Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 23, 1998, 33–58

PERTURBATIONS ET ESPACES HARMONIQUES NON LINÉAIRES

Nadra Bel Hadj Rhouma, Abderrahman Boukricha et Mahel Mosbah

Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs, 2 Rue Jawaher Lal Nehru, 1008 Tunis, Tunisie
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, 1060 Tunis, Tunisie
Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Jarzouna, Tunisie

Abstract. Similar to the work done by F.Y. Maeda and F. van Gool, we consider a more general semi-linear perturbation of linear harmonic spaces, studying the solvability (existence and uniqueness of solutions) of the non-linear Dirichlet problem. We then prove that this perturbation leads to a more general non-linear harmonic Bauer space introduced by the authors. In the last sections of the paper we show that the majority of properties in the linear case has an analogue in this non-linear setting.

0. Introduction

Soit $(X,\mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer au sens de [9]. Comme dans [8, §3], nous notons par $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ l'ensemble des ouverts U relativement compacts de X tels que $\overline{U}$ est contenu dans un sous espace $\mathscr{P}$-harmonique de $(X,\mathscr{H})$. Nous rappelons, voir [8, §3] ou [15], qu'une section (ou différence locale) de potentiels continus et réels est une famille $(M_U)_{U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})}$ telle que M_U-M_V est harmonique sur $U\cap V$ pour U et V dans $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. Si M_U est un potentiel sur U pour tout $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ la section est dite positive.

Soit φ une application borélienne de $X\times\mathbf{R}$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ et M une section positive de potentiels continus et réels. Nous supposons que φ est M-continue au sens suivant : Pour tout ouvert U de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour toute suite $(u_n)_n$ uniformément bornée dans $\mathscr{B}_b(X)$ qui converge simplement vers u on a $|\varphi(\cdot,u_n)-\varphi(\cdot,u)|\bullet M_U(x)$ converge vers zéro pour tout $x\in X$ ($\bullet$ désigne la multiplication spécifique, voir [9]).

Dans ce travail nous étudions les perturbations ${}^{\varphi}K_U$ non-linéaires définies par ${}^{\varphi}K_U f=\big(f\varphi(\cdot,f)\big)\bullet M_U$ pour tout $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et toute fonction f borélienne bornée sur U. Nous poursuivons l'étude dans [3] du problème de Dirichlet relatif à cette perturbation et à la lumière de cette étude nous proposons une axiomatique d'espaces harmoniques non-linéaires de Bauer. Si $(X,\mathscr{H})$ est donné par un opérateur différentiel L sur $\mathbf{R}^n$, c'est à dire pour tout ouvert U de $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{H}(U)=\{u\in\mathscr{C}(U): Lu=0$ au sens des distributions$\}$, nous montrons entre autres que si φ vérifie certaines conditions (non nécessairement localement lipschitzienne et bornée) alors si $\widetilde{\mathscr{H}}(U)=\{u\in\mathscr{C}(U): Lu=u\varphi(\cdot,u)$ au sens des

---

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 31C45, 31D05; Secondary 35G30, 35K60.

distributions}, on a $(\mathbf{R}^n, \widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique de Bauer non-linéaire, c'est à dire qu'on a toutes les propriétés d'espaces harmoniques (voir [9]) sauf la linéarité du faisceau $\widetilde{\mathscr{H}}$. Nous généralisons ainsi la notion d'espace harmonique non-linéaire introduite par van Gool dans sa thèse [14].

Dans le premier paragraphe, nous rappelons les notions de fonctions Kato-bornées et Kato–Lipschitziennes introduites dans [3].

Au second paragraphe nous caractérisons au moyen des sections de potentiels les perturbations semi-linéaires introduites par F. van Gool [13]. Nous montrons ensuite que si ${}^{\varphi}K$ est une perturbation au sens de van Gool, alors φ vérifie la condition $(*)$ suivante : il existe une section positive $(S_U)_{U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})}$ de potentiels continus et réels telle que $\|S_U\|_\infty < 1$ et $\varphi^-(\,\cdot\,,v)\bullet M_U \prec S_U$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et tout $v \in B_b(U)$.

Nous montrons que la réciproque est fausse même si $\varphi^- = 0$. Si φ est localement Kato-bornée relativement à M et vérifie $(*)$, nous prouvons l'existence d'au moins une solution du problème de Dirichlet perturbé par ${}^{\varphi}K$ sur tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$.

Au troisième paragraphe nous considérons le cas parabolique et nous montrons que si φ est localement Kato-bornée et que si φ^- est Kato-bornée relativement à M (ne vérifiant pas nécessairement $(*)$) alors pour tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$, il existe au moins une solution $u \in \mathscr{C}_b(U)$ de l'équation

$$u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f. \tag{1}$$

Si de plus φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M ou si l'application Ψ de $\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par $\Psi(y) = y\varphi(\,\cdot\,,y)$ est croissante, on a unicité de la solution de (1). Nous vérifions que dans ce cadre de perturbations les conditions précédentes qui donnent l'existence et l'unicité de (1) généralisent celles de van Gool [13] et Maeda [20], [21].

Dans le paragraphe IV, nous considérons un faisceau $\mathscr{H}$ parabolique sur tout ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et nous montrons que sous des hypothèses convenables, l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = g$ possède une solution unique pour tout U dans $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout g dans $\mathscr{C}_b(U)$.

Nous traitons en particulier la résolution du système

$$(*) \qquad \begin{cases} Lu - u\varphi(\,\cdot\,,u) = 0 & \text{au sens des distributions,} \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z) & \text{pour tout point } L\text{-régulier } z \in \partial U \end{cases}$$

où L est un opérateur parabolique et f une fonction continue sur la frontière de U.

Nous montrons à l'aide d'un exemple que si L désigne un opérateur elliptique, le système précédent n'a pas toujours de solution bornée pour toute f donnée à la frontière.

Dans le paragraphe V, nous introduisons la notion de faisceau non-linéaire et nous montrons que si φ est localement Kato-bornée relativement à M, alors l'application $\widetilde{\mathscr{H}}$ définie sur l'ensemble des ouverts de X par

$$\widetilde{\mathscr{H}}(U) = \{u \in \mathscr{C}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_V \in \mathscr{H}(V)$$

pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ vérifiant $\overline{V} \subset U\}$ est un faisceau non-linéaire de fonctions sur X.

Pour un ouvert U de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$, $K \in (\mathbf{R}^*)^+$, nous considérons une base d'ouverts $\mathscr{U}^K(U)$ assurant en particulier l'existence d'une solution unique notée $\widetilde{H}_V f$ de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_V = H_V f$ pour tout V dans $\mathscr{U}^K(U)$ et pour tout f dans $\mathscr{B}_b(\partial V)$ telle que $\|f\|_\infty \leq K$.

Nous définissons alors les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{H}^*} = \{u \in \mathscr{B}_b(U) : {} & u \text{ semi-continue inférieurement et } \widetilde{H}_V u \leq u \\ & \text{pour tout } V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)\},\\ \widetilde{\mathscr{H}_*} = \{u \in \mathscr{B}_b(U) : {} & u \text{ semi-continue supérieurement et } \widetilde{H}_V u \geq u \\ & \text{pour tout } V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)\}\end{aligned}$$

et nous généralisons le résultat prouvé par F.Y. Maeda dans [21] qui est le suivant :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{H}^*} &= \{u \in \mathscr{B}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_V \in \mathscr{H}^*(V) \text{ pour tout } V \subset \overline{V} \subset U\},\\ \widetilde{\mathscr{H}_*} &= \{u \in \mathscr{B}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_V \in \mathscr{H}_*(V) \text{ pour tout } V \subset \overline{V} \subset U\}.\end{aligned}$$

Dans le dernier paragraphe, nous introduisons la notion d'espace harmonique non-linéaire et nous définissons les fonctions $\widetilde{\mathscr{H}}$-potentiels sur un ouvert U. Nous donnons ensuite des conditions suffisantes sur φ pour lesquelles la paire $(X, \widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique non-linéaire.

Dans le cas parabolique, nous montrons qu'on a le principe du minimum sur les ouverts de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$, et nous caractérisons de manière analogue à celle de Boukricha, Hansen et Hueber dans [8] les $\widetilde{\mathscr{H}}$-potentiels.

I. Notations et définitions

$(X, \mathscr{H})$ désigne toujours un espace harmonique où X est un espace localement compact à base dénombrable et $\mathscr{H}$ le faisceau des fonctions harmoniques. Soit U un ouvert de X. Nous désignons par ${}^*\mathscr{H}(U)$ l'ensemble des fonctions hyperharmoniques, par $\mathscr{S}(U)$ les fonctions surharmoniques et par $\mathscr{P}(U)$ les potentiels sur U. $\mathscr{C}(U)$ (respectivement $\mathscr{B}(U)$) dénote l'ensemble des fonctions continues (respectivement boréliennes) réelles sur U.

Pour tout ensemble $\mathscr{A}$ de fonctions réelles, $\mathscr{A}^+$ (respectivement $\mathscr{A}_b$) est l'ensemble de toutes les fonctions positives (respectivement bornées) de $\mathscr{A}$. Le noyau harmonique H_U est défini par $H_U(x,\cdot) = \mu_x^U$ pour tout $x \in U$ et $H_U(x,\cdot) = \varepsilon_x$ pour tout $x \in (X \setminus U)$. μ_x^U est la mesure harmonique associée à U et x par la méthode de Perron–Wiener–Brelot.

Si u est une application de U dans $\overline{\mathbf{R}}$, on notera par $\hat{u}$ la régularisée semi-continue inférieurement c'est à dire $\hat{u}(x) = \liminf_{y\to x, y\in U} u(y)$ pour tout $x \in U$. On notera par $\check{u}$ la fonction de U dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par $\check{u} = -\widehat{(-u)}$.

Nous noterons par $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ l'ensemble des ouverts U de X relativement compacts et tels que $\overline{U}$ est contenue dans un P-ensemble (c'est à dire un ensemble ouvert sur lequel il y a un potentiel strictement positif en chaque point).

$\mathscr{M}(\mathscr{H})$ désigne l'ensemble formé par les différences locales de potentiels continus et réels ou section de potentiels et $\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ le cône des éléments positifs de $\mathscr{M}(\mathscr{H})$.

Le symbole "$\prec$" désigne l'ordre spécifique dans $\mathscr{P}(U)$.

Définition. Une fonction $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne est dite dans la classe de Kato-locale relativement à M et notée $f \in K_M^{\mathrm{Loc}}$ si le produit spécifique de $|f|$ par M noté $|f|\bullet M$ est aussi une section positive de potentiels continus et réels.

Nous rappelons les définitions suivantes qui ont été introduites dans [3], pour ceci nous considérons une section positive de potentiels continus et réels M et une application $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne.

Nous dirons que l'application φ est *localement Kato-bornée relativement à M* si : Pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot, g)|\bullet M_U \prec p_U^c$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $g \in \mathscr{B}_b(X)$ tel que $\|g\|_\infty \le c$.

Nous dirons que l'application φ est *Kato-bornée relativement à M* s'il existe $p \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot, g)|\bullet M_U \prec P_U$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $g \in \mathscr{B}_b(X)$.

Nous dirons que φ est une *fonction localement Kato–Lipschitzienne relativement à M* si pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant :

$$|\varphi(\cdot, u) - \varphi(\cdot, v)|\bullet M_U \prec |u - v|\bullet p_U^c$$

pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout u, v dans $\mathscr{B}_b(X)$ tels que $\|u\|_\infty \le c$ et $\|v\|_\infty \le c$.

Nous dirons que φ est *Kato–Lipschitzienne relativement à M* s'il existe $p \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot, u) - \varphi(\cdot, v)|\bullet M_U \prec |u - v|\bullet P_U$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout u, v dans $\mathscr{B}_b(X)$. Nous dirons que φ est *M-continue* si pour toute suite $(u_n)_n$ uniformément bornée dans $\mathscr{B}_b(X)$ qui converge vers u on a : Pour tout ouvert U de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $x \in X$, $|\varphi(\cdot, u_n) - \varphi(\cdot, u)|\bullet M_U(x)$ converge vers 0.

II. Etude de la perturbation semi-lineaire

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux perturbations semi-linéaires définies sur un espace harmonique $(X, \mathscr{H})$ qui ont été introduites par F.Y. Maeda dans [20] et F. van Gool dans [13]. Nous traiterons le cas où la perturbation est donnée par ${}^{\varphi}K_U f = \big(\varphi(\cdot, f)f\big) \bullet M_U$ avec $U \in \mathscr{U}$, $f \in \mathscr{B}_b(U)$, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et φ: $X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne. Nous donnerons une caractérisation des fonctions φ qui donnent des perturbations semi-linéaires au sens de van Gool. Puisque les perturbations semi-linéaires introduites par F.Y. Maeda vérifient les hypothéses de F. van Gool (voir [13]) il suffit donc d'étudier les conditions de ce dernier.

II.1. Notation. Soit Θ un recouvrement de X par des P-ensembles et soit $\mathscr{U}$ la famille des ouverts U relativement compacts tels qu'il existe $W \in \Theta$ vérifiant $\overline{U} \subset W$.

II.2. Définition. Soient U un ouvert de $\mathscr{U}$ et

$$K_U\colon \mathscr{B}_b(U) \to \mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U) - \mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U)$$

vérifiant :

1) Il existe $q \in \mathscr{P}(U)$, $\|q\|_\infty < 1$ tel que pour tout $M > 0$ il existe $p \in \mathscr{P}(U)$ et tel que pour tout $f \geq g$ vérifiant $|f| \leq M$, $|g| \leq M$ on a :

$$(g - f) \bullet q \prec K_U f - K_U g \prec (f - g) \bullet p.$$

2) Soit $V \in \mathscr{U}$ vérifiant $\overline{V} \subset U$ on a $K_U f = H_V K_U f + K_V f$.
L'application $(U \in \mathscr{U}) \mapsto I + K_U$ définit *une perturbation semi-linéaire au sens de van Gool* si pour tout $U \in \mathscr{U}$, K_U vérifie les propriétés 1) et 2).

II.3. Exemple. On considère l'espace harmonique classique c'est à dire $(X, \mathscr{H})$ où $\mathscr{H}$ est le faisceau harmonique associé à l'équation de Laplace $\Delta h = 0$. Soit p un potentiel continu sur X et μ la mesure associée. On considère une fonction g continue lipschitzienne sur $X \times \mathbf{R}$ et on définit $K_X(f)(x) = g\big(x, f(x)\big) \bullet p$ et $K_U(f) = K_X(f) - H_U K_X f$. On obtient alors une perturbation semi-linéaire et un espace harmonique perturbé associé à l'équation $\Delta h - g(\cdot, h)\mu = 0$ (voir [13]).

II.4. Remarque. La condition 2) implique que pour tout $f \in \mathscr{B}_b(X)$, $\big(K_U(f)\big)_{U \in \mathscr{U}}$ définit une section de potentiels continus et réels. En particulier, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\big(K_U(\chi_{\{y\}})\big)_{U \in \mathscr{U}}$ est une section de potentiels continus et réels.

On adoptera la notation $(M_U)_{U \in \mathscr{U}}$ à la place de $(M_U)_{U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})}$.

II.5. Théorème. *Soit $(K_U)_{U \in \mathscr{U}}$ une famille d'applications de $\mathscr{B}_b(U)$ dans $\mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U) - \mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U)$ vérifiant les conditions de la définition* II.2. *Alors il existe une section $(q_U)_{U \in \mathscr{U}}$ positive de potentiels continus et réels telle que pour tout $U \in \mathscr{U}$, $\|q_U\|_\infty < 1$ et pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe une section positive $p^c = (p_U^c)_{U \in \mathscr{U}} \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : Pour tout $U \in \mathscr{U}$ et pour tout $f, g \in \mathscr{B}_b(U)$ avec $f \geq g$, $\|f\|_\infty \leq c$ et $\|g\|_\infty \leq c$ on a :*

$$(g - f) \bullet q_U \prec K_U f - K_U g \prec (f - g) \bullet p_U^c.$$

Démonstration. Soit $c \in \mathbf{R}_+^*$ et soit U un ouvert de $\mathscr{U}$; désignons par p_U^c et q_U respectivement les plus petits potentiels qui vérifient la condition 1 de la définition II.2. Il suffit de prouver que $(p_U^c)_{U\in\mathscr{U}}$ est une famille compatible de différence locale de potentiels continus c'est à dire $p_U^c - p_W^c$ est dans $\mathscr{H}(U\cap W)$ pour tout U, W dans $\mathscr{U}$.

Soit $V\in\mathscr{U}$ vérifiant $\overline{V}\subset U$ et soient f et g dans $\mathscr{B}_b(U)$ telles que $f\geq g$, $\|f\|_\infty \leq c$ et $\|g\|_\infty\leq c$. Il existe $p_1\in\mathscr{P}(U)$ vérifiant $(f-g)\bullet p_U^c = K_U f - K_U g + p_1$. Posons $p_c^V = p_U^c - H_V p_U^c$, on a :

$$\begin{aligned}(f-g)\bullet p_c^V &= K_V f - K_V g + H_V(K_U f - K_U g) - H_V\big((f-g)\bullet p_c^U\big) + p_1\\ &= K_V f - K_V g + s\end{aligned}$$

avec

$$s = H_V(K_U f - K_U g) - H_V\big((f-g)\bullet p_U^c\big) + p_1.$$

Donc $s = p_1 - H_V(p_1)\in\mathscr{P}(V)$ et alors $K_V f - K_V g \prec (f-g)\bullet p_c^V$ pour tout $f\geq g$ telles que $\|f\|_\infty\leq c$ et $\|g\|_\infty \leq c$. D'après la définition de p_V^c on a $p_V^c\leq p_c^V$. Soit $p\in C(U)$ définie par

$$p = \begin{cases} p_U^c & \text{sur } U\setminus V,\\ p_U^c\wedge (H_V p_U^c + p_V^c) & \text{sur } V.\end{cases}$$

Ainsi $p\in\mathscr{P}(U)$ d'après la propriété de troncature. De plus, pour tout $f,g\in\mathscr{B}_b(U)$ telles que $f\geq g$, $\|f\|_\infty\leq c$ et $\|g\|_\infty\leq c$, on a :

$$K_U f - K_U g = K_V f - K_V g + H_V(K_U f - K_U g)$$

et

$$K_U f - K_U g \prec (f-g)\cdot p_V^c + H_V\big((f-g)\bullet p_U^c\big) \prec (f-g)\cdot(p_V^c + H_V P_U^c)$$

sur V. D'autre part $K_U f - K_U g\prec (f-g)\bullet p_U^c$ donc, $K_U f - K_U g \prec (f-g)\bullet p$. Ainsi $p_U^c \leq p\leq p_V^c + H_V p_U^c$ et par suite $p_c^V\leq p_V^c$. Finalement $p_V^c = p_U^c - H_V p_U^c$ pour tout $V\in\mathscr{U}$ tel que $\overline{V}\subset U$. De manière analogue, on montre que $(q_U)_{U\in\mathscr{U}}$ est une famille compatible de différence locale de potentiels continus et réels.

II.6. Proposition. *Soit $(K_U)_{U\in\mathscr{U}}$ une famille d'applications de $\mathscr{B}_b(U)$ dans $\mathscr{P}_b(U)\cap\mathscr{C}_b(U) - \mathscr{P}_b(U)\cap\mathscr{C}_b(U)$ vérifiant les conditions de la définition* II.2. *Alors pour tout $c\in\mathbf{R}_+^*$, il existe $(\tilde{p}_U)_{U\in\mathscr{U}}\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant pour tout $f,g\in\mathscr{B}_b(U)$ telles que $\|f\|_\infty\leq c$ et $\|g\|_\infty\leq c$: $-|f-g|\bullet\tilde{p}_U \prec K_U f - K_U g \prec |f-g|\bullet\tilde{p}_U$. En particulier $|K_U f - K_U g|\leq |f-g|\bullet\tilde{p}_U$.*

Démonstration. Soient $U\in\mathscr{U}$, p et q les sections positives de potentiels continus et réels du théorème II.5. Soient f et g dans $\mathscr{B}_b(U)$ telles que $\|f\|_\infty\leq c$ et $\|g\|_\infty\leq c$. Posons $h = f\wedge g$, on a $\|h\|_\infty\leq c$, $h\leq f$ et $h\leq g$. Donc

$$\begin{cases}(h-f)\bullet(p_U+q_U)\prec K_U f - K_U h \prec (f-h)\bullet(p_U+q_U),\\ (h-g)\bullet(p_U+q_U)\prec K_U g - K_U h\prec (g-h)\bullet(p_U+q_U).\end{cases}$$

Par suite $\big(2h-(f+g)\big)\bullet(p_U+q_U)\prec K_U f - K_U g\prec (f+g-2h)\bullet(p_U+q_U)$. Posons $\tilde{p}_U = p_U + q_U$, ainsi $-|f-g|\bullet\tilde{p}_U \prec K_U f - K_U g\prec |f-g|\bullet\tilde{p}_U$.

II.7. Théorème. *Soient* $(X, \mathscr{H})$ *un espace harmonique de Bauer,* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ *et* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne. On suppose que pour tout* $U \in \mathscr{U}$*, l'application* ${}^{\varphi}K_U\colon \mathscr{B}_b(U) \to \mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U) - \mathscr{P}_b(U) \cap \mathscr{C}_b(U)$ *définie par* $K_U u = \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big) \bullet M_U$ *vérifie les conditions de la définition II.2 et que* $\varphi^-(\,\cdot\,,0) = 0$*. Alors il existe* $(S_U)_{U\in\mathscr{U}} \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ *vérifiant* $\|S_V\|_\infty < 1$ *et* $\varphi^-(\,\cdot\,,v)M_V \prec S_V$ *pour tout* $V \in \mathscr{U}$ *et pour tout* $v \in \mathscr{B}_b(V)$*.*

Démonstration. Soit $U \in \mathscr{U}$, il existe $q_U \in \mathscr{P}(U)$ tel que $\|q_U\|_\infty < 1$ et $\big(\varphi(\,\cdot\,,u)u - \varphi(\,\cdot\,,v)v\big) \bullet M_U \succ -(u-v) \bullet q_U$ pour tout $u, v \in \mathscr{B}_b(U)$ vérifiant $u \geq v$. Soit $A = \{x \in U : u(x)\varphi\big(x, u(x)\big) - v(x)\varphi\big(x, v(x)\big) \geq 0\}$. On a : $\big(u\varphi(\,\cdot\,,u) - v\varphi(\,\cdot\,,v)\big)^- \bullet M_U \prec 1_{A^c}(u-v) \bullet q_U \prec (u-v) \bullet q_U$. Pour $u \geq v = 0$ on a $u \bullet \big(\varphi^-(\,\cdot\,,u) \bullet M_U\big) \prec u \bullet q_U$. Pour $v \leq u = 0$ on a $-v \bullet \big(\varphi^-(\,\cdot\,,v) \bullet M_U\big) \prec (-v) \bullet q_U$. Or $|u|\varphi^-(\,\cdot\,,u) = u^+\varphi^-(\,\cdot\,,u^+) + u^-\varphi^-(\,\cdot\,,-u^-)$. Donc pour tout $u \in \mathscr{B}_b(U)$, $|u| \bullet \big(\varphi^-(\,\cdot\,,u) \bullet M_U\big) \prec u^+ \bullet q_U + u^- \bullet q_U = |u| \bullet q_U$. Ainsi

$$(|u|\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}) \bullet M_U \prec |u|1_{\{u\neq 0\}} \bullet q_U.$$

Posons

$$v = \begin{cases} |u| & \text{sur } \{u \neq 0\}, \\ 1 & \text{sur } \{u = 0\}. \end{cases}$$

On aura :

$$\begin{aligned}
\big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\big) \bullet M_U &= \Big(\frac{|u|}{v}\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\Big) \bullet M_U \\
&\prec \Big(\frac{|u|}{v}1_{\{u\neq 0\}}\Big) \bullet q_U = 1_{\{u\neq 0\}} \bullet q_U.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\varphi^-(\,\cdot\,,u) \bullet M_U &= \big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\big) \bullet M_U + \big(\varphi^-(\,\cdot\,,0)1_{\{u=0\}}\big) \bullet M_U \\
&= \big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\big) \bullet M_U.
\end{aligned}$$

Donc $\varphi^-(\,\cdot\,,u) \bullet M_U \prec q_U$.

II.8. Remarques. a) Dans le cas où $\varphi^-(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$, l'hypothèse $\varphi^-(\,\cdot\,,0) = 0$ n'est plus nécessaire pour la démonstration du théorème précédent et par suite pour l'étude des perturbations semi-linéaires au sens de van Gool. En effet, il suffit de considérer la famille d'ouverts

$$\widetilde{\mathscr{U}} = \{U \in \mathscr{U} : \|q_U + \varphi^-(\,\cdot\,,0) \bullet M_U\|_\infty < 1\}.$$

L'application $U \mapsto I + {}^{\varphi}K_U$, $U \in \widetilde{\mathscr{U}}$, définit une perturbation semi-linéaire au sens de van Gool. De plus, pour tout $U \in \widetilde{\mathscr{U}}$ et pour tout $u \in \mathscr{B}_b(U)$ on a d'après ce qui précède :

$$\big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\big) \bullet M_U \prec 1_{\{u\neq 0\}} \bullet q_U.$$

Donc

$$\begin{aligned}\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_U &= \big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)1_{\{u\neq 0\}}\big)\bullet M_U + \big(\varphi^-(\,\cdot\,,0)1_{\{u=0\}}\big)\bullet M_U\\ &\prec 1_{\{u\neq 0\}}\bullet q_U + \big(\varphi^-(\,\cdot\,,0)1_{\{u=0\}}\big)\bullet M_U \prec q_U + \varphi^-(\,\cdot\,,0)\bullet M_U.\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $S_U = q_U + \varphi^-(\,\cdot\,,0)\bullet M_U$.

b) La réciproque du théorème II.7 n'est pas vraie. Il suffit de considérer l'exemple $\varphi(x,y) = y^2\sin^2 y$.

Nous montrons plus tard que φ ne permet pas de définir une perturbation semi-linéaire au sens de van Gool (voir II.10 et II.12).

II.9. Proposition. *Soient $(X,\mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer, $M\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ borélienne. On suppose que :*

i) φ est localement Kato-bornée relativement à M.

ii) L'application φ est M-continue.

iii) Il existe $q\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ telle que pour tout $V\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u\in\mathscr{B}_b(V)$ on a $\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\prec q_V$ et $\|q_V\|_\infty<1$.

Alors pour tout ouvert $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f\in\mathscr{B}_b(\partial U)$, il existe au moins une solution de l'équation $u+\big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f$.

Démonstration. Soit $V\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et $u\in\mathscr{B}_b(V)$, on a $\|\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\|_\infty<1$. Donc d'après [8], corollaire 2.9, l'opérateur $\big(I+\varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)$ est inversible et $\big(I+\varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}s\geq 0$ pour tout s surharmonique positive bornée sur V. De plus, pour tout $f\in\mathscr{B}_b(\partial V)$ on a $H_V f\in\mathscr{C}_b(V)$ (voir [8]) et

$$\big|\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}H_V f\big| \leq H_V\|f\|_\infty.$$

En effet : $H_V\|f\|_\infty \pm H_V f\in\mathscr{S}_b^+(V)$. Donc

$$\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}(\pm H_V f) \leq \big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}H_V\|f\|_\infty \leq H_V\|f\|_\infty.$$

Ainsi

$$\big|\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}H_V f\big| \leq H_V\|f\|_\infty.$$

Par suite

$$\begin{aligned}&\big|\big(I+\varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}H_V f\big|\\ &\quad= \Big|\sum_{n\geq 0}\big[\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big]^n\times\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}H_V f\Big|\\ &\quad\leq \sum_{n\geq 0}\big[\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^{-1}\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big]^n H_V\|f\|_\infty\\ &\quad\leq \sum_{n\geq 0}\big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_V\big)^n H_V\|f\|_\infty \leq \sum_{n\geq 0} q_V^n H_V\|f\|_\infty\\ &\quad\leq \|f\|_\infty\|H_V 1\|_\infty\cdot\frac{1}{1-\|q_V\|_\infty}.\end{aligned}$$

Posons $c = \|f\|_\infty \|H_V 1\|/(1 - \|q_V\|_\infty)$ on a alors

$$\big\|\big(I + \varphi(\,\cdot\,,u)\centerdot M_V\big)^{-1} H_V f\|_\infty \le c.$$

D'après [3, théorème 3.8] il existe au moins une solution de l'équation

$$u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\centerdot M_V = H_V f.$$

II.10. Remarque. Soient $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ non nulle sur tout ouvert non vide et $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui ne dépend que de $y \in \mathbf{R}$. Notons $\varphi(x,y) = f(y)$. On suppose que l'application $U \mapsto I + {}^\varphi K_U$, $U \in \mathscr{U}$, définit une perturbation semi-linéaire au sens de van Gool. Soit μ une mesure de Radon sur X telle que $\operatorname{supp}\mu = X$. On a : $0 < \int M_U \, d\mu < +\infty \Leftrightarrow U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, $U \neq \emptyset$. ($M_U \neq 0$ sinon la perturbation est nulle.)

Soient $r, s \in \mathbf{R}$ tels que $r > s$. Posons $c = \max(|r|, |s|)$. On a :

$$(r-s)p_U^c \succ \big(f(r)r - f(s)s\big)\centerdot M_U \succ -(r-s)q_U.$$

Donc

$$(r-s)\int_X p_U^c \, d\mu \ge \big(f(r)r - f(s)s\big)\int_X M_U \, d\mu \ge -(r-s)\int_X q_U \, d\mu.$$

Ainsi

$$-\frac{\int_X q_U \, d\mu}{\int_X M_U \, d\mu} \le \frac{f(r)r - f(s)s}{r-s} \le \frac{\int_X p_U^c \, d\mu}{\int_X M_U \, d\mu}.$$

Posons

$$K_c = \frac{\int_X p_U^c \, d\mu}{\int_X M_U \, d\mu} \qquad \text{et} \qquad K = \frac{\int_X q_U \, d\mu}{\int_X M_U \, d\mu}\ ;$$

f vérifie alors l'encadrement suivant : $-K \le \big(f(r)r - f(s)s\big)/(r-s) \le K_c$. Pour tout $r, s \in \mathbf{R}$ avec $r > s$ et où $c = \max(|r|, |s|)$.

II.11. Exemples. On va donner des exemples d'applications φ pour lesquelles l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\centerdot M_U = H_U f$ admet des solutions pourtant l'application $U \mapsto I + {}^\varphi K_U$, $U \in \mathscr{U}$, ne définit pas une perturbation semi-linéaire au sens de van Gool.

a) Soit $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x,y) = y^{2p}\sin^2 y$ $(p > 1)$ et g l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(y) = y^{2p+1}\sin^2 y$. g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(y) = (2p+1)y^{2p}\sin^2 y + y^{2p+1}\sin 2y$, $y \in \mathbf{R}$. Pour $y_n = n\pi - \frac{1}{4}\pi$, $g'(y_n) = (-\frac{1}{4}\pi + n\pi)^{2p}(p + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi - n\pi)$ et on a $\lim_{n\to+\infty} g'(y_n) = -\infty$. Ainsi la condition $\big(rf(r) - sf(s)\big)/(r-s) \ge -K$ est impossible. L'application φ vérifie les conditions suivantes : Pour $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$,

i) φ localement Kato-bornée relativement à M.

ii) L'application φ est M-continue.

iii) φ est positive sur $X \times \mathbf{R}$.

Donc d'après la proposition II.9 on a : Pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$ il existe au moins une solution de l'équation

$$(*) \qquad u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f.$$

b) Soit $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$(x,y) \mapsto f(y) = \begin{cases} \arctan\sqrt{y-1}+1, & y \geq 1, \\ 1, & y \leq 1. \end{cases}$$

Pour $r=1$ et $s>1$ on a :

$$\frac{f(r)r - f(s)s}{r-s} = \frac{\arctan\sqrt{s-1}}{s-1} \underset{s\to 1}{\longrightarrow} +\infty.$$

La condition $\big(f(r)r - f(s)s\big)/(r-s) \leq K_c$ est alors impossible. L'application φ vérifie les conditions suivantes : Pour $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$,

i) φ est Kato-bornée relativement à M.

ii) L'application φ est M continue.

iii) L'application $y \mapsto \varphi(\,\cdot\,,y)y$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

D'après [3], il existe une base d'ouverts $\mathscr{V}$ telle que pour tout $V \in \mathscr{V}$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$, on a existence et unicité des solutions de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_V = H_V f$.

Dans la suite, si de plus $\mathscr{H}$ est parabolique sur tout ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$, nous montrons l'unicité de la solution de $(*)$ (voir III.1) uniquement sous l'hypothèse localement Kato–Lipschitzienne.

III. Perturbation non linéaire des espaces harmoniques paraboliques

Nous étudions dans ce chapitre une perturbation non linéaire des espaces harmoniques paraboliques. Nous partons d'un espace harmonique $(X,\mathscr{H})$ tel que le faisceau $\mathscr{H}$ est parabolique au sens de [4] ou [17] sur tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, nous considérons une application $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$, $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et $g \in \mathscr{C}_b(U)$ et nous étudions l'existence et l'unicité des solutions de l'équation "intégrale" $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = g$.

III.1. Théorème. *Soient $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne et $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :*

a) $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

b) *φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M.*

Alors pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $g \in \mathscr{C}_b(U)$, l'équation "intégrale" $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = g$ possède au plus une solution bornée dans $\mathscr{C}_b(U)$.

Démonstration. Pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\,\cdot\,,u)-\varphi(\,\cdot\,,v)|\bullet M_U \prec |u-v|\bullet p_U^c$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u,v \in \mathscr{B}_b(X)$ tels que $\|u\|_\infty \le c$ et $\|v\|_\infty \le c$. φ est localement Kato-bornée relativement à M. En effet, soient $c \in \mathbf{R}_+^*$, $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et $u \in \mathscr{B}_b(X)$ avec $\|u\|_\infty \le c$. On a :

$$|\varphi(\,\cdot\,,u)|\bullet M_V \prec |\varphi(\,\cdot\,,u)-\varphi(\,\cdot\,,0)|\bullet M_V + |\varphi(\,\cdot\,,0)|\bullet M_V \prec cp_V^c + |\varphi(\,\cdot\,,0)|\bullet M_V.$$

Soient u et v deux solutions bornées de l'équation “intégrale”

$$u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = g.$$

Posons

$$c = \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)$$

et

$$\phi^{u,v} = \begin{cases} \big(\varphi(\,\cdot\,,u)u - \varphi(\,\cdot\,,v)v\big)/(u-v) & \text{sur } \{u \ne v\}, \\ 0 & \text{sur } \{u = v\}. \end{cases}$$

On a $u - v + \big((u-v)\phi^{u,v}\big)\bullet M_U = 0$ c'est à dire $(I + \phi^{u,v}\bullet M_U)(u-v) = 0$. Or

$$\begin{aligned} |\varphi(\,\cdot\,,u)u - \varphi(\,\cdot\,,v)v|\bullet M_U &\prec |u|\,|\varphi(\,\cdot\,,u)-\varphi(\,\cdot\,,v)|\bullet M_U + |\varphi(\,\cdot\,,v)|\,|u-v|\bullet M_U \\ &\prec c|u-v|\bullet p_U^c + |u-v|\big(cp_U^c + |\varphi(\,\cdot\,,0)|\bullet M_U\big) \\ &\prec |u-v|\bullet\big(2(cp_U^c) + |\varphi(\,\cdot\,,0)|\bullet M_U\big) = |u-v|\bullet\tilde{p}_U^c. \end{aligned}$$

Posons

$$w = \begin{cases} u - v & \text{sur } \{u \ne v\}, \\ 1 & \text{sur } \{u = v\}. \end{cases}$$

On aura

$$|\phi^{u,v}| \le \left|\frac{\varphi(\,\cdot\,,u)u - \varphi(\,\cdot\,,v)v}{w}\right|$$

et

$$\left|\frac{\varphi(\,\cdot\,,u)u - \varphi(\,\cdot\,,v)v}{w}\right|\bullet M_U \prec \frac{|u-v|}{|w|}\bullet\tilde{p}_U^c.$$

Donc

$$|\phi^{u,v}|\bullet M_U \prec \left(\left|\frac{u-v}{w}\right| 1_{\{u\ne v\}}\right)\bullet\tilde{p}_U^c + \left(\left|\frac{u-v}{w}\right| 1_{\{u=v\}}\right)\bullet\tilde{p}_U^c \prec 1_{\{u\ne v\}}\bullet\tilde{p}_U^c \prec \tilde{p}_U^c.$$

Ainsi $\phi^{u,v} \in K_M^{\mathrm{Loc}}$. D'après [17] l'opérateur $(I+\phi^{u,v}\bullet M_U)$ est inversible et puisque $(I+\phi^{u,v}\bullet M_U)(u-v) = 0$, alors $u = v$.

III.2. Proposition. *Soient $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ borélienne et $M\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :*

i) *φ est Kato bornée relativement à M.*

ii) *L'application φ est M-continue.*

Alors, pour tout $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$, l'opérateur $I+{}^{\varphi}K_U$ est surjectif de $\mathscr{C}_b(U)$ dans $\mathscr{C}_b(U)$.

Démonstration. Puisque φ est Kato bornée relativement à M, alors il existe $p\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ telle que : $|\varphi(\,\cdot\,,u)|\bullet M_U\prec p_U$ pour tout $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u\in\mathscr{B}_b(X)$.

Considérons $g\in\mathscr{C}_b(U)$ et notons $c=\|g\|_\infty\big\|\sum_{n\geq 0}(K_U^p)^n 1\big\|_\infty$. Soit

$$E=\{u\in\mathscr{C}_b(U)\colon \|u\|_\infty\leq c\}$$

et soit $T_g\colon E\to\mathscr{B}_b(U)$ définie par $T_g(u)=(I+K_U^{M^u})^{-1}g$ avec $K_U^{M^u}f=\big(f\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U$. On a :

$$|T_g u|=|(I+K_U^{M^u})^{-1}g|=\left|\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(K_U^{M^u}\right)^n g\right|\leq\|g\|_\infty\left\|\sum_{n\geq 0}\left(K_U^p\right)^n 1\right\|_\infty.$$

Ainsi $\|T_g u\|_\infty\leq c$ et par suite $T_g(E)\subset E$.

D'après [3] T_g est un opérateur complètement continu et $T_g(E)$ est relativement compact. Une application du théorème du point fixe de Schauder montre que T_g possède au moins un point fixe u_g vérifiant $u_g+\big(u_g\varphi(\,\cdot\,,u_g)\big)\bullet M_U=g$.

III.3. Exemple. Soit φ une application de $X\times\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ avec $\varphi_1\in K_M^{\mathrm{Loc}}$ et $\varphi_2\in\mathscr{C}_b(\mathbf{R})$ alors φ vérifie les hypothéses i) et ii) de la proposition III.2.

III.4. Proposition. *Soient $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ borélienne et $M\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :*

i) *φ est Kato bornée relativement à M.*

ii) *φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M.*

Alors, pour tout ouvert $U\in\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $g\in\mathscr{C}_b(U)$, l'équation "intégrale" $u+\big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U=g$ posséde une unique solution dans $\mathscr{C}_b(U)$.

Démonstration. D'après ii) l'application φ est M-continue, donc d'après le théorème III.1 et la proposition III.2 on a le résultat.

III.5. Exemple. $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$, $(x,y)\mapsto\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où $\varphi_1\in K_M^{\mathrm{Loc}}$ et φ_2 est bornée, localement Lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. φ vérifie les hypothèses i) et ii) de la proposition III.4.

III.6. Proposition. *Soient $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ borélienne et $M\in\mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :*

i) *φ est localement Kato-bornée relativement à M.*

ii) *φ^- est Kato-bornée relativement à M.*

iii) *L'application φ est M-continue.*

Alors pour tout ouvert U de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour toute fonction $f\in\mathscr{B}_b(\partial U)$, il existe au moins une solution $u\in\mathscr{C}_b(U)$ de l'équation $u+\big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U=H_U f$.

Démonstration. Soit U un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et soit $u \in \mathscr{B}_b(U)$. On a :

$$
\begin{aligned}
&\big|\big(I + \varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^{-1} H_U f\big| \\
&\quad = \Big|\sum_{n\geq 0}\big[\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^{-1}\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big]^n \big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^{-1} H_U f\Big| \\
&\quad \leq \sum_{n\geq 0}\big[\big(I+\varphi^+(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^{-1}\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big]^n H_U(\|f\|_\infty) \\
&\quad \leq \sum_{n\geq 0}\big(\varphi^-(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^n H_U\|f\| \leq \sum_{n\geq 0}(K_U^p)^n H_U \|f\|_\infty
\end{aligned}
$$

où $p \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant $|\varphi^-(\,\cdot\,,u)|\bullet M_U \prec p_U$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u \in \mathscr{B}_b(X)$. Ainsi

$$
\big\|\big(I+\varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_U\big)^{-1} H_U f\big\|_\infty \leq \Big\|\sum_{n\geq 0}(K_U^p)^n H_U 1\Big\|_\infty \|f\|_\infty < +\infty.
$$

D'après [3, théorème 2.7] il existe au moins $u \in \mathscr{C}_b(U)$ solution de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f$.

III.7. Proposition. *Soit* $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et soit* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

i) φ *localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.
ii) $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.
iii) φ^- *est Kato bornée relativement à* M.

Alors pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ *et pour toute fonction* $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$ *on a l'existence et l'unicité des solutions de l'équation* $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f$.

Démonstration. D'après i) φ est M-continue. D'après la proposition III.6 et le théorème III.1 on a l'existence et l'unicité des solutions de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f$.

III.8. Corollaire. *Soit* $\varphi\colon X\times\mathbf{R}\to\overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et soit* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

i) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.
ii) $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.
iii) φ *est positive sur* $X\times\mathbf{R}$.

Alors, pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ *et pour toute fonction* $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$ *on a l'existence et l'unicité des solutions de l'équation* $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U = H_U f$.

III.9. Exemple. Soient $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$, g de $\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ localement Lipschitzienne et C de X dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ telle que $C \in K_M^{\mathrm{Loc}}$. Soit φ l'application de $X\times\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par $\varphi(x,y) = C(x)|g|(y)$. Alors pour tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$, il existe une unique $u \in \mathscr{C}_b(U)$ vérifiant : $u + \big(u|g(u)|C\big)\bullet M_U = H_U f$.

IV. Application : Cas d'un opérateur parabolique

Dans la suite nous considérons $X = R^n \times R$, $(n \geq 1)$, L un opérateur différentiel parabolique autonôme de la forme

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c - \frac{\partial}{\partial t}$$

et $\mathscr{H}$ le faisceau harmonique associé à L. C'est à dire pour tout ouvert U de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, $\mathscr{H}(U) = \{u \in \mathscr{C}(U) : Lu = 0$ au sens des distributions$\}$.

Soit $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et soit $\varphi \colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne, localement Kato–Lipschitzienne relativement à M et telle que $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$. On se propose de résoudre l'équation $Lu - u\varphi(\,\cdot\,,u) = 0$ au sens des distributions avec $\lim_{x\to z} u(x) = f(z)$ pour tout point z régulier de la frontière de U, où U est un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et $f \in \mathscr{C}(\partial U)$.

IV.1. Proposition. *Soit $\varphi \colon \mathbf{R}^{n+1} \times R \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne. On suppose que $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$ et que φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M. Si de plus φ^- est Kato-bornée relativement à M, alors pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{C}_b(\partial U)$, il existe une solution unique $u \in \mathscr{C}_b(U)$ de l'équation $Lu - u\varphi(\,\cdot\,,u) = 0$ au sens des distributions telle que $\lim_{x\to z} u(x) = f(z)$ pour tout point z L-régulier de la frontière de U.*

Démonstration. On a :

$$\begin{cases} Lu - u\varphi(\,\cdot\,,u) = 0 & \text{au sens des distributions,} \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z) & \text{pour tout point } z \in \partial U \ L\text{-régulier} \end{cases}$$

si et seulement si $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big) \bullet M_U = H_U f$. D'après la proposition III.7 on a pour tout $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ une solution unique u de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big) \bullet M_U = H_U f$.

IV.2. Exemple. a) Si $\varphi(x,y) = C(x)g(y)$ avec C de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^+$ localement Kato-bornée relativement à M et $g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localement Lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. Alors pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}_b(U)$ du système

$$\begin{cases} Lu - C|g(u)|u = 0 & \text{au sens des distributions,} \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z) & \text{pour tout point } z \in \partial U \ L\text{-régulier.} \end{cases}$$

b) Soit P un polynôme de degré impair vérifiant :

$$P(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{P(x)}{x} = +\infty.$$

Alors pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ le système

$$\begin{cases} Lu - Pu = 0 & \text{au sens des distributions,} \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z) & \text{pour tout point } z \in \partial U \ L\text{-régulier} \end{cases}$$

possède une unique solution $u \in \mathscr{C}_b(U)$. En effet, posons

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} p(y)/y & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

On a $\lim_{|y| \to +\infty} \varphi(x,y) = +\infty$ donc il existe $M \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant $\varphi^- \leq M$. D'après la proposition IV.1 il existe une unique $u \in \mathscr{C}_b(U)$ solution du système

$$\begin{cases} Lu - Pu = 0 & \text{au sens des distributions,} \\ \lim_{x \to z} u(x) = f(z) & \text{pour tout point } z \in \partial U \ L\text{-régulier.} \end{cases}$$

Soit $X = \mathbf{R}^{n+1}$ et soit $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, on notera par T_0 et T_1 les réels suivants :

$$T_0 = \inf\{t \in \mathbf{R} : \text{ il existe } x \in \mathbf{R}^n \text{ vérifiant } (x,t) \in U\},$$
$$T_1 = \sup\{t \in \mathbf{R} : \text{ il existe } x \in \mathbf{R}^n \text{ vérifiant } (x,t) \in U\}.$$

IV.3. Définition. On appelle diamétre calorifique de U le nombre réel positif $T_1 - T_0$. Dans toute la suite on suppose que φ vérifie l'hypothèse supplémentaire suivante : Pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $M_c \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant $\varphi^-(x,y) \leq M_c$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ et pour tout $y \in [-c, c]$.

IV.4. Théorème. *Soient $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, $c \in \mathbf{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq ce^{-M_c(T_1 - T_0)}$. Alors, il existe une unique solution u de l'équation $Lu = \varphi(\,\cdot\,, u)u$ au sens des distributions telle que $\lim_{x \to z} u(x) = f(z)$ pour tout point $z \in \partial U$ L-régulier.*

Démonstration. D'après le théorème III.1 il suffit de prouver l'existence des solutions de l'équation $Lu = \varphi(\,\cdot\,, u)u$ au sens des distributions avec $\lim_{x \to z} u(x) = f(z)$ pour tout point $z \in \partial U$ L-régulier. Soit $c \in \mathbf{R}_+^*$, posons $\tilde{\varphi}$ l'application de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie par $\tilde{\varphi}(x,t,s) = \varphi(x,t,e^{M_c t}s) + M_c$ et

$$E = \{u \in \mathscr{C}_b(U) : \sup_{(x,t) \in U} |e^{M_c t} u(x,t)| \leq c\}.$$

Pour tout $u \in E$, $\tilde{\varphi}\big(x,t,u(x,t)\big) = \varphi\big(x,t,e^{M_c t}u(x,t)\big) + M_c \geq 0$ car $\varphi^-\big(x,t,e^{M_c t}u(x,t)\big) \leq M_c$.

Soit $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ telle que $\|f\|_\infty \leq ce^{-M_c(T_1 - T_0)}$. On pose $g(x,t) = e^{M_c t} f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \partial U$. Soit $u \in E$ et soit v_u la solution du système

$$\begin{cases} Lv_u - \tilde{\varphi}(\,\cdot\,, u)v_u = 0, \\ \lim_{(x,t) \to z} v_u(x,t) = g(z) \text{ pour tout point } z \in \partial U \ L\text{-régulier.} \end{cases}$$

On a : $|v_u| = \big|\big(I + \tilde{\varphi}(\,\cdot\,, u)\big)^{-1} H_U g\big| \leq |H_U g| \leq \|g\|_\infty$. D'où

$$\sup_{(x,t) \in U} |e^{M_c t} v_u(x,t)| \leq e^{M_c T_1} \|v_u\|_\infty \leq e^{M_c T_1} \|g\|_\infty \leq e^{M_c T_1} e^{-M_c T_0} \|f\|_\infty \leq c$$

donc $v_u \in E$. Soit $T\colon E \to E$ definie par, $T(u) = v_u$ de manière analogue à [3], on montre que T est complètement continu donc possède au moins un point fixe. C'est à dire, il existe $u \in E$ tel que $Lu = \tilde{\varphi}(\,\cdot\,, u)u$ avec $\lim_{(x,t)\to z} u(x,t) = g(z)$ pour tout point $z \in \partial U$ L-régulier. La fonction $v\colon U \to \mathbf{R}$, $(x,t) \to e^{M_c t}u(x,t)$ vérifie alors $Lv = \varphi(\,\cdot\,, v)v$ au sens des distributions. De plus, pour $z = (x_0, t_0) \in \partial U$ L-régulier, on a

$$\lim_{(x,t)\to z} v(x,t) = e^{Mt_0} g(x_0,t_0) = e^{Mt_0}e^{-Mt_0} f(x_0,t_0) = f(z).$$

IV.5. Proposition. *Soit $\varphi\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definie par $\varphi(x,y) = -y^p$ avec $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $K > 0$ et pour tout ouvert U de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ vérifiant $T_1 - T_0 < e^{-1}/pK^p$ on a : Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ telle que $\|f\|_\infty \le K$, il existe une unique solution u de l'équation $Lu = \varphi(\,\cdot\,, u)u$ au sens des distributions avec $\lim_{x\to z} u(x) = f(z)$ pour tout point $z \in \partial U$ L-régulier.*

Démonstration. On a : $\varphi^-(x,y) \le |\varphi(x,y)| \le c^p$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et pour tout $y \in [-c, c]$. Si

$$T_1 - T_0 \le \frac{1}{pK^p} e^{-1}, \qquad \text{alors} \qquad K \le \frac{e^{-1/p}}{\big(p(T_1 - T_0)\big)^{1/p}}.$$

Posons $c = \big(p(T_1 - T_0)\big)^{-1/p}$ on a : $K \le ce^{-c^p(T_1 - T_0)}$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ vérifiant $\|f\|_\infty \le K$ on a $\|f\|_\infty \le ce^{-c^p(T_1-T_0)}$. D'après le théorème précédent l'équation $Lu = -u^{p+1}$ posséde une solution unique vérifiant $\lim_{x\to z} u(x) = f(z)$ pour tout point $z \in \partial U$ L-régulier.

IV.6. Remarque. Nous obtenons un résultat analogue à celui de D. Feyel et A. de La Pradelle [11] où on remplace le diamètre géométrique par le diamètre calorifique.

La proposition suivante montre qu'on n'a pas toujours la résolubilité du problème de Dirichlet et qu'on est parfois amené à étudier un problème de bifurcation.

IV.7. Proposition. *Soient A un opérateur élliptique sur $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{H}$ le faisceau harmonique associé à A et $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$. Alors le système*

$$(*) \qquad \begin{cases} Au + u^2 = 0, \\ \lim_{x\to z} u(x) = f(z) \text{ pour tout point } z \in \partial U \ A\text{-régulier} \end{cases}$$

n'a pas de solutions pour toute donnée f à la frontière.

Démonstration. Supposons que pour tout $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ on a une solution du système $(*)$. Soit V le noyau associé à l'opérateur A, alors pour tout $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, il existe $u_n \in \mathscr{C}(U)$ vérifiant $u_n - Vu_n^2 = nH_U f$. Soit $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ telle que

$H_U f > 1$. On a alors $u_n \geq n$ et $u_n = V u_n^2 + nH_U f$. Ainsi

$$\begin{aligned}
u_n &\geq nH_U f + nV(u_n) \geq nH_U f + nV[nH_U f + nV(u_n)] \\
&\geq nH_U f + n^2 V(H_U f) + n^2 V^2\big(nH_U f + nV(u_n)\big) \\
&\geq \sum_{k=1}^{p+1} n^k V^{k-1}(H_U f) + n^{p+1} V^{p+1}(u_n) \\
&= n + n^2 \sum_{k=1}^{p} n^{k-1} V^k(H_U f) + n^{p+1} V^{p+1}(u_n).
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} n^{k-1} V^k(H_U f) < +\infty$, ainsi V est un noyau fortement parabolique et par suite $\mathscr{H}$ est parabolique sur U (voir [4]). D'où la contradiction à l'hypothèse élliptique.

V. Propriete de faisceau

Dans ce paragraphe, nous étudions les propriétés de la paire $(X, \widetilde{\mathscr{H}})$ où $\widetilde{\mathscr{H}}(U) = \{u \in \mathscr{C}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \cdot M_V \in \mathscr{H}(V)$ pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ vérifiant $V \subset \overline{V} \subset U\}$ avec $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$, U un ouvert de X et φ: $X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne.

V.1. Définition. Soit X un espace topologique et $\widetilde{\mathscr{H}}$ une application définie sur l'ensemble des ouverts de X. Nous dirons que $\widetilde{\mathscr{H}}$ est un faisceau non-linéaire de fonctions sur X si $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie les propriétés suivantes :

a) Pour tout ouvert U de X, $\widetilde{\mathscr{H}}(U)$ est un sous ensemble de fonctions numériques continues sur U.
b) Pour tout couple d'ouverts (U, V) de X vérifiant $U \subset V$ on a : $\widetilde{\mathscr{H}}(V)_{|U} \subset \widetilde{\mathscr{H}}(U)$.
c) Pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X et pour toute fonction numérique h définie sur $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ on a : $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$ si $h|_{U_i} \in \widetilde{\mathscr{H}}(U_i)$ pour tout $i \in I$.

Soient $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et φ: $X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ localement Kato-bornée relativement à M. On considère l'application $\widetilde{\mathscr{H}}$ définie sur l'ensemble des ouverts de X par

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{H}}(U) = \{u \in \mathscr{C}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \cdot M_V \in \mathscr{H}(V) \\
\text{pour tout } V \in \mathscr{U}(\mathscr{H}) \text{ vérifiant } \overline{V} \subset U\}.
\end{aligned}$$

V.2. Proposition. *L'application $\widetilde{\mathscr{H}}$ est un faisceau non-linéaire de fonctions sur X.*

Démonstration. a) Il est clair que pour tout ouvert U de X et pour tout ouvert V vérifiant $V \subset \overline{V} \subset U$ on a $\widetilde{\mathscr{H}}(U)_{|V} \subset \widetilde{\mathscr{H}}(V)$.

b) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et soit $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U_i)$ pour tout $i \in I$, alors h est continue sur $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $V \subset \overline{V} \subset U$. On a pour tout $x \in V$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. On choisit $V_i \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $x \in V_i$ et $\overline{V}_i \subset V \cap U_i$, alors $h + \big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_{V_i} \in \mathscr{H}(V_i)$. Comme φ est localement Kato-bornée relativement à M, alors pour $c = \|h\|_\infty$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot\,,h)|\bullet M_w \prec p^c_w$ pour tout $w \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$. Donc $\big(\varphi(\cdot\,,h)\bullet M_w\big)_{w\in\mathscr{U}(\mathscr{H})}$ est une section de potentiel continus et réels. Ainsi

$$h + \big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_V = \big(h + \big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_{V_i}\big) + H_{V_i}\big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}(V_i).$$

Donc $h + \big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}(V)$ pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $V \subset \overline{V} \subset U$. Par suite $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$.

V.3. Définition. Soit U un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ et soit $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$. Nous dirons que f est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutive sur U s'il existe une unique fonction $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$ vérifiant $h + \big(h\varphi(\cdot\,,h)\big)\bullet M_U = H_U f$. Désormais, on notera par $\widetilde{\mathscr{H}}_U f$ une telle fonction.

V.4. Définition. Soit U un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. Nous dirons que U est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutif si toute fonction $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutive sur U.

Dans toute la suite, nous supposons que le faisceau non-linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$ suivante : Pour tout $K \in \mathbf{R}^*_+$, il existe une base d'ouverts $\mathscr{V}^k \subset \mathscr{U}(\mathscr{H})$ telle que : Pour tout $V \in \mathscr{V}^k$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ vérifiant $\|f\|_\infty \le K$, f est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutive sur V.

V.5. Exemples. Nous donnerons des exemples d'applications φ pour lesquelles le faisceau non linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$.

V.5.1. Soit $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne et soit $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :

a) L'application $\Psi\colon X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definie par $\Psi(x,y) = y\varphi(x,y)$ est Kato–Lipschitzienne relativement à M.

b) L'application φ est M-continue.

Soit $\mathscr{V} = \{V$ ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H}) : \|K^{\tilde{p}}_V\| < 1\}$ avec $\tilde{p}_U = |\varphi(\cdot\,,0)|\bullet M_U + p_U$ pour $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$.

D'après [3] on a pour tout $V \in \mathscr{V}$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ existence d'une solution unique de l'équation $u + \big(u\varphi(\cdot\,,u)\big)\bullet M_V = H_V f$. Exemple :

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \sin y/y & \text{si } y \neq 0, \\ 1 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

V.5.2. Soit $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne et soit $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :

a) φ est localement Kato-bornée relativement à M.
b) L'application $y \to \varphi(\cdot, y)y$ est croissante sur $\mathbf{R}$.
c) L'application φ est M-continue.
d) $1 \in \mathscr{S}^+(X)$.

D'après l'hypothèse a) pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot, u)| \bullet M_U \prec p_U^c$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u \in \mathscr{B}_b(X)$. Soit $K \in \mathbf{R}_+^*$ et soit $\mathscr{V}^K = \bigcup_{c>K}\{V$ ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H}) : \|K_V^{p^c}\|_\infty \leq 1 - K/c\}$. D'après [3] on a pour tout $V \in \mathscr{V}^K$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ telle que $\|f\|_\infty \leq K$ une unique solution de l'équation $u + \big(u\varphi(\cdot, u)\big) \bullet M_V = H_V f$.

V.5.3. Soient $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer tel que le faisceau $\mathscr{H}$ est parabolique sur tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, φ: $X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne et $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :
a) $\varphi(\cdot, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.
b) φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M.
c) φ^- est Kato-bornée relativement à M.

D'après la proposition III.7 on a pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial U)$ l'existence et l'unicité des solutions de l'équation $u + \big(u\varphi(\cdot, u)\big) \bullet M_U = H_U f$. Dans ce qui suit, nous supposons qu'en plus de la propriété $(\mathscr{P})$ l'application φ vérifie les conditions suivantes
i) $\varphi(\cdot, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.
ii) φ est localement Kato–Lipschitzienne relativement à M.

V.6. Remarque. L'application $\widetilde{\mathscr{H}}$ est un faisceau non-linéaire de fonctions sur X. En effet : D'après i) et ii) φ est localement Kato-bornée relativement à M.

V.7. Notations et remarque. a) D'après l'hypothèse ii) pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant : $|\varphi(\cdot, u) - \varphi(\cdot, v)| \bullet M_U \prec |u - v| \bullet p_U^c$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout u, v dans $\mathscr{B}_b(X)$ tels que $\|u\|_\infty \leq c$ et $\|v\|_\infty \leq c$. Par suite :

$$\begin{aligned}
|\varphi(\cdot, u)u - \varphi(\cdot, v)v| \bullet M_U &\prec |u|\, |\varphi(\cdot, u) - \varphi(\cdot, v)| \bullet M_U + |\varphi(\cdot, v)|.|u - v| \bullet M_U \\
&\prec c|u - v| \bullet p_U^c + \big((|\varphi(\cdot, v) - \varphi(\cdot, 0)| + |\varphi(\cdot, 0)|)|u - v|\big) \bullet M_U \\
&\prec |u - v| \bullet \big(2cp_U^c + |\varphi(\cdot, 0)| \bullet M_U\big).
\end{aligned}$$

On note $\tilde{p}_U^c = 2cp_U^c + |\varphi(\cdot, 0)| \bullet M_U$, $\tilde{p}^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$.

b) Puisque l'application $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie la propriété $(\mathscr{P})$, alors pour tout $k \in \mathbf{R}_+^*$, il existe une base d'ouverts $\mathscr{V}^k \subset \mathscr{U}(\mathscr{H})$ telle que : Pour tout $V \in \mathscr{V}^k$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq K$, f est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutive sur V.

Dans toute la suite de ce chapitre nous supposons que $1 \in \mathscr{S}^+(X)$. Soit U

un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. On note :

$$\mathscr{U}^k(U) = \bigcup_{c>k}\{V \in \mathscr{V}^k : \overline{V} \subset U \text{ et } \|K_V^{\tilde{p}^c}\|_\infty < 1 - k/c\} ;$$

$$\widetilde{\mathscr{H}}^*(U) = \{u \in \mathscr{B}_b(U) \text{ semi-continue inférieurement : } \widetilde{H}_V u \le u \text{ pour tout } V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)\} ;$$

$$\widetilde{\mathscr{H}}_*(U) = \{u \in \mathscr{B}_b(U) \text{ semi-continue supérieurement : } \widetilde{H}_V u \ge u \text{ pour tout } V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)\}.$$

Toute application $f \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$ (ou $f \in \widetilde{\mathscr{H}}_*(U)$) est dite $\widetilde{\mathscr{H}}$-hyperharmonique (ou $\widetilde{\mathscr{H}}$-hypoharmonique) sur U.

Soit $p \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$, nous dirons que p est un $\widetilde{\mathscr{H}}$-potentiel sur U si pour tout $g \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$ vérifiant $0 \le g \le p$ on a $g = 0$. On notera par $\widetilde{\mathscr{P}}(U)$ l'ensemble des $\widetilde{\mathscr{H}}$-potentiels sur U.

V.8. Théorème. *Soient* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$, $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ *et* $\varphi: X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne. On suppose que :*

i) $\varphi(\,\cdot\,, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

ii) φ *localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.

iii) $\widetilde{\mathscr{H}}$ *vérifie la propriété* $(\mathscr{P})$.

Alors,

$$\widetilde{\mathscr{H}}^*(U) = \{u \in \mathscr{B}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}^*(V) \textit{ pour tout } V \subset \overline{V} \subset U\}.$$

Démonstration. Soit $u \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$ et soit $V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)$. Alors il existe $c > \|u\|_\infty$ vérifiant $\|K_V^{\tilde{p}^c}\|_\infty \le 1 - \|u\|_\infty/c$. D'après [3] $\widetilde{H}_V u = (I + K_V^{M^{\tilde{H}_V u}})^{-1} H_V u$ et $\|\widetilde{H}_V u\|_\infty \le c$. Posons $K'_V u = (I - K_V^{\tilde{p}^c})^{-1}({}^{\varphi}K_V u + K_V^{\tilde{p}^c} u)$. Soit W un ouvert de X tel que $\overline{W} \subset V$ on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_W u + K'_W \widetilde{H}_W u &= \widetilde{H}_W u + (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}({}^{\varphi}K_W \widetilde{H}_W u + K_W^{\tilde{p}^c}\widetilde{H}_W u)\\
&= (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}\big[(I - K_W^{\tilde{p}^c})\widetilde{H}_W u + {}^{\varphi}K_W \widetilde{H}_W u + K_W^{\tilde{p}^c}\widetilde{H}_W u\big]\\
&= (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}(\widetilde{H}_W u + {}^{\varphi}K_W \widetilde{H}_W u) = (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1} H_W u.
\end{aligned}$$

Posons ${}^{-\tilde{p}^c}H_W u = (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1} H_W u$. On aura $K'_V = {}^{-\tilde{p}^c}H_W K'_V + K'_W$ et ainsi

$$\begin{aligned}
{}^{-\tilde{p}^c}H_W(u + K'_V u) &= {}^{-\tilde{p}^c}H_W u + {}^{-\tilde{p}^c}H_W K'_V u = \widetilde{H}_W u + K'_W \widetilde{H}_W u + {}^{-\tilde{p}^c}H_W K'_V u\\
&= (\widetilde{H}_W u - u) + K'_W \widetilde{H}_W u + u - K'_W u + K'_V u\\
&= (\widetilde{H}_W u - u) + (u + K'_V u) + (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}\big[\big(\widetilde{H}_W u\big(\varphi(\,\cdot\,, \widetilde{H}_W u)\big)\bullet M_W\\
&\qquad + \widetilde{H}_W u\bullet\tilde{p}_W^c\big) - \big(u\big(\varphi(\,\cdot\,, u)\big)\bullet M_W - u\bullet\tilde{p}_W^c\big]\\
&= (\widetilde{H}_W u - u) + (u + K'_V u) + (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}(\widetilde{H}_W u - u)\big[(\phi^{\tilde{H}_W u, u}\bullet M_W + \tilde{p}_W^c)\big].
\end{aligned}$$

Comme le noyau $\phi^{\tilde{H}_W u,u} \bullet M_W + \tilde{p}^c_W$ est positif et puisque $\widetilde{H}_W u \leq u$ alors,

$$\widetilde{H}_W u - u + (I - K_W^{\tilde{p}^c})^{-1}(\widetilde{H}_W u - u)(\phi^{\tilde{H}_W u,u} \bullet M_W + \tilde{p}^c_W) \leq 0$$

et par suite :

$$u + K'_V u \in {}^{-\tilde{p}^c}\mathscr{S}(V) = \{v \in \mathscr{B}_b(V) : (I - K_V^{\tilde{p}^c})v \in \mathscr{S}_b(V)\}$$

(voir [8]), donc $(I - K_V^{\tilde{p}^c})(u + K'_V u) \in \mathscr{S}(V)$. Or :

$$\begin{aligned}(I - K_V^{\tilde{p}^c})(u + K'_V u) &= (I - K_V^{\tilde{p}^c})u + (I - K_V^{\tilde{p}^c})(I - K_V^{\tilde{p}^c})^{-1}({}^{\varphi}K_V u + K_V^{\tilde{p}^c} u)\\ &= (I - K_V^{\tilde{p}^c})u + {}^{\varphi}K_V u + K_V^{\tilde{p}^c} u = u + {}^{\varphi}K_V u \in \mathscr{S}(V).\end{aligned}$$

Soit $A \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $\bar{A} \subset U$. On a :

$$u + {}^{\varphi}K_A u = (u + {}^{\varphi}K_V u) + H_V K_A u \in \mathscr{S}(V)$$

pour tout $V \subset \overline{V} \subset A$ tel que $V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)$.

Réciproquement soit $u \in \mathscr{B}_b(U)$ vérifiant $u + {}^{\varphi}K_V u \in \mathscr{H}^*(V)$ pour tout $V \subset \overline{V} \subset U$. On a $u \in \mathscr{B}_b(U)$, de plus pour tout $V \in \mathscr{U}^{\|u\|_\infty}(U)$ on a $\widetilde{H}_V u \leq u$. En effet : $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U - H_V\big(u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U\big) \in \mathscr{S}_b^+(U)$ et

$$\begin{aligned}u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)&\bullet M_U - H_V\big(u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U\big)\\ &= u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U - H_V u - H_V\big(\big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U\big)\\ &= (u - \widetilde{H}_V u) + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U - \big(\widetilde{H}_V u\varphi(\,\cdot\,,\widetilde{H}_V u)\big)\bullet M_V\\ &\qquad - H_V\big(\big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_U\big)\\ &= (u - \widetilde{H}_V u) + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_V - \big(\widetilde{H}_V u\varphi(\,\cdot\,,\widetilde{H}_V u)\big)\bullet M_V\\ &= (u - \widetilde{H}_V u) + \big((u - \widetilde{H}_V u)\phi^{\widetilde{H}_V u,u}\big)\bullet M_V\\ &= (I + \phi^{\widetilde{H}_V u,u}\bullet M_V)(u - \widetilde{H}_V u).\end{aligned}$$

Donc $u - \widetilde{H}_V u \geq 0$. Par suite $u \in \widetilde{\mathscr{H}^*}(U)$.

V.9. Remarque. De manière analogue on montre que sous les mêmes hypothèses on a : $\widetilde{\mathscr{H}_*}(U) = \{u \in \mathscr{B}_b(U) : u + u\varphi(\,\cdot\,,u)\bullet M_V \in \mathscr{H}_*(V)$ pour tout $V \subset \overline{V} \subset U\}$.

VI. Espace harmonique non-linéaire

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion d'espace harmonique non-linéaire où on omet les hypothèses de linéarité des fonctions harmoniques et hyperharmoniques et nous étudions les propriétés d'un tel espace.

Soient $(X, \mathscr{H})$ un espace harmonique de Bauer, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et $\varphi\colon X\times\mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ Kato-bornée relativement à M.

VI.1. Définition. Soit $\widetilde{\mathscr{H}}$ un faisceau non-linéaire de fonctions sur X. Nous dirons que la paire $(X, \widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique de Bauer non-linéaire si $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie les propriétés suivantes :

a) Il existe une base $\mathscr{V}$ d'ouverts $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutifs telle que pour tout U, V dans $\mathscr{V}$, $U \cap V \in \mathscr{V}$.

b) Propriété de convergence de Bauer : soit U un ouvert de X et soit $(h_n)_n$ une suite de fonctions dans $\widetilde{\mathscr{H}}(U)$ uniformément bornée qui converge vers h, alors $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$.

c) $\widetilde{\mathscr{H}}$ est non-dégénéré : pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de X contenant x, une fonction $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$ telle que $h(x) > 0$.

VI.2. Définition. Soit U un ouvert de $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. Nous dirons que $\widetilde{\mathscr{H}}$ vérifie le principe de minimum sur U si pour tout $u \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$ et pour tout $v \in \widetilde{\mathscr{H}}_*(U)$ tels que $\hat{u} \geq \check{v}$ sur ∂U on a $u \geq v$ sur U.

Dans toute la suite nous considérons le faisceau non-linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ définie sur l'ensemble des ouverts de X par

$$\widetilde{\mathscr{H}}(U) = \{u \in \mathscr{C}_b(U) : u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}(V)$$

pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ vérifiant $V \subset \overline{V} \subset U\}$.

VI.3. Théorème. *Soit U un ouvert de X et soit $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ M-continue et localement Kato-bornée relativement à M. Si $(h_n)_n$ est une suite de fonctions uniformément bornées de $\widetilde{\mathscr{H}}(U)$ qui converge vers h alors $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$.*

Démonstration. Puisque $(h_n)_n \subset \widetilde{\mathscr{H}}(U)$, alors pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $\overline{V} \subset U$ on a :

$$h_n + \big(h_n\varphi(\,\cdot\,, h_n)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}(V).$$

Posons $g_n = h_n + \big(h_n\varphi(\,\cdot\,, h_n)\big)\bullet M_V$ et soit $c \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant $\|h_n\|_\infty \leq c$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. φ est localement Kato bornée relativement à M, donc, il existe $p^c \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ tel que pour tout $u \in \mathscr{B}_b(X)$ vérifiant $\|u\|_\infty \leq c$ on a $|\varphi(\,\cdot\,, u)\bullet M_V| \prec P_V^c$. Ainsi : Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|g_n| \leq |h_n| + |h_n|\,|\varphi(\,\cdot\,, h_n)|\bullet M_V \leq c + cp_V^c < +\infty.$$

La famille $\{g_n : n \in \mathbf{N}\}$ est alors bornée dans $\mathscr{H}(V)$ et donc $\{g_n : n \in \mathbf{N}\}$ est relativement compact pour la topologie de convergence uniforme (voir [9, théorème 11.1.1]). Donc, il existe une sous suite $(g_{n_k})_n$ de $(g_n)_n$ qui converge uniformément vers $g \in \mathscr{H}(V)$. De plus $\big(h_n\varphi(\,\cdot\,, h_n)\big)\bullet M_V$ converge vers $\big(h\varphi(\,\cdot\,, h)\big)\bullet M_V$.

En effet :

$$|h_n\varphi(\,\cdot\,,h_n) - h\varphi(\,\cdot\,,h)| \le |h_n|\,|\varphi(\,\cdot\,,h_n) - \varphi(\,\cdot\,,h)| + |\varphi(\,\cdot\,,h)|\,|h_n - h|.$$

Donc

$$|h_n\varphi(\,\cdot\,,h_n) - h\varphi(\,\cdot\,,h)|\bullet M_V \prec c|\varphi(\,\cdot\,,h_n) - \varphi(\,\cdot\,,h)|\bullet M_V + |h_n - h|\bullet p_V^c.$$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} g_{n_k} = \lim_{n\to+\infty}\big(h_{n_k} + \big(h_{n_k}\varphi(\,\cdot\,,h_{g_k})\big)\bullet M_V\big) = h + \big(h\varphi(\,\cdot\,,h)\big)\bullet M_V.$$

Ainsi $g = h + \big(h\varphi(\,\cdot\,,h)\big)\bullet M_V \in \mathscr{H}(V)$ pour tout $V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ tel que $\overline{V} \subset U$. Par suite $h \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$.

VI.4. Proposition. *Soient $(X,\mathscr{H})$ un espace harmonique, $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ et $\varphi\colon X\times\mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne. On suppose que :*

a) *φ localement Kato-bornée relativement à M.*

b) *L'application φ est M - continue.*

Alors, le faisceau non-linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ est non-dégénéré.

Démonstration. Soit $x \in X$: il existe h harmonique bornée sur un voisinage U de x telle que $h(x) > 0$. Posons $K = \sup_{y\in U}|h(y)|$. D'après [3], il existe une base d'ouverts $\mathscr{V}$ telle que pour tout $V \in \mathscr{V}$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ vérifiant $\|H_V f\|_\infty \le K$ on a une solution de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_V = H_V f$ et $u = (I + K_V^{M^u})^{-1}H_V f$. Or il existe $V \in \mathscr{V}$ tel que $x \in V$, $\overline{V} \subset U$ et $\|H_V h\|_\infty = \|h|_V\|_\infty \le K$. Donc il existe $u_h \in \widetilde{\mathscr{H}}(V)$ vérifiant

$$u_h = (I + K^{M^{u_h}})^{-1}H_V h = (I + K^{M^{u_h}})^{-1}h.$$

D'après [8], $h(x) > 0$, alors $u_h(x) > 0$.

VI.5. Proposition. *Soient $\varphi\colon X\times\mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ borélienne et soit $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. On suppose que :*

a) *φ est Kato bornée relativement à M.*

b) *L'application φ est M-continue.*

c) *L'application $y \mapsto y\varphi(\,\cdot\,,y)$, $y \in \mathbf{R}$, est croissante.*

Alors la paire $(X,\widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique non-linéaire au sens de la définition VI.1.

Démonstration. D'après le théorème VI.3 on a la propriété de convergence de Bauer. De plus, il existe $q \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$ vérifiant $|\varphi(\,\cdot\,,u)|\bullet M_U \prec q_U$ pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et pour tout $u \in \mathscr{B}_b(X)$. Posons $\mathscr{V} = \{V \in \mathscr{U}(\mathscr{H}) : \|K_V^q\|_\infty < 1\}$. $\mathscr{V}$ est une base d'ouverts $\widetilde{\mathscr{H}}$ résolutifs. En effet, d'après [3], on a pour tout $V \in \mathscr{V}$ et pour tout $f \in \mathscr{B}_b(\partial V)$ l'existence et l'unicité des solutions de l'équation $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,,u)\big)\bullet M_V = H_V f$. Il est clair que si U, V sont dans $\mathscr{V}$, $U\cap V \in \mathscr{V}$. De plus d'après a) et b) $\widetilde{\mathscr{H}}$ est non-dégénéré. Donc $(X,\widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique de Bauer non-linéaire.

VI.6. Proposition. *Soit* $(X, \mathscr{H})$ *un espace harmonique de Bauer tel que le faisceau* $\mathscr{H}$ *est parabolique sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. *Soit* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et soit* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

a) $\varphi(\,\cdot\,, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

b) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.

c) φ^- *est Kato-bornée relativement à* M.

Alors $(X, \widetilde{\mathscr{H}})$ *est un espace harmonique non-linéaire au sens de la définition* VI.1.

Démonstration. L'application φ est localement Kato-bornée relativement à M donc $\widetilde{\mathscr{H}}$ est un faisceau non-linéaire de fonctions sur X. D'aprés l'hypothése b) l'application φ est M-continue, donc la propriété de convergence de Bauer est satisfaite et $\widetilde{\mathscr{H}}$ est non-dégénéré. De plus, tout ouvert $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ est $\widetilde{\mathscr{H}}$-résolutif (voir la proposition III.7) et $U \cap V \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ pour tout U, V dans $\mathscr{U}(\mathscr{H})$. Ainsi $(X, \widetilde{\mathscr{H}})$ est un espace harmonique non-linéaire.

VI.7. Proposition. *Soit* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et soit* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

i) $\mathscr{H}$ *est parabolique sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

ii) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.

iii) $\varphi(\,\cdot\,, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

iv) φ^- *est Kato-bornée relativement à* M.

Alors le faisceau non-linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ *vérifie le principe du minimum sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

Démonstration. Soients $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$, $u \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$ et $v \in \widetilde{\mathscr{H}}_*(U)$ tels que : $\hat{u} \geq \check{v}$ sur ∂U. D'après le théorème V.8 on a : $u + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_U \in \mathscr{H}_b^*(U)$ et $v + \big(v\varphi(\,\cdot\,, v)\big) \bullet M_U \in \mathscr{H}_{*b}(U)$. Posons $s = u - v + \big(u\varphi(\,\cdot\,, u)\big) \bullet M_U - \big(v\varphi(\,\cdot\,, v)\big) \bullet M_U$. On a $s \in \mathscr{S}_b(U)$ et $s = u - v + \phi^{u,v}(u - v) \bullet M_U$ donc, il existe $p \in \mathscr{P}(U)$ tel que $s + p \geq 0$ sur U. Ainsi $s \geq 0$ sur U (voir [9]). Or $(u - v) = (I + \phi^{u,v} \bullet M_U)^{-1} s \geq 0$ sur U. Donc $u \geq v$ sur U.

VI.8. Corollaire. *Soit* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et soit* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

a) $\mathscr{H}$ *est parabolique sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

b) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.

c) $\varphi(\,\cdot\,, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

d) φ *est positive sur* $X \times \mathbf{R}$.

Alors le faisceau non-linéaire $\widetilde{\mathscr{H}}$ *vérifie le principe du minimum sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

VI.9. Théorème. *Soit* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*

a) $\varphi(\,\cdot\,, 0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.

b) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.

c) $\mathscr{H}$ *est parabolique sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

d) φ^- *est Kato-bornée relativement à* M.
Alors, pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ *et pour tout* $p \in \mathscr{B}_b(U)$, *on a :*

$$p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \in \mathscr{P}(U)$$

si et seulement si $p \in \widetilde{\mathscr{P}}(U)$.

Démonstration. Soit $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ et $p \in \mathscr{B}_b(U)$ vérifiant $p+\big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \in \mathscr{P}(U)$. Alors $p \in \widetilde{\mathscr{H}}^*(U)$. Soit $g \in \widetilde{\mathscr{H}}(U)$ vérifiant $0 \le g \le p$. On a : $g+\big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U \in \mathscr{H}(U)$. Posons $s = p+\big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U - g - \big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U$. $s \in \mathscr{S}(U)$ et $s \ge \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U - \big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U$ donc $s \ge 0$ sur U (voir [8]). Ainsi $p+\big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \ge g+\big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U$ et par suite $g+\big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U \le 0$ sur U. Posons $h = -\big(g + \big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U\big)$. On a $h \ge 0$ sur U et

$$h = (-g) + \big((-g)\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U = \big(I + \varphi(\,\cdot\,,g)\bullet M_U\big)(-g)$$

donc $-g = \big(I + \varphi(\,\cdot\,,g)\bullet M_U\big)^{-1} h \ge 0$. Par suite $g = 0$ ainsi $p \in \widetilde{\mathscr{P}}(U)$.

Réciproquement soit $p \in \mathscr{B}_b(U)$ tel que $p \in \widetilde{\mathscr{P}}(U)$ et soit $h \in \mathscr{H}(U)$ vérifiant $0 \le h \le p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U$. On a $p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \in \mathscr{S}_b(U)$. D'après la proposition III.6 il existe un unique $g \in \mathscr{C}_b(U)$ vérifiant $g + \big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U = h$ donc $g = \big(I + \varphi(\,\cdot\,,g)\bullet M_U\big)^{-1} h \ge 0$. Posons

$$s = p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U - g - \big(g\varphi(\,\cdot\,,g)\big)\bullet M_U.$$

On a $s \in \mathscr{S}_b^*(U)$ et

$$s = p - g + \phi^{p,g}(p-g)\bullet M_U = (I + \phi^{p,g}\bullet M_U)(p-g).$$

Donc $p-g \ge 0$ et par suite $p \ge g$. Or $p \in \widetilde{\mathscr{P}}(U)$, donc $g \equiv 0$, ainsi $h \equiv 0$ et par suite $p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \in \mathscr{P}(U)$.

VI.10. Corollaire. *Soient* $\varphi\colon X \times \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ *borélienne et* $M \in \mathscr{M}^+(\mathscr{H})$. *On suppose que :*
a) $\mathscr{H}$ *est parabolique sur tout ouvert de* $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.
b) $\varphi(\,\cdot\,,0) \in K_M^{\mathrm{Loc}}$.
c) φ *est localement Kato–Lipschitzienne relativement à* M.
d) φ *est positive sur* $X \times \mathbf{R}$.
Alors, pour tout $U \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ *et pour tout* $p \in \mathscr{B}_b(U)$. *On a :* $p \in \widetilde{\mathscr{P}}(U)$ *si et seulement si* $p + \big(p\varphi(\,\cdot\,,p)\big)\bullet M_U \in \mathscr{P}(U)$.

Nous remercions le Professeur W. Hansen pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, le referee pour les remarques utiles et T. Mäkeläinen pour la réalisation en TEX de ce travail.

Bibliographie

[1] Aizenman, M., et B. Simon : Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. - Comm. Pure. Appl. Math. 35, 1982, 209–273.

[2] Bel Hadj Rhouma, N. : Problème de Dirichlet relatif à une perturbation non linéaire des espaces harmoniques. - Thèse de 3ème cycle, Faculté des Sciences de Tunis, 1994.

[3] Bel Hadj Rhouma, N., et M. Mosbah : Problème de Dirichlet relatif à une perturbation non linéaire des espaces harmoniques. - Potential Analysis (à paraitre).

[4] Ben Saad, H., et K. Janssen : A characterisation of parabolic potential theory. - Math. Ann. 272, 1985, 281–289.

[5] Bliedtner, J., et W. Hansen : Potential Theory – An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage. - Universitext. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1986.

[6] Boukricha, A. : Stabilité des propriétés de convergence par perturbation des espaces harmoniques. - J. Reine Angew. Math. 348, 1984, 147–165.

[7] Boukricha, A. : Classe de Kato et équation de Schrödinger généralisée avec une singularité isolée. - Africa Mat. (3) 1, 1993, 41–61.

[8] Boukricha, A., W. Hansen, et H. Hueber : Continuous solutions of the generalized schrödinger équation and perturbation of harmonic spaces. - Exposition. Math. 5, 1987, 97–135.

[9] Constantinescu, C., et A. Cornea : Potential Theory on Harmonic Spaces. - Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

[10] Feyel, D., et A. de La Pradelle : Perturbations complexes de diffusions. - Stochastics 22, 1987, 325–335.

[11] Feyel, D., et A. de La Pradelle : Sur certaines perturbations non linéaires du Laplacien. - J. Math. Pures Appl. 67, 1988, 397–404.

[12] van Gool, F. : On axiomatic non-linear potential theory. - In: Potential Theory, Proceedings, Nagoya, 1990, edited by M. Kishi; Walter de Gruyter & Co, Berlin–New York, 1991.

[13] van Gool, F. : Semi-linear perturbation of linear harmonic spaces. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 17, 1992, 367–391.

[14] van Gool, F. : Topics in non-linear potential theory. - Thesis at the University of Utrecht, September 1992.

[15] Hansen, W. : Perturbation of harmonic spaces and construction of semigroups. - Invent. Math. 19, 1973, 149–164.

[16] Hansen, W. : Valeurs propres pour l'opérateur de Schrödinger. - Séminaire de theorie du potentiel, Paris, No 9; Lecture Notes in Math. 1393, Springer-Verlag, 1989, 117–134.

[17] Hansen, W., et H. Hueber : Eigenvalues in potential theory. - J. Differential Equations 73, 1988, 133–152.

[18] Laine, I. : Introduction to a quasi-linear theory. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 10, 1985, 339–348.

[19] Laine, I. : Axiomatic non linear potential theory. - In : Potential Theory. Surveys and Problems, Prague 1987; Lecture Notes in Math. 1344, 1988, 118–132.

[20] Maeda, F.Y. : Semi-linear perturbation of harmonic spaces. - Hokkaido Math. J. 10, 1981, 464–493.

[21] Maeda, F.Y. : Dirichlet problem for a semi-linearly perturbed structure of a harmonic space. - Hiroshima Math. J. 12, 1982, 103–113.

[22] Mosbah, M. : Perturbations et espaces harmoniques non linéaires. - Thèse de 3eme cycle, Faculté des Sciences de Tunis, 1994.

Reçu le 19 janvier 1996