Par définition de la r-base canoniquement ordonnée de K/k on a: pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i^{p^{m_s}} \in k(a_1, \dots, a_{s-1})$, donc $k(K^{p^{m_s}}) \subseteq k(a_1, \dots, a_{s-1})$. Par le théorème 1.2, on a $\mathrm{di}\,(k(K^{p^{m_s}})/k) \leq s - 1$, donc $m'_s \leq m_s$. Supposons $m'_s < m_s$; on a $\mathrm{di}\,(k(K^{p^{m'_s}}) \leq s - 1$ donc $\mathrm{di}\,(k(a_1^{p^{m'_s}}, \dots, a_s^{p^{m'_s}})) \leq s - 1$ (th. 1.2); donc $(a_1^{p^{m'_s}}, \dots, a_s^{p^{m'_s}})$ est r-lié sur k, donc sur $L = k(k(a_1^{p^{m'_s}}, \dots, a_s^{p^{m'_s}}))^p$ (prop. 1.2, §2); donc il existe $j \leq s$ tel que
$$a_j^{p^{m'_s}} \in L(a_1^{p^{m'_s}}, \dots, a_{j-1}^{p^{m'_s}}) = k(a_1^{p^{m'_s}}, \dots, a_{j-1}^{p^{m'_s}}, a_j^{p^{m'_s+1}}, \dots, a_s^{p^{m'_s+1}})\,.$$
Comme $m'_s < m_s \leq m_j$ on en déduit que
$$(a_j^{p^{m'_s}})^{p^{m_j - m'_s - 1}} \in k(a_1^{p^{m_j-1}}, \dots, a_{j-1}^{p^{m_j-1}}, a_j^{p^{m_j}}, \dots, a_s^{p^{m_j}}) \subset k(a_1, \dots, a_{j-1})\,,$$
ce qui est absurde car $m_j = o(a_j/k(a_1, \dots, a_{j-1}))$. $\square$

Il en résulte immédiatement ([11])

Théorème 1.3. *Les entiers $o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$, $(1 \leq i \leq n)$ sont indépendants du choix de la r-bases canoniquement ordonnée $\{a_1, \dots, a_n\}$ de K/k.*

On appellera $o(a_i/k(a_1, \dots, a_{i-1}))$ le i-ème exposant de K/k et on le notera $o_i(K/k)$. On a
$$o_1(K/k) \geq o_2(K/k) \geq \cdots \geq o_n(K/k)\,.$$

On pose $o_i(K/k) = 0$, si $i > n$.

Proposition 1.3. *Soit K et L des corps intérmédiaires d'une extension Ω/k avec K/k purement inséparable fini. Alors pour tout entier j, on a $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$.*

Preuve. Posons $m_j = o_j(K/k)$; on a

$$\begin{aligned}\mathrm{di}\,((K(L)^{p^{m_j}}k(L)/k(L) &= \mathrm{di}\,(K^{p^{m_j}}(k)(L)/k(L)) \\ &\leq \mathrm{di}\,(k(K^{p^{m_j}})/k) \leq j-1\,;\end{aligned}$$

donc $o_j(K(L)/k(L) \leq m_j$. □

Proposition 2.3. *Si K_1/k et K_2/k sont deux sous-extensions de K/k, alors K_1/k et K_2/k sont k-linéairement disjointes si et seulement si $o_j(K_1(K_2)/K_2) = o_j(K_1/k)$, $(\forall j \in \mathbf{N})$.*

Preuve. Soit $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une r-base canoniquement ordonnée de K_1/k; on a pour tout $i \in \mathbf{N}$, $o_i(K_1/k) \geq o_i(K_1(K_2)/K_2)$. Or

$$\begin{aligned}[K_1(K_2) : K_2] &= p^{o_1(K_1(K_2)/K_2)} \ldots p^{o_n(K_1(K_2)/K_2)} = [K_1 : k] \\ &= p^{o_1(K_1/k)} \ldots p^{o_n(K_1/k)}\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $o_i(K_1/k) = o_i(K_1(K_2)/k)$. Réciproquement, on a $[K_1(K_2) : K_2] = \prod_{i\in\mathbf{N}} p^{o_i(K_1(K_2)/K_2)} = \prod_{i\in\mathbf{N}} p^{o_i(K_1/k)} = [K_1 : k]$. Donc K_1/k et K_2/k sont k-linéairement disjointes. □

Proposition 3.3. *Soit K/k une extension purement inséparable finie, pour toute sous-extension L/L' de K/k. Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{di}\,(L'(L^{p^{o_j(K/k)}})/L') &\leq \mathrm{di}\,(L'(K^{p^{o_j(K/k)}})/L') \\ &\leq \mathrm{di}\,(k(K^{p^{o_j(K/k)}})/k) \leq j-1\,.\end{aligned}$$

Donc $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$. □

Remarque. Ce résultat permet de retrouver immédiatement le résulat de [10] (page 132) sur les exposants de F/k avec $F = K(\theta)$, $\theta^p \in K \setminus K^p$. Posons $m_j = o_j(K/k)$ et $m'_j = o_j(F/k)$. On a en comparant $[F, k]$ et $[K, k]$

$$\sum_j (m'_j - m_j) = 1$$

avec $m'_j \geq m_j$. Donc il existe i tel que

$$m'_j = \begin{cases} m_i + 1 & \text{si} \quad j = i\,, \\ m_j & \text{sinon.}\end{cases}$$

Proposition 4.3 (Algorithme de complétion des r-bases)**.** *Soient K/k une extension purement inséparable finie et G un r-générateur de K/k. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ est un système de K tel que $o(\alpha_j/k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})) = o_j(K/k)$, $1 \leq j \leq s$, alors, pour toute suite $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \ldots$ d'éléments de G vérifiant $o(\alpha_j/k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1})) =$*

$\max_{a\in G}(o(a/k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1})))$, $j\geq 1$, *la suite s'arrête sur un plus grand entier n tel que $o(\alpha_n/k(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}))>0$ et on a $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ est une r-base de K/k.*

Preuve. Soit $m_j = o_j(K/k)$, $m'_j = o(\alpha_j/k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}))$. Comme G est un r-générateur de K/k et que pour tout $a\in G$, $a^{p^{m'_j}}\in k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1})$, on a $\mathrm{di}\,(k(K^{p^{m'_j}}))\leq j-1$; donc $m'_j\geq m_j$. D'autre part,

$$p^{\sum_{j=1}^t m'_j} = [k(\alpha_1,\dots,\alpha_t),k]\leq [K,k] = p^{\sum_j m_j}\,.$$

Donc $\sum_{j=1}^t m'_j\leq\sum_j m_j\ \forall t\in\mathbf{N}$; donc $m'_j=m_j$ et on a $k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=K$. D'où $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ est une r-base de K/k. □

Soit m_j le j-ème exposant de K/k , $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k. Appliquons l'algorithme ci-dessus à $k(K^{p^{m_j}})=k(\alpha_1^{p^{m_j}},\dots,\alpha_n^{p^{m_j}})$. Par récurrence sur j on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.3. *Soit $1\leq j\leq n$. On a:*
1) $\alpha_j^{p^{m_j}}\in k(\alpha_1^{p^{m_j}},\dots,\alpha_{j-1}^{p^{m_j}})$.
2) $k(K^{p^{m_j}})=k(\alpha_1^{p^{m_j}},\dots,\alpha_{j-1}^{p^{m_j}})$.
3) *Soit* $\Lambda_j=\{(i_1,\dots i_{j-1})\mid 0\leq i_1<p^{m_1-m_j},\dots,0\leq i_{j-1}<p^{m_{j-1}-m_j}\}$*; alors* $\{(\alpha_1,\dots\alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi}\mid\xi\in\Lambda_j\}$ *est une base de $k(K^{p^{m_j}})$ sur k.*
4) *Soit $n\in N$, j le plus grand entier tel que $m_j>n$; alors $\{\alpha_1^{p^n},\dots,\alpha_j^{p^n}\}$ est une r-base canoniquemnt ordonnée de $k(K^{p^n})/k$ et sa liste des exposants est $(m_1-n,m_2-n,\dots,m_j-n)$.*

Dans ce qui suit nous allons généraliser la notion d'exposants aux extensions infinies K/k telles que $\mathrm{di}\,(k)$ est fini. Rappelons qu'une telle extension est d'exposant non borné.

Remarque 2.3. Soit K_n/k une suite croissante d'extensions finies. Pour tout entier j, la suite d'entiers $o_j(K_n/k)$ est croissante. Donc $o_j(K_n/k)\to\infty$ ou $o_j(K_n/k)$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Si $o_j(K_n/k)$ est bornée, alors pour tout $t\geq j$ on a $o_t(K_n/k)\leq o_j(K_n/k)$, et donc $o_t(K_n/k)$ est bornée. Donc il existe un entier t tel que:

1. $\forall j\leq t,\quad o_j(K_n/k)\to\infty$,
2. $\forall j>t,\quad o_j(K_n/k)\to e_j$ fini.

Théorème 2.3. *L'entier t ci-dessus est égal à $\mathrm{di}\,(k)-\mathrm{di}\,(K)$ avec $K=\bigcup K_n$. Soit $k_1=\bigcap K^{p^n}(k)$. Alors K/k_1 est finie et on a :*

$$\lim_{n\to\infty} o_j(K_n/k)=\infty \qquad \text{pour } j\leq t,$$
$$\lim_{n\to\infty} o_j(K_n/k)=o_{j-t}(K/k_1) \qquad \text{pour } j>t.$$

Lemme 2.3. *Soit K/k une extension purement inséparable infinie avec di(k) fini. La suite décroissante $(K^{p^e}(k))_{e\in\mathbf{N}}$ est stationnaire sur $k_1=K^{p^{e_0}}(k)$; on a K/k_1 fini et k_1/k est la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k.*

Preuve. Soit B une p-base de K/k, $L = k(B)$. On a $K = K^p(B) = K^p(k(B))$, donc $K/k(B)$ est relativement parfaite. $k(B)/k$ étant fini, il existe un entier e tel que $k(B)^e \subset k$; il en résulte que $K^{p^e} = K^{p^{e+1}}(k(B))^{p^e} \subset K^{p^{e+1}}(k)$; donc $K^{p^e}(k) = K^{p^{e+1}}(k) = k(K^{p^e}(k))^p$. □

Preuve du théorème: Soit e un entier; on a que $K_n^{p^e}(k)$ est une suite croissante et $\bigcup K_n^{p^e}(k) = K^{p^e}(k)$; donc pour $n \geq n_0$, on a (par la proposition 6.2)

$$\mathrm{di}\,(K_n^{p^e}(k)/k) = \mathrm{di}\,(k_1/k) + \mathrm{di}\,(K^{p^e}(k)/k_1) = t + \mathrm{di}\,(K^{p^e}(k)/k_1)\,.$$

Donc $\mathrm{di}\,(K_n^{p^e}(k)/k) \geq t$. Or si $o_t(K_n/k)$ était stationnaire sur un entier e, on aurait (par le lemme 1.3) $\mathrm{di}\,(K_n^{p^e}(k)/k) \leq t-1$ pour n assez grand, contradiction.

Soit e tel que $k_1 = K^{p^e}(k)$; donc pour n assez grand,

$$\mathrm{di}\,(K_n^{p^e}(k)/k) = t < t+1\,;$$

donc (par le lemme 1.3) $o_{t+1}(K_n/k) \leq e$; donc $o_{t+1}(K_n/k)$ est borné.

Posons pour $j \geq 1$, $e_j = \lim(o_{t+j}(K_n/k))$. Pour n assez grand, on a $e_j = o_{t+j}(K_n/k)$. D'après le lemme 1.3, e_j est caractérisé par

$$\begin{cases} \mathrm{di}\,(K_n^{p^{e_j}}(k)/k) & < t+j\,, \\ \mathrm{di}\,(K_n^{p^{e_j-1}}(k)/k) & \geq t+j\,. \end{cases}$$

Donc à la limite on a les mêmes inégalités avec K à la place de K_n. Or

$$\mathrm{di}\,(K^{p^{e_j}}(k)/k) = \mathrm{di}\,(K^{p^{e_j}}(k)/k_1) + \mathrm{di}\,(k_1/k) = \mathrm{di}\,(K^{p^{e_j}}(k_1)/k_1) + t\,.$$

Par suite, d'après le lemme 1.3, $e_j = o_j(K/k_1)$. □

Définition 2.3. Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. Soit k_1/k la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k. On appelle $s^{\text{ième}}$ exposant de K/k, l'élément $o_s(K/k)$, avec

$$\begin{cases} o_s(K/k) = +\infty & \text{si } s \leq t = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)\,, \\ o_s(K/k) = o_{s-t}(K/k_1) & \text{si } s > t\,. \end{cases}$$

Proposition 6.3. *Soit K/k une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. Si (K_n/k) est une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-extensions de K/k, avec $\bigcup K_n = K$, alors* $\lim_{n\to\infty} o_s(K_n/k) = o_s(K/k)$.

Lemme 3.3. *Soit K/k une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini alors*

$$o_s(K/k) = \inf\Big\{m \in \mathbb{N} \mid \mathrm{di}\,(K^{p^m}(k)/k) < s\Big\}\,.$$

Preuve. Soit k_1/k la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k, et soit $t = \mathrm{di}\,(k_1/k) = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$ alors on a

$$\mathrm{di}\,(K^{p^m}(k)/k) = t + \mathrm{di}\,(K^{p^m}(k_1)/k_1)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{di}\,(K^{p^m}(k)/k) < s &\iff \mathrm{di}\,(K^{p^m}(k_1)/k_1) < s-t \\ &\iff m \geq o_{s-t}(K/k_1) \\ &\iff m \geq o_s(K/k)\,. \end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition. Soit $m = o_s(K/k)$; $\mathrm{di}\,(K_n^{p^m}(k)/k)$ stationne sur $\mathrm{di}\,(K^{p^m}(k)/k)(< s)$; donc pour $n \geq n_0$, on a $o_s(K_n/k) \leq m$. Soit $m' = \sup(o_s(K_n/k))$; pour n assez grand, $\mathrm{di}\,(K_n^{p^{m'}}(k)/k) < s$; donc $\mathrm{di}\,(K^{p^{m'}}(k)/k) < s$, d'où $m \leq m'$. □

Les deux propositions suivantes s'appuient sur le lemme ci-dessus exactement comme les propositions 1.3 et 3.3.

Proposition 7.3. *Soit K et L des corps intermédiaires d'une extension Ω/k avec K/k purement inséparable et di(k) fini. Alors pour tout entier j, on a $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$.*

Proposition 8.3. *Soit K/k une extension purement inséparable avec* $\mathrm{di}\,(k)$ *fini. Pour toute sous-extension L/L' de K/k et pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a: $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$.*

4. Extensions modulaires

On rappelle que K/k est modulaire si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, K^{p^n} et k sont $K^{p^n} \cap k$-linéairement disjointes. Soient m_j le j-ième exposant de K/k, et $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k. D'aprés la proposition 5.3, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe des C_ξ uniques ($\xi \in \Lambda_j$) tels que ${\alpha_j}^{p^{m_j}} = \sum_\xi C_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi}$. Ces relations s'appellent les équations de définition de K/k car elles engendrent l'idéal maximal de toutes les relations entre les α_i, $1 \leq i \leq n$, lequel détermine K/k.

Proposition 1.4. *Si K/k est une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité n et d'exposant m_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) *K/k est modulaire.*
2) *Pour toute r-base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ canoniquement ordonnée de K/k, les $C_\xi \in k \cap K^{p^{m_j}}$ pour $1 \leq j \leq n$.*
3) *Il existe une r-base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ canoniquement ordonnée de K/k telle que les $C_\xi \in k \cap K^{p^{m_j}}$ pour $1 \leq j \leq n$.*

Preuve. La condition 3 résulte de la condition 2; donc il suffit de montrer que $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$.
1-ère étape: $1 \Rightarrow 2$. On a que K/k est modulaire si et seulement si pour tout $h \in \mathbf{N}$, k et K^{p^h} sont $k \cap K^{p^h}$-linéairement disjoints. Donc pour tout j, $(1 \leq j \leq n)$, k et $K^{p^{m_j}}$ sont $k \cap K^{p^{m_j}}$-linéairement disjoints. Comme $\{(\alpha_1, \dots \alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi} \mid \xi \in \Lambda_j\}$ est une base de $k(K^{p^{m_j}})/k$, c'est une base de $k/k \cap K^{p^{m_j}}$, d'où par identification les $C_\xi \in k \cap K^{p^{m_j}}$. Inversement, si les $C_\xi \in k \cap K^{p^{m_j}}$, on déduit de [10] que K/k est modulaire. □

Remarque. Ce critère de modularité permet de trouver facilement des extensions non modulaires.

Exemple. Soit P un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $k = P(X, Y, Z)$, $K = k(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 = X^{p^{-2}}$, $\theta_2 = X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}}$. Il est immédiat que $o_1(K/k) = 2$, $o_2(K/k) = 1$, $\theta_2^p = Y\theta_1^p + Z$. Si K/k était modulaire, $Y^{p^{-1}}$ et $Z^{p^{-1}} \in K$; donc $K' = k(X^{p^{-2}}, Y^{p^{-1}}, Z^{p^{-1}}) \subset K$ et $\mathrm{di}\,(K'/k) = 3 > \mathrm{di}\,(K/k)$.

Proposition 2.4. *Si K/k est une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité n et d'exposant m_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
1. *K/k est modulaire.*
2. *Pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{di}\,(K^{p^{m_h}}/k \cap K^{p^{m_h}}) < h$.*

Preuve. Si K/k est modulaire, alors il existe une r-base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ canoniquement ordonnée de K/k telle que $K \simeq k(\alpha_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(\alpha_n)$. Donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $h \in \{j, \dots, n\}$, ${\alpha_h}^{p^{m_h}} \in k$. On en déduit que ${\alpha_h}^{p^{m_j}} \in k$ $(m_j \geq m_h)$. D'où $K^{p^{m_j}} = (k \cap K^{p^{m_j}})({\alpha_1}^{p^{m_j}}, \dots, {\alpha_{j-1}}^{p^{m_j}})$; par suite, $\mathrm{di}\,(K^{p^{m_j}}/k \cap K^{p^{m_j}}) < j$, $(j \in \{1, \dots, n\})$. Inversement: Etant donnée $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k, D'après [10], pour montrer que K/k est modulaire, il suffit de montrer que pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$, ${\alpha'_h}^{p^{m_h}} \in (k \cap K^{p^{m_h}})({\alpha'_1}^{p^{m_h}}, \dots, {\alpha'_{h-1}}^{p^{m_h}})$. Fixons $h \in \{1, \dots, n\}$; soit s le premier entier tel que $o_s(K/k) = o_h(K/k)$. Si $s = 1$, alors ${\alpha'_h}^{p^{m_h}} \in k \cap K^{p^{m_h}}$. Par conséquent, ${\alpha'_h}^{p^{m_h}} \in (k \cap K^{p^{m_h}})({\alpha'_1}^{p^{m_h}}, \dots, {\alpha'_{h-1}}^{p^{m_h}})$. Si $s > 1$, alors $\{{\alpha'_1}^{p^{m_s}}, \dots, {\alpha'_{s-1}}^{p^{m_s}}\}$ est une r-base de $k(K^{p^{m_s}})/k$. Par la proposition 1.2, c'est aussi une r-base de $k(K^{p^{m_s}})/k(K^{p^{m_s+1}})$. On en déduit qu'elle est r-libre sur $(k \cap K^{p^{m_s}})(K^{p^{m_s+1}})$. Mais comme $\mathrm{di}\,(K^{p^{m_s}}/k \cap K^{p^{m_s}}) < s$, par la proposition 1.2, $\mathrm{di}\,(K^{p^{m_s}}/(k \cap K^{p^{m_s}})(K^{p^{m_s+1}})) < s$. Donc $K^{p^{m_s}} = K^{p^{m_h}} = ((k \cap K^{p^{m_s}})(K^{p^{m_s+1}}))({\alpha'_1}^{p^{m_s}}, \dots, {\alpha'_{s-1}}^{p^{m_s}}) = (k \cap K^{p^{m_s}})({\alpha'_1}^{p^{m_s}}, \dots, {\alpha'_{s-1}}^{p^{m_s}})$. D'où ${\alpha'_h}^{p^{m_h}} \in (k \cap K^{p^{m_h}})({\alpha'_1}^{p^{m_h}}, \dots, {\alpha'_{h-1}}^{p^{m_h}})$. □

Définition 1.4. Un corps intermédiaire L de K/k est dit e-corps intermédiaire de K/k si $o_j(L/k) = o_j(K/k)$ pour $1 \leq j \leq \mathrm{di}\,(L/k)$.

Proposition 3.4. *Si K/k est une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité n et d'exposant m_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
1. *K/k est modulaire.*
2. *Tout e-corps intermédiaire de K/k admet un supplémentaire.*
3. *Pour tout j, $1 \leq j \leq n$, il existe un e-corps intermédiaire L de K/k avec $\mathrm{di}\,(L/k) = j$ tel que L admet un supplémentaire.*

Preuve. Montrons 1) ⇒ 2). Soit L un e-corps intermédiaire de K/k, et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})$ une r-base canoniquement ordonnée de L/k. On la complète à une r-base canoniquement ordonnée $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de K/k (prop. 4.3). Ecrivons la relation de définition

$$ {\alpha_j}^{p^{m_j}} = \sum_{\xi} C_\xi(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi} . $$

Il existe ξ tel que $o(C_\xi^{p^{-m_j}}/k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}) = m_j$ car sinon $o(\alpha_j/k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}) < m_j$. Soit $L' = k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},C_\xi^{p^{-m_j}})$; c'est un e-corps intermédiaire de K/k et par récurrence, il admet un supplémentaire $\widetilde{L}$. On a alors

$$K = (L \otimes_k k(C_\xi^{p^{-m_j}})) \otimes_k \widetilde{L} = L \otimes_k (k(C_\xi^{p^{-m_j}})) \otimes_k \widetilde{L}) \,.$$

Donc L admet un supplémentaire.

Inversement: Pour tout j, $(1 \leq j \leq n)$, il existe une sous-extension L/k de K/k de degré d'irrationalité j, telle que $o_i(L/k) = o_i(K/k)$, $(1 \leq i \leq j)$ et L/k admet un supplémentaire. Ou encore pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, il existe une r-base $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ canoniquement ordonnée de K/k telle que $K \simeq k(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1}) \otimes_k k(\alpha_j,\dots,\alpha_n)$; d'ou pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout $h \in \{j,\dots,n\}$, ${\alpha_h}^{p^{m_j}} \in k \quad (m_j = o_1(k(\alpha_j,\dots,\alpha_n)/k))$. On en déduit $K^{p^{m_j}} = (k \cap K^{p^{m_j}})({\alpha_1}^{p^{m_j}},\dots,\alpha_{j-1}^{p^{m_j}})$. Donc di$\,(K^{p^{m_j}}/k \cap K^{p^{m_j}}) < j$. Par la proposition précédente, K/k est modulaire. $\square$

Les résultats 4.4, 5.4 et 6.4 suivants interviennent souvent (cf. [8] pour 6.4)

Proposition 4.4. *Soient K_1 et K_2 des corps intermédiaires d'une extension K/k. Supposons K_1 et K_2 k-linéairement disjoints. Soient L_1 et L_2 des sous corps respectifs de K_1 et K_2. Alors L_2K_1 et L_1K_2 sont kL_1L_2-linéairement disjoints. En particulier, $(L_2K_1) \cap (L_1K_2) = kL_1L_2$.*

Preuve. Cela résulte de la transitivité bien connue de la linéarité disjointe. $\square$

Remarque 1.4. Ce résultat s'étend à m corps $K_1, K_2,\dots,K_m$ k-linéairement disjoints. Soient L_i sous corps de K_i, $L = \prod L_i$. Alors $LK_1, LK_2,\dots,LK_m$ sont Lk-linéairement disjoints.

Comme application on a:

Proposition 5.4. *Soit K/k une extension modulaire, soit $(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$ une r--base modulaire de K/k; soient $n_1,n_2,\dots,n_m$ des entiers et $L = k(\theta_1^{n_1},\theta_2^{n_2},\dots,\theta_m^{n_m})$. Alors K/L est modulaire et $(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)\setminus L$ est une r-base modulaire de K/L.*

Preuve. On pose $K_i = k(\theta_i)$ et $L_i = K(\theta_i^{n_i})$. $\square$

Proposition 6.4. *Soit K/k une extension purement inséparable et modulaire; soit pour tout entier n, $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$ et $K_n = K^{p^n}k$. Alors k_n/k, K_n/k, K/k_n et K/K_n sont modulaires.*

Preuve. Comme K/k et $k^{p^{-n}}/k$ sont modulaires, $k^{p^{-n}} \cap K/k$ l'est aussi. Comme $K^{p^{n+m}}$ et linéairement disjoint avec K^{p^n} et avec k, il est linéairement disjoint avec $K^{p^n} \cap k$. Donc $K^{p^n}/K^{p^n} \cap k$ est modulaire, et K/k_n aussi. Comme K^{p^n} est $K^{p^n} \cap k$-linéairement disjoint avec k et comme $K^{p^n}/K^{p^n} \cap k$ est modulaire, K_n/k l'est aussi (cf. fig. 1). La modularité de K/K_n résulte de la transitivité bien connue de la linéarité disjointe (cf. fig. 2). $\square$

$$\begin{tikzcd}
& K^{p^n} \arrow[r] & kK^{p^n} \\
K^{p^n}\cap k \arrow[ur] \arrow[r] & k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

fig. 1

$$\begin{tikzcd}
& & K^{p^m} & \\
& K^{p^n}(k\cap K^{p^m}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & kK^{p^n} \\
K^{p^m}\cap k \arrow[ur] \arrow[rr] & & k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

fig. 2

Proposition 7.4. *Soit L/k une sous-extension d'une extension modulaire finie K/k, avec $\mathrm{di}\,(L/k) = \mathrm{di}\,(K/k)$. Soit s le plus grand entier tel que $o_s(L/k) = o_n(L/k)$ avec $n = \mathrm{di}\,(L/k)$. Alors il existe une r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de L/k tel que $L = k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \otimes_k k(\alpha_s) \otimes_k \dots \otimes_k k(\alpha_n)$.*

Lemme 1.4. *Soit K/k une extension modulaire finie; soit $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ une r--base canoniquement ordonnée et modulaire de K/k, soit $n_i = o_i(K/k)$, soit s un entier positif. Alors*

$$k^{p^{-s}} \cap K = k(\theta_1^{p^{n_1-s}}, \theta_2^{p^{n_2-s}}, \dots, \theta_i^{p^{n_i-s}}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_m)$$

où l'entier i est tel que $n_i \geq s \geq n_{i+1}$. Sa liste d'exposants est $(s, s, \dots, s, n_{i+1}, \dots, n_m)$.

Preuve. En posant $L = k(\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots, \theta_m)$, on se ramène à $s \leq n_m$ (cf. proposition 5.4). On a

$$k_1 = k(\theta_1^{p^{n_1-s}}, \theta_2^{p^{n_2-s}}, \dots, \theta_i^{p^{n_i-s}}) \subset k^{p^{-s}} \cap K$$

et pour $j = 1, 2, \dots, m$, on a

$$o_j(k_1/k) = s \leq o_j(k^{p^{-s}} \cap K/k) \leq s\,.$$

Donc $o_j(k^{p^{-s}} \cap K/k) = s$ et $k_1 = k^{p^{-s}} \cap K$ □

Remarque 2.4. Le lemme ci-dessus, la proposition 5.3 et la proposition 5.4 montrent que si K/k est une extension modulaire finie, si $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ est une r-base canoniquement ordonnée et modulaire de K/k; les corps $L = k(\theta_1^{n_1}, \theta_2^{n_2}, \dots, \theta_m^{n_m})$ contiennent les corps $k^{p^{-n}} \cap K$ et $K^{p^n}k$ et sont tels que $L \subset L'$, alors L'/L est modulaire.

Preuve de la proposition. Notons que $o_j(K/k) = e_j$ et $o_j(L/k) = e'_j$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une r-base canoniquement ordonnée de L/k; soit $H = L(k^{p^{-e'_n}} \cap K)$. Par l'algorithme de complétition des r-bases, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est aussi une r-base de H/k donc $H = L$ (autrement dit, $k^{p^{-e'_n}} \cap K \subset L$). Posons $H_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})(k^{p^{-e'_n}} \cap K)$. On a $H_2 \subset L$ et pour $1 \leq j \leq s-1$,

$$o_j(k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})/k) = o_j(L/k) \leq o_j(H_2/k) \leq o_j(L/k)$$

alors que pour $s \leq j \leq n$,

$$o_j(k^{p^{-e'_n}} \cap K/k) = o_j(L/k) \leq o_j(H_2/k) \leq o_j(L/k)\,.$$

Donc $H_2 = L$. D'où il existe $b_s, \ldots, b_n \in k^{p^{-e'_n}} \cap K/k$ tels que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, b_s, \ldots, b_n)$ soit une r-base canoniquement ordonnée de L/k. Or

$$e'_j = o_j(b_j/k(\alpha_1, \ldots, b_{j-1})) \leq o_j(b_j/k) \leq e'_j\,.$$

Donc $L = k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}) \otimes_k k(b_s) \otimes_k \cdots \otimes_k k(b_n)$. □

Corollaire 1.4. *Soit K/k une extension purement inséparable et modulaire avec $\mathrm{di}\,(K/k) \leq 2$. Alors toute sous-extension L/k est modulaire.*

Preuve. On se ramène à L/k finie; donc il existe s tel que $L \subset k^{p^{-s}} \cap K$. □

Proposition 8.4. *Soit K/k une extension purement inséparable finie (respectivement, et modulaire), et soit L/k une sous-extension de K/k (respectivement, et modulaire) avec $\mathrm{di}\,(L/k) = s$. Si $K^p \subset L$ alors il existe une r-base canoniquement ordonnée (respectivement, et modulaire) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de K/k, et $e_1, e_2, \ldots, e_s \in \{1, p\}$ tels que $(\alpha_1^{e_1}, \alpha_2^{e_2}, \ldots, \alpha_s^{e_s})$ soit une r-base canoniquement ordonnée (respectivement, et modulaire) de L/k. De plus, pour $1 \leq j \leq s$, on a $o_j(K/k) = o_j(L/k)$, auquel cas $e_j = 1$, ou $o_j(K/k) = o_j(L/k) + 1$, auquel cas $e_j = p$.*

Preuve. On a $K^p \subset L$; donc $K^{p^j} \subset L^{p^{j-1}}$; d'où $d_i(k \vee K^{p^j}/k) \leq d_i(k \vee L^{p^{j-1}}/k)$, avec $j = o_r(L/k) + 1$; cela donne $o_r(K/k) - 1 \leq o_r(L/k) \leq o_r(K/k)$.

Supposons construit une r-base canoniquement ordonnée (respectivement, et modulaire) qui vérifie les propriétés de la proposition ci-dessus jusqu'à l'entier $j < s$.

1[er] cas: $o_{j+1}(L/k) = o_{j+1}(K/k)$; dans ce cas par l'algorithme de complétition des r-bases (respectivement, la proposition 3.4), on peut trouver $\alpha_{j+1} \in L$ tel que

$$o(\alpha_{j+1}/k(\alpha_1^{e_1}, \alpha_2^{e_2}, \ldots, \alpha_j^{e_j})) = o_{j+1}(L/k)$$
$$\text{(respectivement, et } = o(\alpha_{j+1}/k))$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} o(\alpha_{j+1}/k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j)) &= o(\alpha_{j+1}/k(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots, \alpha_j^p)) \\ &= o(\alpha_{j+1}/k(\alpha_1^{e_1}, \alpha_2^{e_2}, \ldots, \alpha_j^{e_j})) \\ &= o_{j+1}(K/k) \\ &\text{(respectivement, et } = o(\alpha_{j+1}/k))\,; \end{aligned}$$

on obtient donc une r-base $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j+1}, \ldots)$ de K/k qui vérifie les propriétés de la proposition ci-dessus jusqu'à l'eniter $j + 1 \leq s$.

$2^{\text{ième}}$ cas: $o_{j+1}(L/k) = o_{j+1}(K/k) - 1$; dans ce cas, par l'algorithme de complétition des r-bases (respectivement, la proposition 3.4), on peut compléter $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)$ à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1})$ de façon à ce que

$$o(\alpha_{j+1}/k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)) = o_{j+1}(K/k)$$
$$\text{(respectivement, et } = o(\alpha_{j+1}/k))\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} o(\alpha_{j+1}^p/k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)) &= o(\alpha_{j+1}^p/k(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_j^p)) \\ &= o(\alpha_{j+1}^p/k(\alpha_1^{e_1}, \alpha_2^{e_2}, \dots, \alpha_j^{e_j})) \\ &= o_{j+1}(L/k) \\ &\text{(respectivement, et } = o(\alpha_{j+1}/k))\,. \end{aligned}$$

On obtient donc une r-base $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j+1}, \dots)$ de K/k qui vérifie les propriétés de la proposition ci-dessus jusqu'à l'eniter $j + 1 \leq s$. □

Soit K/k une extension modulaire; la proposition 5.4 indique que les corps intérmédiaires de K/k de la forme $k^{p^{-n}} \cap K$ ou kK^{p^n} sont tels que si un L est contenu dans un autre L', alors L'/L est modulaire. Si K/k est équiexponentielle ou relativement parfaite, ce réseau de corps intermédiaires présente plus de régularité comme le montre la proposition suivante.

Proposition 9.4. *Soit K/k une extension purement inséparable, relativement parfaite et modulaire (respectivement finie équiexponentielle). Pour tout entier n, posons $k_n = k^{p^{-n}} \cap K$; soit $t = \mathrm{di}\,(K/k)$; soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec $n \leq m$ respectivement $n \leq o(K/k)$), alors on a:*

- $\mathrm{di}\,(k_m/k_n) = t$; *donc* $[k_n, k] = p^{nt}$;
- k_m/k_n *est équiexponontielle d'exposant* $m - n$;
- $k_n^{p^{-(m-n)}} \cap K = k_m$ *et* $kk_m^{p^{m-n}} = k_n$.

Remarque 3.4. Toute extension équiexponentielle K/k est une sous-extension d'une extension K'/k relativement parfaite et modulaire. En effet si $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ est une r-base canoniquement ordonnée de K/k, $K_n = k(a_1^{p^{-n}}, a_2^{p^{-n}}, \dots, a_n^{p^{-n}})$ et $K' = \bigcup K_n$, alors il est facile de vérifier que K'/k est relativement parfaite (car $K_n \subset kK_{n+1}^p$) et modulaire (car réunion croissante d'extensions modulaires).

Preuve de la proposition. Soit $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t)$ une r-base canoniquement ordonnée et modulaire de k_n/k; soit $e_i = o(\theta_i/k)$. On a $k(\theta_1^{e_1 - 1}, \theta_2^{e_2 - 1}, \dots, \theta_t^{e_t - 1}) \subset k_1 \subset k_n$; par suite, $\mathrm{di}\,(k_n/k) = \mathrm{di}\,(k_1/k)$; donc $\mathrm{di}\,(k_1/k) = \sup \mathrm{di}\,(k_n/k) = \mathrm{di}\,(K/k) = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$ (cf. définition 2.2 et interprétation du lemme 1.2). Comme K/k_1 est aussi modulaire et $\mathrm{di}\,(K/k_1) = \mathrm{di}\,(K/k)$, on a $\mathrm{di}\,(k_2/k_1) = \mathrm{di}\,(k_1/k) = t$. Par suite, $\mathrm{di}\,(k_m/k_n) = t$; donc $[k_m, k_n] = p^{(m-n)t}$; donc k_m/k_n est équiexponentielle d'exposant $m - n$. Comme $kk_m^{p^{m-n}} \subset k_n$, les deux extensions étants équiexponentielles, ayant même exposant (cf. proposition 5.3) et même degré, elles sont égales. □

Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. Dans la suite, on note $U_s^j(K/k) = j - o_s(k^{p^{-j}} \cap K)$. Soit $k_j = k^{p^{-j}} \cap K$. Comme $k_{j+1}^p \subset k_j$, par la proposition 8.4, on a $o_s(k_j/k) \le o_s(k_{j+1}) \le o_s(k_j/k) + 1$. Il en résulte que pour tout entier s, la suite $(U_s^j)_{j\ge 1}$ est croissante. De plus, si $K_1 \subset K_2$, on a $U_s^j(K_2/k) \subset U_s^j(K_1/k)$.

Proposition 10.4. *Il est équivalent de dire:*

1. *K est modulaire sur une extension finie de k.*
2. *Pour tout $s \in [1,t]$ avec $t = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$, la suite $(U_s^j)_{j\ge 1}$ est bornée.*

Preuve. Supposons (1). Si K/k est modulaire, d'après la preuve du lemme 2.3, il existe j_0 tel que K/k_{j_0} est relativement parfaite (et modulaire). Par la proposition 9.4, pour $j \ge j_0$ on a que k_j/k_{j_0} est équiexponentielle d'exposant $j - j_0$ et $di(k_j/k_{j_0}) = t$. Donc pour tout $s \in [1,t]$, on a $U_s^j = U_s^{j+1}$.

Si K est modulaire sur une extension finie L de k, comme L/k est finie, il existe n tel que $L \subset k_n$. Par suite, $L^{p^{-j}} \cap K \subset k_{n+j}$. Donc $o_s(L^{p^{-j}} \cap K/L) \le o_s(k_{n+j}/k)$; donc $U_s^{n+j}(K/k) \le n + U_s^j(K/L)$; donc $U_s^{n+j}(K/k)$ est stationnaire pour j assez grand.

Supposons (2). Donc pour $j \ge j_0$, on aura que pour tout $s \in [1,t]$, $o_s(k_{j+1}) = o_s(k_j/k) + 1$ (et $\mathrm{di}\,(k_j/k_{j_0}) = t$). Par suite, k_j/k_{j_0} est équiexponentielle, donc modulaire; par suite, $K = \bigcup k_j$ est modulaire sur k_{j_0}. □

Théorème 1.4. *Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. Alors la plus petite sous-extension M/k de K/k telle que K/M est modulaire n'est pas triviale ($M \ne K$); plus précisement, si K/k est infinie, alors K/M est infinie.*

Une étude détaillée autour de ce théorème se trouve dans [3].

Preuve. Récurrence sur $t = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$. Si $t = 0$, alors K/k est finie. Comme par la proposition 1.2, $K \ne K^p(k)$, sauf si $K = k$, et comme $K/K^p(k)$ est modulaire (car équiexponentielle), on a $M \subset K^p(k)$, donc $M \ne k$. Si $t > 0$, et si les suites $(U_s^j)_{j\ge 1}$ ($s \in [1,t]$) sont bornées, alors par la proposition 9.4, M/k est finie, donc K/M est infinie. Sinon, on a $U_1^j(K/k) = 0$. Soit i le premier entier tel que $(U_i^j(K/k))_{j\in\mathbf{N}}$ soit non borné; donc pour $j \ge j_0$, on a $e_s^{j+1} = e_s^j + 1$ pour tout $s \in [1, i-1]$. Comme $k_{j+1}^p \subset k_j$, par la proposition 8.4, il existe une r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$ de k_{j+1}/k telle que $(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \dots, \alpha_{i-1}^p, \dots, \alpha_t^{e_t})$ soit une r-base canoniquement ordonnée de k_j/k. Soit $K_j = kk_j^{e_i^j}$. Donc

$$K_j = k(\alpha_1^{p^{1+e_i^j}}, \alpha_2^{p^{1+e_i^j}}, \dots, \alpha_{i-1}^{p^{1+e_i^j}})\,;$$
$$K_{j+1} = k(\alpha_1^{p^{e_i^{j+1}}}, \alpha_2^{p^{e_i^{j+1}}}, \dots, \alpha_{i-1}^{p^{e_i^{j+1}}})\,.$$

On a $K_j \subset K_{j+1}$. Par définition de i, on a $1 + e_i^j > e_i^{j+1}$ c'est-à-dire $e_i^j = e_i^{j+1}$ pour une infinité de valeurs de j. Pour ces valeurs, on a $\mathrm{di}\,(K_{j+1}/k) = i - 1$, car sinon on aura $e_i^{j+1} = e_{i-1}^{j+1} = 1 + e_{i-1}^j = e_i^j$, i.e. $e_i^j > e_{i-1}^j$, ce qui est absurde. Comme $(\mathrm{di}\,(K_j/k))$ est une suite croissante d'entiers bornée (par $\mathrm{di}\,(K/k)$), il en résulte qu'elle stationne sur $i-1$. De plus, $K_j \neq K_{j+1}$, car sinon $K_j = K_{j+1} = K^p_{j+1}(k)$, par suite $K_{j+1} = k$ (cf. proposition 1.2), ce qui est absurde car $i-1 \geq 1$. Posons $H = \bigcup K_j$; donc H/k est infinie et $\mathrm{di}\,(H/k) = i-1$; de plus, H/k est relativement parfaite car $K^p_{j+1}(k) = K_j$ pour une infinité de j; donc $\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(H) = i-1 (>0)$; donc $0 < \mathrm{di}\,(H) - \mathrm{di}\,(K) = t-(i-1) < \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$. Par l'hypothèse de récurrence, K est modulaire sur une extension M' de H avec K/M' infinie; comme $M \subset M'$, alors K/M est infinie. $\square$

Dans ce qui suit, on donne un exemple d'extension K/k vérifiant que pour toute sous-extension propre M/k de K/k, K/M est non modulaire.

Soit A_i une suite de parties de $\mathbf{N}$ vérifiant

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset\,, \\ |A_i| = i\,. \end{cases}$$

Exemple.

$$A_1 = \{0\}\ , A_2 = \{1,2\}\,, A_3 = \{3,4,5\}\,, \ldots, A_n = \left\{\frac{n(n-1)}{2}, \ldots \frac{n(n+1)}{2} - 1\right\}.$$

On note $A_n = \{i^n_1, i^n_2, \ldots, i^n_n\}$. Soit P un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$; soit $(Z_n)_{n \in \bigcup A_i}$ un système algébriquement libre sur P, $k = P(Z_n)_{n \in \bigcup A_i}$ et $K = k(t_i^{p^{-\infty}})$ avec

$$\begin{cases} t_1 = Z_{i^1_1}\,, \\ t_2 = Z_{i^2_2} + Z_{i^2_1} t_1^{p^{-1}}\,, \\ t_3 = Z_{i^3_3} + Z_{i^3_2} t_2^{p^{-1}} + Z_{i^3_1} t_1^{p^{-(1+2)}}\,, \\ \vdots \\ t_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} Z_{i^n_{n-j}} t_{n-j}^{p^{-S_j}} \qquad\qquad (S_j = 1+2+\cdots+j)\,. \end{cases}$$

Soit L/k une sous-extension de K/k telle que K/L est modulaire. On montre que $t_i^{p^{-\infty}} \in L$ pour tout i; par suite $L = K$. Supposons que $t_1^{p^{-n+1}} \notin L$, on a

$$\begin{cases} t_{n+1} = r_n + Z_{i_1^{n+1}} t_1^{p^{-S_n}}\,, \\ r_n = Z_{i^{n+1}_{n+1}} + Z_{i^{n+1}_n} t_n^{p^{-1}} + \cdots + Z_{i^{n+1}_2} t_2^{p^{-S_{n-1}}}\,. \end{cases}$$

Posons $e_n = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$; on a

$$t_{n+1}^{p^{e_n}} = r_n^{p^{e_n}} + Z^{p^{e_n}}_{i^{n+1}_1} t_1^{p^{-n+1}}\,.$$

Par le choix de e_n, $r_n^{p^{e_n}} \in k$. De plus K/L est modulaire; donc $K^{p^{e_n+1}}$ et L sont $K^{p^{e_n+1}} \cap L$-linéairement disjoints. Comme $(K^{p^{e_n+1}} \cap L)(t_1^{p^{-n+1}}) \subset K^{p^{e_n+1}}$, $L(K^{p^{e_n+1}} \cap L)(t_1^{p^{-n+1}}) = L(t_1^{p^{-n+1}})$ et $K^{p^{e_n+1}}$ sont $(K^{p^{e_n+1}} \cap L)(t_1^{p^{-n+1}})$--linéairement disjoints (cf. proposition 4.4). En particulier, $L(t_1^{p^{-n+1}}) \cap K^{p^{e_n+1}} =$

$(K^{p^{en+1}} \cap L)(t_1^{p^{-n+1}})$. Comme $t_{n+1}^{p^{en}} \in L(t_1^{p^{-n+1}}) \cap K^{p^{en+1}}$, $t_{n+1}^{p^{en}} \in (K^{p^{en+1}} \cap L)(t_1^{p^{-n+1}})$ et comme $o(t_1^{p^{-n+1}}/L) = o(t_1^{p^{-n+1}}/(K^{p^{en+1}} \cap L))$, par identification $r_n^{p^{en}}, Z_{i_1^{n+1}}^{p^{en}} \in K^{p^{en+1}}$, i.e. $r_n^{p^{-1}}, Z_{i_1^{n+1}}^{p^{-1}} \in K$. Soit $G = \bigcup A_i \setminus \{i_{n+1}^{n+1}, i_1^{n+1}\}$, $k_1 = k(Z_i^{p^{-\infty}})_{i\in G}$ et $K_1 = k_1(T^{p^{-\infty}})$ avec $T = Z_{i_{n+1}^{n+1}} + Z_{i_1^{n+1}} t_1^{p^{-S_n}}$. On a $K \subset K_1$ car pour $i \neq n+1$, il est clair que $t_i^{p^{-\infty}} \in K_1$. Pour $i = n+1$, on a $t_{n+1} = T + r$ avec $r^{p^{-\infty}} \in K_1$. Donc $t_{n+1}^{p^{-\infty}} \in K_1$; par suite $Z_{i_1^{n+1}}^{p^{-1}} \in K_1$; donc $Z_{i_{n+1}^{n+1}}^{p^{-1}} \in K_1$, mais alors $\mathrm{di}\,(k_1(Z_{i_1^{n+1}}^{p^{-1}}, Z_{i_{n+1}^{n+1}}^{p^{-1}})/k_1) = 2 \leq \mathrm{di}\,(K_1/k_1) = 1$, ce qui est absurde, donc $t_1^{p^{-\infty}} \in L$. Posons $A_i' = A_i \setminus \{i_1^i\}$. Le même argument, modulo les constantes $Z_{i_1^m} t_1^{p^{-S_{(m-1)}}} \in L$, montre que $t_2^{p^{-\infty}} \in L$ et de même $t_i^{p^{-\infty}} \in L$ pour tout i. Par suite, $L = K$. □

5. 1ère généralisation d'extensions simples

Proposition 1.5. *Soit K/k une extension purement inséparable. Il est équivalent de dire:*

1. *L'ensemble des corps intermédiaires de K/k est totalement ordonné pour l'inclusion.*
2. *K est réunion croissante d'extensions simples.*
3. $\mathrm{di}\,(K/k) = 1$.
4. *Toute sous-extension propre de K/k est simple.*
5. *Toute sous-extension finie de K/k est simple.*

Preuve. Montrons (1) $\Longrightarrow$ (2). Soit (1) et $E = \{k(\theta) | \theta \in K\}$. Si E est fini, par (1), $K = \bigcup k(\theta) = k(\widehat{\theta})$ avec $k(\widehat{\theta})$ le plus grand élément de E. Si E est infini, on peut construire une suite strictement croissante $k(\theta_1) \subset k(\theta_2) \subset \ldots$. Soit $x \in K$; il existe i tel que $[k(\theta_i), k] > [k(x), k]$; on ne peut donc avoir $k(\theta_i) \subset k(x)$; donc $k(x) \subset k(\theta_i)$; donc $K = \bigcup k(\theta_i)$. Il est évident que (2) $\Longrightarrow$ (3). D'après le lemme 1.2, (3)$\Longrightarrow$ (4). En effet, supposons (3). Si K/k est fini, alors le résultat est bien connu, sinon comme $\mathrm{di}\,(K/k) = \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) + \mathrm{di}\,(K/K^p(k)) = 1$ et comme $\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) \geq 1$, on a $\mathrm{di}\,(K/K^p(k)) = 0$. Soit K/k relativement parfaite; soit L/k une sous-extension propre de K/k. Si L/k est infinie, soit L_r/k sa plus grande sous-extension relativement parfaite. On a par la proposition 6.2 $1 = \mathrm{di}\,(K/k) = \mathrm{di}\,(K/L_r) + \mathrm{di}\,(L_r/k) = 2$, ce qui est absurde. Donc L/k est fini. Comme $\mathrm{di}\,(L/k) \leq \mathrm{di}\,(K/k) = 1$, il en résulte que L/k est simple.

(4) $\Longrightarrow$ (5): immédiat.

Montrons (5) $\Longrightarrow$ (1). Soit (5), soient L_1, L_2 des corps intermédiaires de K/k. Si $L_1 \not\subset L_2$; soit $x \in L_1 \setminus L_2$; soit $y \in L_2$, on a $k(x,y)/k$ est fini, donc simple; donc $k(x) \subset k(y)$ ou $k(y) \subset k(x)$; or $k(x) \not\subset k(y) \subset L_2$; donc $k(y) \subset k(x)$; par suite, $L_2 \subset k(x) \subset L_1$. □

Définition 1.5. Une extension K/k purement inséparable est dite simple de deuxième espèce ou 2-simple si elle vérifie les propriétés équivalentes de la proposition ci-dessus.

Les extensions de L. Kime $k(x^{p^{-\infty}})/k$ (cf. [8]) sont 2-simples; cependant, dès que $\operatorname{di}(k) \geq 2$, il existe des extensions K/k 2-simples qui ne sont pas de cette forme.

Exemple. Reprenons le contre-exemple de la section 2; $k = P(X,Y)$ avec P parfait de caractéristique $p > 0$; (X,Y) algébriquement libre sur P, et $K = \bigcup k(T_i)$ avec $T_0 = Y$ et $T_i = T_{i+1}^{p^{i+1}} X$. Alors K/k est 2-simple car réunion croissante d'extensions simples; on a montré que $P = \bigcap K^{p^n}$; donc K n'est pas de la forme $k(x^{p^{-\infty}})$.

Si k est dénombrable avec $\operatorname{di}(k) \geq 2$, on peut par un argument de dénombrement, montrer l'existence d'extensions 2-simples qui ne sont pas de la forme $k(x^{p^{-\infty}})$. Pour cela, soit dans $k^{p^{-\infty}}$ une extension $k(\theta)/k$ simple de degré p^n. Montrons qu'il existe dans $k^{p^{-\infty}}$ une infinité non dénombrable d'extensions $L/k(\theta)$ de degré p simples sur k. Soit $x = \theta^{p^n}$ et $y \in k \setminus k^p(x)$; soit $\lambda \in k^*$; posons $L_\lambda = k(\theta^{p^{-1}} + \lambda y^{p^{-1}})$. Si $\lambda \neq \lambda'$, alors $L_\lambda \neq L_{\lambda'}$; sinon $(\lambda - \lambda')y^{p^{-1}} \in L_\lambda$ donc $\theta^{p^{-1}} \in L_\lambda$, donc $y^{p^{-1}} \in L_\lambda = k(\theta^{p-1})$, soit $y^{p^{-1}} \in k(\theta^{p^{n-1}})$, soit $y \in k^p(x)$, contradiction. Par suite, il existe dans $k^{p^{-\infty}}$ une infinité non dénombrable d'extensions 2-simples de k, alors que les extensions $k(x^{p^{-\infty}})/k$ sont au plus dénombrables.

La proposition qui suit donne un critère de modularité pour les extensions $F(\theta)/k$ avec F/k 2-simple.

Proposition 2.5. *Soit F/k une extension 2-simple, $\theta_2 \in k^{p^{-\infty}} \setminus F$ telle que $[F,k] \geq [k(\theta_2),k]$. Il est équivalent de dire:*

1. *$F(\theta_2)/k$ est modulaire.*
2. *$\forall \theta_1 \in F$, $k(\theta_1,\theta_2)$ modulaire.*
3. *$\exists \theta_1 \in F$, (θ_1,θ_2) canoniquement ordonnée et $k(\theta_1,\theta_2)$ modulaire.*
4. *$\exists \theta_2' \in F(\theta_2)$, tel que $F(\theta_2) = F \otimes_k k(\theta_2')$.*

Noter que (θ_1,θ_2) canoniquement ordonnée signifie que (θ_1,θ_2) r-libre et $o(\theta_1/k) \geq o(\theta_2/k)$.

Lemme 1.5. *Soit k un corps commutatif de caractéritique $p \neq 0$; soient $\theta_1,\theta_2 \in k^{p^{-\infty}}$ tels que $\theta_1 \notin k(\theta_2)$. Pour toute extension simple $k(\theta') \supset k(\theta_1)$, on a $o(\theta_2/k(\theta')) = o(\theta_2/k(\theta_1))$.*

Preuve du lemme. Soit $s = o(\theta_2/k(\theta_1))$; donc $k(\theta_2) \cap k(\theta_1) = k(\theta_2^{p^s}) \subset k(\theta')$. Par suite, $s \geq s' = o(\theta_2/k(\theta'))$. Si $\theta_2^{p^{s'}} \notin k(\theta_1)$, $(k(\theta_2^{p^{s'}})$ et $k(\theta_1)$ étant tous deux dans $k(\theta'))$, on aura $k(\theta_1) \subset k(\theta_2^{p^{s'}})$, donc $k(\theta_1) \subset k(\theta_2)$, ce qui est contraire aux hypothèses du lemme; par suite, $\theta_2^{p^{s'}} \in k(\theta_1)$; donc $s \leq s'$, donc $s = s'$. □

Preuve de la proposition. On a (1) $\Longrightarrow$ (2) car $\operatorname{di}(F(\theta_2)/k) \leq 2$ et on applique le corollaire 1.4.

(2) $\Longrightarrow$ (3) immédiatement par les hypothèses de la proposition 2.5.

Montrons (3) $\Longrightarrow$ (4); soit (3); par la proposition 4.3, comme $o(\theta_1/k) \geq o(\theta_2/k)$, on peut compléter θ_1 en une r-base modulaire (θ_1,θ_2') de $k(\theta_1,\theta_2)/k$. Soit $\theta' \in F$

tel que $k(\theta_1) \subset k(\theta')$; par le lemme $o(\theta'_2/k(\theta')) = o(\theta'_2/k(\theta_1)) = o(\theta'_2/k)$, soit $k(\theta', \theta'_2) = k(\theta') \otimes_k k(\theta'_2)$; donc $F(\theta'_2) = F \otimes_k k(\theta'_2)$ et il est immédiat que $F(\theta_2) = F(\theta'_2)$.

Montrons (4)$\Longrightarrow$ (1); soit (4). Alors $F(\theta_2)$ est réunion croissante d'extensions modulaires $k(\theta_i, \theta'_2)$, donc modulaire. □

Le théorème qui suit décrit en particulier toutes les extensions purement inséparables d'un corps de fractions $P(X,Y)$ avec P parfait.

Théorème 1.5. *Si* $\mathrm{di}\,(k) \leq 2$*, alors toute extension purement inséparable (et modulaire)* K/k *est produit tensoriel d extensions* 2*-simples.*

Preuve du théorème. On suppose bien sûr K/k infinie, le cas fini étant bien connu. Soit K_r/k la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k. On a $\mathrm{di}\,(K_r) < \mathrm{di}\,(k) \leq 2$. Si $\mathrm{di}\,(K_r) = 0$, alors K_r est parfait; donc

$$K = K_r = k(x^{p^{-\infty}}) \otimes_k k(y^{p^{-\infty}})\,,$$

où (x, y) est une p-base quelconque de k. Si $\mathrm{di}\,(K_r) = 1$, alors K_r/k et $k^{p^{-\infty}}/K_r$ sont 2-simples. Comme K/K_r est une sous-extension finie de $k^{p^{-\infty}}/K_r$, elle est simple; donc $K = K_r(\theta)$ avec $\theta \in K$; comme K/k est modulaire, car sous-extension de l'extension modulaire $k^{p^{-\infty}}/k$ et $di(k^{p^{-\infty}}/k) = 2$ (cf. corollaire 1.4), alors par la proposition ci-dessus, $K = K_r \otimes_k k(\theta')$. □

Même sous l'hypothèse $\mathrm{di}\,(k) < \infty$, il existe des extensions modulaires K/k qui ne sont pas produits tensoriels d'extensions 2-simples. Dans [5] J. K. Deveney a construit une extension purement inséparable K/k infinie et modulaire, ayant toutes ses sous-extensions propres L/k finies et telle que pour tout entier n, $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{2n}$; par suite cette extension n'est pas 2-simple car sinon $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^n$ et ne peut être produit tensoriel d'extensions 2-simples car sinon elle aurait des sous-extensions propres infinies.

6. $2^{\text{ème}}$ généralisation d'extensions simples

Définition 1.6. Soit K/k une extension purement inséparable avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini. On dit que K/k est simple de $3^{\text{ième}}$ éspèce (ou 3-simple) si elle est simple au sens ordinaire ou si K/k est modulaire relativement parfaite et telle que toute sous-extension propre de K/k est finie.

Dans [5] les extensions K/k vérifiant que toute sous-extension propre de K/k est finie sont appellées extensions "ω_0-generated".

Remarque 1.6. Les extensions simples au $2^{\text{ème}}$ sens sont simples au $3^{\text{ème}}$ sens. Le contre-exemple de J. K. Deveney (cf. §5) montre que l'inclusion est stricte.

Remarque 2.6. Le fait que toute sous-extension propre de K/k est finie équivaut à dire que le degré d'imperfection des corps intermédiaires de K/k saute de $\mathrm{di}\,(k)$ à $\mathrm{di}\,(K)$ sans prendre de valeurs intérmédiaires!

Théorème 1.6. *Toute extension purement inséparable K/k avec $di(k)$ fini est composée d'extensions* 3*-simples.*

Preuve. Le résultat est immédiat si K/k est finie, sinon considérons une suite d'extensions

$$K_0 = K \longrightarrow K_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_n = K$$

avec K_{i+1}/K_i infinie (exemple $K_0 = k \longrightarrow K_1 = K$). On a alors

$$\mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{di}\,(K_i) - \mathrm{di}\,(K_{i+1})\,.$$

Comme K_{i+1}/K_i est infinie, on a $\mathrm{di}\,(K_i) - \mathrm{di}\,(K_{i+1}) \geq 1$; donc $n \leq \mathrm{di}\,(k) - \mathrm{di}\,(K)$ et n est borné. Choisissons n maximum; il en résulte que chaque extension K_{i+1}/K_i est sans sous-extension propre infinie. On est ramené à démontrer le résultat pour K/k sans sous-extension propre infinie. Soit k_1/k la plus grande sous-extension relativement parfaite de K/k. On sait que k_1 est modulaire sur une extension finie L de k (théorème 1.4); alors K/k est composée d'une extension finie L/k, d'une extension 3-simple infinie k_1/L et d'une extension finie K/k_1 (lemme 2.3). □

Nous allons dans la suite de cette section, montrer que la taille d'une extension 3-simple peut être arbitrairement grande, étendant ainsi le contre-exemple de J. K. Deveney [5]. Ensuite nous montrons qu'il existe des extensions K/k modulaires, avec $\mathrm{di}\,(k)$ fini qui ne sont pas produits tensoriels d'extensions 3-simples.

Théorème 2.6. *Soit K/k une extension purement inséparable, relativement parfaite et modulaire; soit L/k une sous-extension finie de K/k ($L \neq k$). Si K/L est modulaire, alors pour tout entier $n > e = o(L/k)$, $k^{p^{-n}} \cap K/k(L^{p^{e-1}})$ est modulaire; en particulier $K/k(L^{p^{e-1}})$ est alors modulaire.*

Lemme 1.6. *Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, soit $i = \mathrm{di}\,(K/k)$ et soit s le plus grand entier tel que $o_1(L/k) = o_s(L/k)$. Alors pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mathrm{di}\,(k^{p^{-(n+e)}} \cap K/L) = i$ et $o_1(k^{p^{-(n+e)}} \cap K/L) = o_{i-s+1}(k^{p^{-(n+e)}} \cap K/L) = n$.*

Preuve. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j)$ une r-base canoniquement ordonnée de L/k. Notons $K_n = k^{p^{-(e+n)}} \cap K$. Par la proposition 9.4, $\mathrm{di}\,(K_n/k) = i$ pour tout entier n. On a

$$k \longrightarrow k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \longrightarrow L \longrightarrow K_0 \longrightarrow K_n\,.$$

Soit B une r-base canoniquement ordonnée de K_0/L. Donc $K_0 = k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, B)$. Comme $|B| \leq \mathrm{di}\,(K_0/k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)) = i - s$ (propositions 3.4 et 2.2), par l'algorithme de complétition des r-bases, on a $K_0 = k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, B)$. Donc B est une r-base de $K_0/k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$; donc $\mathrm{di}\,(K_0/L) = |B| = i - s$ (cf. proposition 2.2). On a $K_n^{p^{n-1}}(L) = K_n^{p^{n-1}}(kL) = K_1L = K_1$ (proposition 9.4) et $K_n^{p^n}(L) = K_0$; donc $\mathrm{di}\,(K_n^{p^{n-1}}(L)/L) = i$ et $\mathrm{di}\,(K_n^{p^n}(L)/L) = i - s$; donc par le lemme 1.3, pour tout $j \in [i - s + 1, i]$, on a $o_j(K_n/L) = n$. □

Preuve du théorème. Notons tojours $K_n = k^{p^{-(e+n)}} \cap K$. On a $K_n \subset L^{p^{-(e+n)}} \cap K$, $L^{p^{-(e+n)}} \cap K/L$ modulaire et $\mathrm{di}\,(L^{p^{-(e+n)}} \cap K/L) = \mathrm{di}\,(K_n/L) = i$ (car $\mathrm{di}\,(K_n/K_0) = i \leq \mathrm{di}\,(K_n/L) \leq \mathrm{di}\,(K_n/k) = i$). Par la proposition 7.4, il existe une r-base canoniquement ordonnée $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ de K_n/L telle que

$$K_n = L(a_1, a_2, \dots, a_{i-s}) \otimes_L L(a_{i-s+1}) \otimes_L \cdots \otimes_L L(a_i)|\,.$$

En particulier $a_j^{p^n} \in L$ pour tout entier $j \in [i-s+1, i]$. Soit $(b_1, b_2, \dots, b_j)$ une r-base de L/k; donc $K_n = k(b_1, b_2, \dots, b_j, a_1, a_2, \dots, a_i)$. Comme $o(b_\alpha/k) \leq e$ par l'algorithme de complétition des r-bases,

$$K_n = k(a_1, a_2, \dots, a_i) = k(a_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(a_i)$$

(car K_n/k est équiexponentielle). De plus, $o(a_j/k) = n + e$; donc $o(a_j^{p^n}/k) = e$ et comme $a_j^{p^n} \in L$ pour tout entier $j \in [i-s+1, i]$, on peut compléter $(a_{i-s+1}^{p^n}, \dots, a_i^{p^n})$ en une r-base canoniquement ordonnée de L/k. Par suite, $k(L^{p^{e-1}}) = k(a_{i-s+1}^{p^{n+e-1}}, \dots, a_i^{p^{n+e-1}}))$. Donc $K_n/k(L^{p^{e-1}})$ est modulaire (cf. proposition 5.4). $\square$

Le théorème ci-dessus donne donc un résultat de modularité. Par opposition, on un résultat de non modularité

Proposition 1.6. *Soit M/k une extension purement inséparable finie et équiexponentielle d'exposant > 1. Soit $n = \mathrm{di}\,(M/k)$ avec $n+1 \leq \mathrm{di}\,(k)$. Soit L une sous-extension propre de $k^{p^{-1}} \cap M$. Il existe une extension purement inséparable M' de M vérifiant:*

- *M'/L non modulaire;*
- *M'/k équiexponentielle d'exposant $o(M/k)+1$ avec $di(M'/k) = \mathrm{di}\,(M/k) = n$.*

Preuve.

- Soit M/L est non modulaire; soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ une r-base canoniquement ordonnée de M/k. On pose $M' = k(\alpha_1^{p^{-1}}, \alpha_2^{p^{-1}}, \dots, \alpha_n^{p^{-1}})$. Alors M'/L est non modulaire, sinon $M'^pL/ = M/L$ serait modulaire; par suite, M' convient.
- Soit M/L est modulaire; soit $e = o(M/k) \geq 2$. On a

  $$k \longrightarrow L \longrightarrow k^{p^{-1}} \cap M \longrightarrow k^{p^{-2}} \cap M \longrightarrow k^{p^{-e}} \cap M = M\,.$$

  Comme M/k est équiexponentielle, par la proposition 9.4 on a $kM^{p^{e-1}} = k^{p^{-1}} \cap M$ et $kM^{p^{e-2}} = k^{p^{-2}} \cap M$; donc $LM^{p^{e-1}} = k^{p^{-1}} \cap M$ et $LM^{p^{e-2}} = k^{p^{-2}} \cap M$. Soit $j = \mathrm{di}\,(LM^{p^{e-1}}/L) = \mathrm{di}\,(k^{p^{-1}} \cap M/L)$; on a $j \in]1, n[$ car $L \neq k, k^{p^{-1}} \cap M$. Soit $i \leq j$; on a

  $$\begin{cases} \mathrm{di}\,(LM^{p^{e-1}}/L) & = & j \geq i\,, \\ \mathrm{di}\,(LM^{p^e}/L) & = & 0 < i \end{cases}$$

Donc (par le lemme 1.3) $o_i(M/L) = e$. De même pour $i \leq j+1$,

$$\begin{cases} \mathrm{di}\,(LM^{p^{e-2}}/L) &= n \geq i\,, \\ \mathrm{di}\,(LM^{p^{e-1}}/L) &= j < i\,. \end{cases}$$

Donc $o_i(M/L) = e-1$.

Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une r-base canoniquement ordonnée et modulaire de M/L; par l'algorithme de complétition des r-bases c'est une r-base canoniquement ordonnée de M/k, donc modulaire (car M/k est équiexponentielle). On a $\mathrm{di}\,(k) \geq n+1$; donc $\exists t \in k$ tel que $(b_1^{p^e}, b_2^{p^e}, \ldots, b_n^{p^e}, t)$ p-indépendant sur k. Soit

$$M' = k(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}}, (b_1 t + b_n)^{p^{-1}})\,;$$

donc $M' = L(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}}, (b_1 t + b_n)^{p^{-1}})$. On a

$$o(b_1 t + b_n / L(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}})) = e-1\,,$$

car si $(b_1 t + b_n)^{p^m} \in L(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}})$, alors $b_n^{p^m} \in L(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}})$, donc $b_n^{p^m} \in L$ (cf. lemme 1.5) donc $m \geq e-1$. Par suite, $(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}}, (b_1 t + b_n)^{p^{-1}})$ est une r-base canoniquement ordonnée de M'/L. Si M'/L était modulaire, le critère de modularité (proposition 1.4) s'applique; on a $(b_1 t + b_n)^{p^{e-1}} = b_1^{p^{e-1}} t^{p^{e-1}} + b_n^{p^{e-1}}$; donc $t^{p^{e-1}}, b_n^{p^{e-1}} \in M'^{p^e}$, donc $t^{p^{-1}}, b_n^{p^{-1}} \in M'$; or $\mathrm{di}\,(k(b_1^{p^{-1}}, b_2^{p^{-1}}, \ldots, b_{n-1}^{p^{-1}}, b_n^{p^{-1}}, t^{p^{-1}})/k) = n+1 > \mathrm{di}\,(M'/k)$. □

Soit j un entier ≥ 1. Construisons maintenant une extension 3-simple K/k vérifiant que $\forall n \in \mathbf{N}$, $[k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{nj}$. Pour cela, soit k un corps commutatif dénombrable avec $\mathrm{di}\,(k) \geq j+1$; soit $(X_1, X_2, \ldots, X_j)$ un système p-libre sur k; on pose $M_2 = k(X_1^{p^{-1}}, X_2^{p^{-1}}, \ldots, X_j^{p^{-1}})$. Soit $E = \{$sous-extensions propres de $k^{p^{-1}} \cap M_2\}$. Comme k est dénombrable, E est dénombrable. Donc on peut écrire $E = \{L_n \mid n \geq 3\}$ Par la proposition 1.6, il existe une suite d'extensions croissantes (M_n/k) vérifiant:

- M_n/L_n non modulaire;
- M_n/k équiexponentielle d'exposant n.

Soit $K = \cup M_n$

Théorème 3.6. *K/k est 3-simple avec*

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \qquad [k^{p^{-n}} \cap K, k] = p^{nj}\,;$$

(autrement dit, $\mathrm{di}\,(K/k) = j$*).*

Ce théorème fait l'objet d'une étude séparée dans [2].

Pour la preuve on aura besoin en plus de:

Lemme 2.6. *Soit K/k une extension purement inséparable, relativement parfaite et modulaire. Soit S/k une sous-extension de K/k relativement parfaite, L/k une sous-extension de S/k. Si S/L est modulaire, alors K/L est modulaire, (en particulier K/S est modulaire).*

Preuve du théorème. Soit S/k une sous-extension propre de K/k; supposons S/k infinie. Par le théorème 1.6, il existe une sous-extension S'/L' de S/k 3-simple, (donc modulaire) avec L'/k fini et S'/k relativement parfaite. Soit $L = L'^{p^{-1}} \cap S'$; on sait que S'/L est modulaire (proposition 9.4) donc par le lemme ci-dessus, K/L est modulaire. Par le théorème 2.6, pour n assez grand, $k^{p^{-n}} \cap K/k(L^{p^{e-1}})$ ($e = o(L/k) \geq 1$) est modulaire, et on a $k(L^{p^{e-1}}) \subset k^{p^{-1}} \cap S'$ et $k(L^{p^{e-1}}) \neq k, k^{p^{-1}} \cap K$ (car $S' \subset K, S' \neq K \Longrightarrow \mathrm{di}\,(k^{p^{-1}} \cap S'/k) \leq \mathrm{di}\,(S'/k) < di(K/k) = \mathrm{di}\,(k^{p^{-1}} \cap K/k)$); donc $\exists n$ tel que $k(L^{p^{e-1}}) = L_n$. Or $k^{p^{-n}} \cap K = M_n$ car $M_n \subset k^{p^{-n}} \cap K$ et les deux extensions ont même degré. Donc M_m/L_n est modulaire pour un entier $m \geq n$, donc $L_n M_m^{p^{m-n}}/L_n$ modulaire. Soit par la proposition 9.4 M_n/L_n modulaire. Une contradiction. $\square$

Preuve du lemme. Comme k et K^{p^n} sont $k \cap K^{p^n}$-linéairement disjoints et $S^{p^n}(K^{p^n} \cap L) \subset K^{p^n}$, alors $kS^{p^n}(K^{p^n} \cap L) = S$ et K^{p^n} sont $S^{p^n}(K^{p^n} \cap L)$-
-linéairement disjoints (cf. proposition 4.4 et figure ci-dessous). Comme S^{p^n} et L sont linéairement disjoints et $K^{p^n} \cap L \subset L$, alors $S^{p^n}(K^{p^n} \cap L)$ et L sont $K^{p^n} \cap L$-
-linéairement disjoints. Par la transitivité de linéarité disjointe, K^{p^n} et L sont $K^{p^n} \cap L$-linéairement disjoints. $\square$

$$\begin{tikzcd}
 & & L \arrow[rr] & & S \arrow[rr] & & K & \\
 & K^{p^n} \cap L \arrow[ur] \arrow[rr] & & S^{p^n}(K^{p^n} \cap L) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K^{p^n} \arrow[ur] \arrow[rr] & & K \\
S^{p^n} \cap L \arrow[ur] \arrow[rr] & & S^{p^n} \arrow[ur] \arrow[rr] & & S^{p^n}(K^{p^n} \cap L) \arrow[ur] \arrow[rr] & & S \arrow[ur] & \\
 & & & k \cap K^{p^n} \arrow[ur] \arrow[rr] & & k \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Dans la suite de cette section, on construit une extension modulaire qui n'est pas produit tensoriel d'extensions 3-simples.

Soit k un corps commutatif dénombrable de caractéristique $p \neq 0$ avec $\mathrm{di}\,(k) \geq 3$; soit (X_1, X_2, t) un système de k p-libre sur k. Soit $F_1 = k(X_1^{p^{-\infty}})$. Soit n un entier ≥ 1; supposons construit $a_n \in k^{p^{-\infty}}$ vérifiant $o(a_n/k) = o(a_n/F_1) = n$ et $F_1(X_2^{p^{-1}}) \subset F_1(a_n)$. Soit L/k une sous-extension de $F_1(a_n)/k$ vérifiant $o_1(L/L \cap F_1) = 1$ (donc $L \not\subset F_1$).

Lemme 3.6. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $a_{n+1} \in k^{p^{-\infty}}$ vérifiant:*

1. $o(a_{n+1}/k) = o(a_{n+1}/F_1) = n + 1$;
2. $F_1(a_n) \subset F_1(a_{n+1})$;
3. $F_1(a_{n+1})/L$ *non modulaire.*

Preuve. Posons $k_0 = F_1 \cap L$; donc $k_0 = k(X_1^{p^{-n_0}})$ avec $n_0 = [k_0, k]$. Comme $L \not\subset F_1$ on a $F_1 L \neq F_1$; donc $[F_1 L, F_1] = 1$, par suite, $[F_1(a_n), F_1 L] = n - 1$, c'est à dire $o(a_n/L(X_1^{p^{-\infty}})) = n - 1$; soit $X = X_1^{p^{-(n_0+1)}}$; on a $o(X/L) = 1$ et $F_1 L = L(X^{p^{-\infty}})$; par suite, $o(a_n/L(X^{p^{-s}})) = n - 1$ pour tout $s \geq 0$. Pour situer L dans $F_1(a_n)$, on a $[L(a_n), k(a_n)] \le [L, k] = p^{n_0+1}$. Par hypothèse, $L(a_n)$ est une sous-extension de $F_1(a_n)/k(a_n) = k(a_n)(X_1^{p^{-\infty}})/k(a_n)$; donc $L(a_n) = k(a_n)(X_1^{p^{-r}})$. Comme $o(X_1^{p^{-r}}/k(a_n)) = o(X_1^{p^{-r}}/k) = r$ (car $F_1(a_n) = F_1 \otimes_k k(a_n)$), on a $r \le n_0 + 1$; donc $L(a_n) \subset k(a_n)(X_1^{p^{-(n_0+1)}}) = k(a_n, X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[rr, "n"] \arrow[dr, "1"'] & & F_1(a_n) \\
k \arrow[r, "n_0"] & k_0 = F_1 \cap L \arrow[ur] \arrow[dr, "1"'] & & F_1 L \arrow[ur, "n-1"'] & \\
 & & L = k(\alpha) \arrow[ur] \arrow[rr, "\le n"'] & & L(a_n) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

L'équation de définition de a_n/F_1L s'écrit

$$a_n^{p^{n-1}} = \sum_{0 \le i < p} c_i X^i \,.$$

Posons $a_{n+1} = a_n^{p^{-1}}$; si $F_1(a_{n+1})/L$ est non modulaire, alors a_{n+1} convient. Sinon, l'équation de définition de a_{n+1}/F_1L se déduit simplement de celle de a_n/F_1L

$$a_{n+1}^{p^n} = \sum_{0 \le i < p} c_i X^i \,.$$

Comme $F_1(a_{n+1})/L$ est modulaire, le critère de modularité des extensions $F(\theta)/k$ avec F/k 2-simple (cf. proposition 2.5) donne $c_i^{p^{-n}} \in F_1(a_n^{p^{-1}})$. Posons alors $a_{n+1} = t^{p^{-1}} + a_n^{p^{-1}}$. On a

$$a_{n+1}^{p^n} = t^{p^{n-1}} + c_0 + \sum_{1 \le i < p} c_i X^i \,.$$

Si $F_1(a_{n+1})/L$ est non modulaire alors a_{n+1} convient. Sinon pour $1 \le i < p$, on a $c_i^{p^{-n}} \in F_1(a_{n+1})$, donc $a_n^{p^{-1}} - c_0^{p^{-n}} \in F_1(a_{n+1})$. On distingue deux cas:

- 1[er] cas: Il existe j dans $[1, p]$ tel que $c_j \notin k_0$. Dans ce cas, posons $\xi = a_n^{p^{-1}} - c_0^{p^{-n}}$; on a $o(\xi/F_1) \le n + 1$ (car $\xi \in F_1(a_{n+1})$); s'il est $\le n$, alors $\xi^{p^n} = a_n^{p^{n-1}} - c_0 \in k_0(X)$ car $o(\xi^{p^n}/k_0) \le 1$. Donc

$$a_n^{p^{n-1}} - c_0 = \sum_{0 \le i < p} h_i X^i = \sum_{1 \le i < p} c_i X^i \,, \qquad h_i \in k_0 (\subset L) \,.$$

  D'où par identification, $c_j \in k_0$, contradiction. Donc $o(\xi/F_1) = n + 1$ par suite, $F_1(a_n^{p^{-1}} - c_0^{p^{-n}}) = F_1(a_{n+1})$. Comme $c_0^{p^{-n}} \in F_1(a_n^{p^{-1}})$, on a $F_1(a_n^{p^{-1}}) = F_1(a_n^{p^{-1}} - c_0^{p^{-n}})$. Par suite, $t^{p^{-1}} \in F_1(a_{n+1})$, contradiction (cf. lemme 1.5).

- $2^{\text{ème}}$ cas: Pour tout $j \in [1,p]$, $c_j \in k_0$. Dans ce cas, $c_0 \notin k_0$; sinon $a_n^{p^{n-1}} \in F_1$ (par hypothèse, $o(a_n^{p^{n-1}}/F_1) = n$). Ici aussi on distingue deux cas:
  - 1^{er} cas: Il existe j dans $[1,p]$ tel que $c_j \neq 0$; dans ce cas, posons $a_{n+1} = t^{p^{-1}} a_n^{p^{-1}}$; si $F_1(a_{n+1})/L$ est non modulaire, alors a_{n+1} convient; sinon par le même critère de modularité (proposition 2.5) que ci-dessus, $t^{p^{-1}} c_i^{p^{-n}} \in F_1(a_{n+1})$ pour $0 \leq i < p$; soit $\xi = \dfrac{a_{n+1}}{t^{p^{-1}} c_0^{p^{-n}}} = \dfrac{a_n^{p^{-1}}}{c_0^{p^{-n}}}$; on a $o(\xi/F_1) \leq n+1$ (car $\xi \in F_1(a_{n+1})$); s'il est $\leq n$, alors par identification comme ci-dessus, $c_0 \in k_0$, contradiction.
  - $2^{\text{ème}}$ cas: Pour tout $j \in [1,p]$ $c_j = 0$, c'est à dire $a_n^{p^{n-1}} \in L$. Comme $a_n^{p^{n-1}} \notin k_0$ (sinon $o(a_n/F_1) \leq n-1$), on a $L = k_0(a_n^{p^{n-1}}) = k(a_n^{p^{n-1}})$ car K/k est simple. Par suite, $[L,k] = p$; donc $k_0 = k$; dans ce cas, posons $a_{n+1} = a_n^{p^{-1}} + t^{p^{-1}} X_1^{p^{-(n+1)}}$. Si $F_1(a_{n+1})/L$ est non modulaire, alors a_{n+1} convient; sinon, on a $a_{n+1}^{p^n} = a_n^{p^{n-1}} + t^{p^{n-1}} X$; par le même critère de modularité que ci-dessus, on obtient $t^{p^{-1}} \in F_1(a_{n+1})$, contradiction. □

Soit k un corps commutatif dénombrable de caractéristique $p \neq 0$ et de degré d'imperfection fini ≥ 3. Soient X_1, X_2, t des élément de k p-indépendants. Soient $F_1 = k(X_1^{p^{-\infty}})$, et soit

$$H = \left\{ L \mid L/k \text{ sous-extension de } F_1(X_2^{p^{-1}})/k \text{ et } o(L/L \cap F_1) = 1 \right\}.$$

Comme k est dénombrable, H est dénombrable, notons $H = \{L_n\}_{n \geq 2}$. Posons $a_1 = X_2^{p^{-1}}$; par le lemme ci-dessus, on construit une suite (a_n) d'élément de $k^{p^{-\infty}}$ vérifiant:

- $o(a_n/k) = o(a_n/F_1) = n$;
- $F_1(a_n) \subset F_1(a_{n+1})$;
- $F_1(a_n)/L_n$ non modulaire.

Soit $K = \bigcup F_1(a_n)$.

Théorème 4.6. *K/k est modulaire et un admet une seule sous-extension qui soit propre, infinie, et relativement parfaite.*

Corollaire 1.6. *K/k est modulaire mais n'est pas produit tensoriel d'extensions simples au $3^{\text{ème}}$ sens sur aucune extension finie L de k.*

Preuve du corollaire. Il est clair que K/k n'est pas simple au $3^{\text{ème}}$ sens (car admet une sous-extension propre infinie F_1/k). Si K/k était produit tensoriel d'extensions simples au $3^{\text{ème}}$ sens sur une extension finie L de k, cela donne lieu a deux sous-extensions propres et relativement parfaites de K/k, contradiction. □

Preuve du théorème. Soit F_2/k une sous-extension propre de K/k infinie et relativement parfaite autre que F_1. Comme $\operatorname{di}(K/k) = 2$, on a $\operatorname{di}(F_2/k) = 1$ (cf. proposition 6.2). Donc il existe un entier n_0 tel que $F_1 \cap F_2 = k^{p^{-n_0}} \cap F_2$; soit $L = k^{p^{-(n_0+1)}} \cap F_2$; on a $o(L/L \cap F_1) = 1$; donc $o(F_1 L/F_1) \leq 1$; donc $L \subset F_1(X_2^{p^{-1}})$.

Par suite, il existe $L_n \in H$ tel que $L = L_n$. On a K/L est modulaire vu que K/k est modulaire (car $K = \bigcup F_1(a_n)$ et $F_1(a_n) = k(a_n) \otimes_k F_1$) et K/k est relativement parfaite (car K/F_1 et F_1/k le sont). Comme F_2/k est simple de deuxième espèce, F_2/L est modulaire. Par le lemme 2.6 K/L est modulaire. Or $F_1(a_n)/L$ est sous-extension de K/L modulaire et di $(K/L) \leq 2$. Donc par le corollaire 1.4 $F_1(a_n)/L$ est modulaire, contradiction. □

References

[1] Beckert, M. T. and Maclane, S., *The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 182–186.

[2] Chellali, M. and Fliouet, E., *w_0-generated field extensions*, A paraître.

[3] Chellali, M. and Fliouet, E., *Extensions presque modulaires*, A paraître.

[4] Deveney, J. K., *An intermediate theory for a purely inseparable Galois theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **198** (1975), 287–295.

[5] Deveney, J. K., *w_0-generated field extensions*, Arch. Math. (Basel) **47** (1986), 410–412.

[6] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., *Higher derivation Galois theory of inseparable field extensions*, Handbook of Algebra, Vol. 1 (1996), 189–220.

[7] Deveney, J. K. and Mordeson, J. N., *Invariance in inseparable Galois theory*, Rocky Mountain J. Math. **83** (1979), 655–662.

[8] Kime, L. A., *Purely inseparable modular extensions of unbounded exponent,* Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 335–349.

[9] Mordeson, J. N. and Shoultz, W. W., *p-bases of inseparable field extensions*, Arch. Math. (Basel) **227** (1973), 44–49.

[10] Mordeson, J. N. and Vinograde, B., *Structure of arbitrary purely inseparable extension fields*, SLNM Springer, Berlin **173** (1970).

[11] Pickert, G., *Inseparable Körperweiterungen*, Math. Z. **52** (1949), 81–135.

[12] Sweedler, M. E., *Structure of inseparable extensions*, Ann. Math. **87** (2) (1968), 401–410.

[13] Waterhause, W. C., *The structure of inseparable field extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 39–56.

Département de mathématiques, Faculté des sciences
Université Mohammed 1
Oujda, Maroc
E-mail: chellali@sciences.univ-oujda.ac.ma, fliouet@yahoo.fr